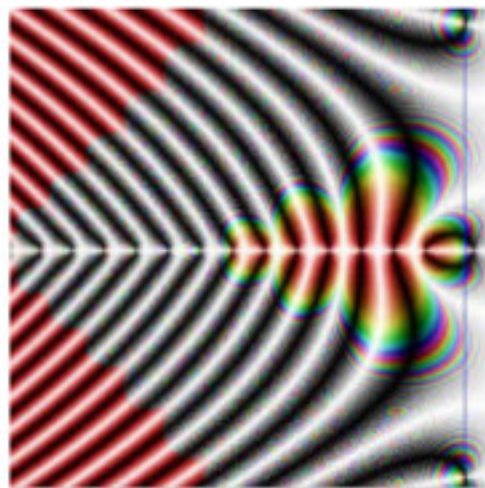
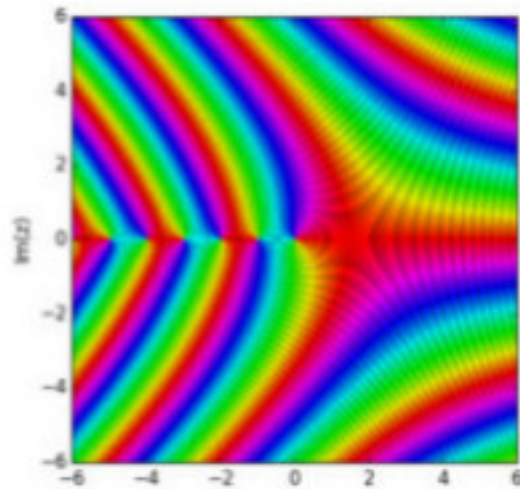


Petit memo (Denise Vella-Chemla, 11.7.2017)

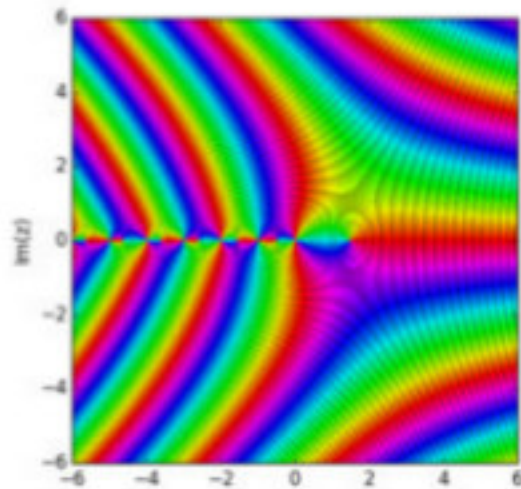
- Γ d'Euler, c'est l'extension de la factorielle aux complexes ;
- c'est Γ' qui semble donner sa forme à ζ ;



$\zeta(z)$



$\Gamma(z)$



$\Gamma'(z)$

SUR LE NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À UNE GRANDEUR DONNÉE

Monatsberichte der Berliner Akademie, novembre 1859.

Oeuvres de Riemann, 2^{ième} édition, pages 145-155.

Je ne crois pouvoir mieux exprimer mes remerciements à l'Académie pour la distinction à laquelle elle m'a fait participer en m'admettant au nombre de ses Correspondants qu'en faisant immédiatement usage du privilège attaché à ce titre pour lui communiquer une étude sur la fréquence des nombres premiers. C'est un sujet qui, par l'intérêt que Gauss et Dirichlet lui ont voué pendant de longues années, ne me semble peut-être pas indigne de faire l'objet d'une telle Communication.

Je prendrai pour point de départ dans cette étude la remarque faite par Euler^[1] que le produit

$$\prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

lorsque p prend pour valeur tous les nombres premiers et n tous les nombres entiers. La fonction de la variable complexe s , qui sera représentée par ces deux expressions, tant qu'elles convergent, je la désignerai par $\zeta(s)$. Toutes deux convergent qu'autant que la partie réelle de s est supérieure à 1. Néanmoins il est facile de trouver pour la fonction une expression qui reste toujours valable.

En faisant usage de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$$

on obtient d'abord

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Si maintenant l'on considère l'intégrale

$$\int \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

prise dans le sens positif de $+\infty$ à $-\infty$ et autour d'un domaine de grandeurs qui contient à son intérieur la valeur 0 mais qui ne contient aucune autre valeur de discontinuité de la fonction sous le signe d'intégration, on obtient aisément pour la valeur de cette intégrale

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

en faisant l'hypothèse que dans la fonction multiforme

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$$

le logarithme de $-x$ est déterminé de telle sorte qu'il soit réel pour x négatif. On aura donc

$$2 \sin \pi s \Gamma(s) \zeta(s) = i \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

l'intégrale étant définie de la manière indiquée ci-dessus.

Cette équation donne maintenant la valeur de la fonction $\zeta(s)$ pour chaque valeur complexe de s et nous enseigne que cette fonction est uniforme, qu'elle est finie pour toutes les valeurs finies de s , sauf 1, et aussi qu'elle s'évanouit lorsque s est égal à un entier pair négatif^[2].

Lorsque la partie réelle de s est négative, l'intégrale, au lieu d'être prise dans le sens positif autour du domaine de grandeurs assigné, peut être prise dans le sens négatif autour du domaine de grandeurs qui contient toutes les grandeurs complexes restantes, car l'intégrale, pour des valeurs dont le module est infiniment grand est alors infiniment petite. Mais, à l'intérieur de ce domaine, la fonction sous le signe d'intégration ne devient discontinue que lorsque x est égal à un multiple entier de $\pm 2\pi i$ et l'intégrale, par

conséquent, est égale à la somme des intégrales prises dans le sens négatif autour de ces valeurs. Mais l'intégrale relative à la valeur $n2\pi i$ égale $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; on obtient donc

$$2\sin \pi s \prod (s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}]$$

c'est-à-dire une relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(s-1)$ qui, en vertu de propriétés connues de la fonction $\prod$ peut aussi s'exprimer ainsi : la quantité

$$\prod \left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

reste inaltérée lorsque s est remplacé par $1-s$.

Cette propriété de la fonction m'a engagé à introduire, au lieu de l'intégrale $\prod(s-1)$, l'intégrale $\prod \left(\frac{s}{2} - 1\right)$ dans le terme général de la série $\sum \frac{1}{n^s}$, ce qui fournit une expression très commode de la fonction $\zeta(s)$. On a en effet

$$\frac{1}{n^s} \prod \left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2 \pi x} x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$\sum_1^\infty e^{-n^2 \pi x} = \psi(x)$$

on a

$$\prod \left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx;$$

ou bien, puisque

$$2\psi(x) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} \left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right]^{[3]},$$

on a encore

$$\begin{aligned} \prod \left(\frac{s}{2} - 1\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) &= \int_1^\infty \psi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\frac{s-3}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(x) \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x) \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) dx \end{aligned}$$

Je pose maintenant

$$s = \frac{1}{2} + ti$$

et

$$\prod \left(\frac{s}{2}\right) (s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \xi(t)$$

en sorte que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx,$$

ou encore

$$\xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx$$

Cette fonction est finie pour toutes les valeurs finies de t et peut être développée suivant les puissances de t^2 en une série qui converge très rapidement. Puisque, pour une valeur de s dont la partie réelle est plus grande que 1, $\log \zeta(x) = -\sum \log(1-p^{-s})$ reste fini et que ce même fait a lieu pour les logarithmes des facteurs restants de $\xi(t)$, la fonction $\xi(t)$ peut seulement s'évanouir lorsque la partie imaginaire de t se trouve comprise entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$. Le nombre de racines de $\xi(t) = 0$ dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T est environ égal à

$$\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

car l'intégrale $\int d \log \xi(t)$ prise le long d'un contour décrit dans le sens positif, comprenant à son intérieur l'ensemble des valeurs de t dont les parties imaginaires sont comprises entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$ et les parties réelles entre 0 et T est égale (abstraction faite d'une partie fractionnaire de même ordre de grandeur que la

grandeur $\frac{1}{T}$) à $(T \log \frac{T}{2\pi} - T)i$; or cette intégrale est égale au nombre de racines de $\xi(t) = 0$ situées dans ce domaine, multiplié par $2\pi i$. On trouve, en effet, entre ces limites un nombre environ égal à celui-ci, de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles^[4].

Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.

Si l'on désigne par α toute racine de l'équation $\xi(\alpha) = 0$, on peut exprimer $\log \xi(t)$ par

$$\sum \log \left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2} \right) + \log \xi(0)$$

En effet, puisque la densité des racines de grandeur t augmente seulement avec t comme le fait $\log \frac{t}{2\pi}$, cette expression converge et pour t infini ne devient infinie que comme l'est $t \log t$; elle diffère de $\log \xi(t)$ par conséquent d'une fonction de t^2 qui, pour t fini, reste finie et continue et qui, divisée par t^2 , sera infiniment petite pour t infini.

Cette différence, par suite, est une constante dont la valeur peut être déterminée en posant $t = 0$.

A l'aide de ces principes auxiliaires, nous pouvons maintenant déterminer le nombre des nombres premiers qui sont inférieurs à x .

Soit $F(x)$ ce nombre lorsque x n'est pas exactement égal à un nombre premier, et soit $F(x)$ ce nombre augmenté de $\frac{1}{2}$ lorsque x est premier, de telle sorte que, pour une valeur de x , pour laquelle $F(x)$ varie par un saut brusque, on ait,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Si, maintenant, dans l'expression

$$\log \zeta(s) = - \sum \log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2} \sum p^{-2s} + \frac{1}{3} \sum p^{-3s}$$

on remplace p^{-s} par $s \int_p^\infty x^{-s-1} dx$, $p^{-2s} = s \int_{p^2}^\infty x^{-s-1} dx, \dots$, on obtient

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx,$$

où l'on a désigné par $f(x)$ l'expression $F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \dots$

Cette équation a lieu pour toute valeur complexe $a + bi$ de s , pourvu que $a > 1$. Mais lorsque, sous ces hypothèses, l'équation suivante

$$g(s) = \int_0^\infty h(x) x^{-s} d \log x$$

a lieu, l'on peut, à l'aide du théorème de Fourier, exprimer la fonction h par la fonction g . Cette équation, quand $h(x)$ est réel et que

$$g(a + bi) = g_1(b) + i g_2(b)$$

se décompose en les deux suivantes :

$$g_1(b) = \int_0^\infty h(x) x^{-a} \cos(b \log x) d \log x,$$

$$i g_2(b) = -i \int_0^\infty h(x) x^{-a} \sin(b \log x) d \log x.$$

Lorsque l'on multiplie les deux équations par

$$[\cos(b \log y) + i \sin(b \log y)] db,$$

et que l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$, l'on obtient, en vertu du théorème de Fourier, dans les seconds membres des deux équations $\pi h(y)y^{-a}$, et, par conséquent, en ajoutant les deux équations et multipliant par iy^a , on a

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s ds,$$

où l'intégration doit être prise de telle sorte que la partie réelle de s reste constante^[5].

Cette intégrale représente, pour une valeur de y pour laquelle a lieu une variation par saut brusque de la fonction, la valeur moyenne des valeurs de la fonction h de chaque côté du saut. Avec les modes de détermination exposés ci-dessus, la fonction $f(x)$ possède cette même propriété, et l'on a donc, d'une manière générale,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log \zeta(s)}{s} y^s ds$$

On peut maintenant substituer à $\log \zeta$, l'expression trouvée précédemment^[6]

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \prod \frac{s}{2} + \sum_{\alpha} \log \left[1 + \frac{(s - \frac{1}{2})^2}{\alpha^2} \right] + \log \xi(0)$$

Mais les intégrales de chaque terme de cette expression, prises jusqu'à l'infini, ne convergent pas ; il sera donc convenable de transformer l'équation précédente à l'aide d'une intégration par parties en

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \frac{\log \zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

Comme

$$-\log \prod \frac{s}{2} = \lim \left[\sum_{n=1}^{n=m} \log \left(1 + \frac{s}{2n} \right) - \frac{s}{2} \log m \right],$$

pour $m = \infty$, et que, par suite

$$-\frac{d \frac{1}{s} \log \prod \left(\frac{s}{2} \right)}{ds} = \sum_1^{\infty} \frac{d \frac{1}{s} \log \left(1 + \frac{s}{2n} \right)}{ds},$$

tous les termes de l'expression de $f(x)$, à l'exception de

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s^2} \log \xi(0) x^s ds = \log \xi(0),$$

prennent alors la forme

$$\pm \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} x^s ds.$$

Mais on a maintenant

$$\frac{d \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{d\beta} = \frac{1}{(\beta - s)\beta}$$

et, lorsque la partie réelle de s est plus grande que la partie réelle de β ,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^s ds}{(\beta - s)\beta} = \frac{x^\beta}{\beta} = \int_{\infty}^x x^{\beta-1} dx,$$

ou bien

$$= \int_0^x x^{\beta-1} dx,$$

selon que la partie réelle de β est négative ou positive. On a donc, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\log x} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d \left[\frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) \right]}{ds} x^s ds \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{1}{s} \log \left(1 - \frac{s}{\beta} \right) x^s ds \\ &= \int_{\infty}^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const.}, \end{aligned}$$

et, dans le second cas,

$$= \int_0^x \frac{x^{\beta-1}}{\log x} dx + \text{const.}$$

Dans le premier cas, la constante d'intégration peut être déterminée en faisant tendre la partie réelle de β vers l'infini négatif.

Dans le second cas, l'intégrale de 0 à x prend des valeurs qui diffèrent de $2\pi i$, lorsque l'intégrale relative à des valeurs complexes est prise dans le sens positif ou dans le sens négatif, et elle sera, prise dans ce dernier sens, infiniment petite lorsque le coefficient de i dans la valeur de β est égal à l'infiniment grand positif; mais ce fait aura lieu, dans le premier cas, lorsque le coefficient est égal à l'infiniment grand négatif.

Ceci nous enseigne comment $\log(1 - \frac{s}{\beta})$ doit être déterminé dans le premier membre de manière à faire disparaître la constante d'intégration.

En portant ces valeurs dans l'expression de $f(x)$ on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= Li(x) - \sum_{\alpha} \left[Li \left(x^{\frac{1}{2} + \alpha i} \right) + Li \left(x^{\frac{1}{2} - \alpha i} \right) \right] \\ &+ \int_x^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{dx}{x \log x} + \log \xi(0), \end{aligned}$$

[7],[8]

où, dans la série $\sum_{\alpha}$ on donnera à α pour valeurs toutes les racines positives (ou à parties réelles positives) de l'équation $\xi(\alpha) = 0$ en les rangeant par ordre de grandeur. On peut alors, après une discussion plus approfondie de la fonction ξ , démontrer aisément que lorsque les termes sont rangés, comme il est prescrit ci-dessus, dans la série

$$\sum \left[Li \left(x^{\frac{1}{2} + \alpha i} \right) + Li \left(x^{\frac{1}{2} - \alpha i} \right) \right],$$

celle-ci converge vers la même limite que l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{d \frac{1}{s} \sum \log \left[1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2} \right]}{ds} x^s ds,$$

lorsque la grandeur b croît sans limites. Mais, si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle.

A l'aide de $f(x)$ l'on obtient $F(x)$ par inversion de la relation

$$f(x) = \sum \frac{1}{n} F \left(x^{\frac{1}{n}} \right),$$

ce qui donne l'équation

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f \left(x^{\frac{1}{m}} \right),$$

où m doit être remplacé successivement par tous les nombres qui ne sont divisibles par aucun carré excepté 1 et où μ désigne le nombre des facteurs premiers de m .

Si on limite $\sum_{\alpha}$ à un nombre fini de termes, la dérivée de l'expression $f(x)$ c'est-à-dire, abstraction faite d'une partie qui décroît très rapidement lorsque x croît,

$$\frac{1}{\log x} - 2 \sum_{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x},$$

fournit une expression approchée pour la densité des entiers premiers + la moitié de la densité des carrés, + le tiers de celle des cubes, + ... des entiers premiers inférieurs à x .

La formule approchée connue $F(x) = Li(x)$ n'est, par conséquent, exacte qu'aux grandeurs près de l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$ et fournit une valeur un peu trop grande; car les termes non périodiques^[9] dans l'expression de $F(x)$ sont, abstraction faite de grandeurs qui ne croissent pas indéfiniment avec x ,

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \dots$$

Du reste, la comparaison, entreprise par Gauss et Goldschmidt^[10], de $Li(x)$ avec le nombre de nombres premiers inférieurs à x et poursuivie jusqu'à $x =$ trois millions a révélé que ce nombre, à partir de la première centaine de mille, est toujours inférieur à $Li(x)$ et que la différence des valeurs, soumises à maintes oscillations, croît néanmoins toujours avec x ^[11]. Mais la fréquence et la réunion plus dense par endroits des nombres premiers, si l'on peut s'exprimer ainsi, sous l'influence des termes périodiques, avaient déjà attiré l'attention, lors du dénombrement des nombres premiers, sans que l'on eût aperçu la possibilité d'établir une loi à ce sujet.

Il serait intéressant dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $F(x)$ serait obtenue à l'aide de la fonction $f(x)$ qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec $Li(x) + \log \xi(0)$.

Notes

1. Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum*. Bd. 1. Lausanne 1748, p. 221-252, ch. 15 (*De Seriebus ex evolutione Factorum ortis*).

2. [Note du trad.] Ce mode d'existence de la fonction $\zeta(s)$ se reconnaît en se servant de la seconde forme de cette fonction

$$2\zeta(s) = \pi i \prod (-s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{s-2}}{e^x - 1} dx$$

et en remarquant, en outre, que $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$, dans le développement suivant les puissances ascendantes de x , ne contient que des puissances impaires.

3. Riemann se réfère à Carl Gustav Jacob Jacobi, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*. Königsberg 1829, p. 184, § 65, Nr. 6. La formule utilisée n'est pas donnée ici explicitement; Jacobi la déduit à un autre endroit dans *Suite des notices sur les fonctions elliptiques*, in *Journal de Crelle* 3 (1828), p. 303-310.

4. Cette phrase constitue le premier énoncé de "l'hypothèse de Riemann".

5. Note du trad. L'énoncé de ce théorème manque de rigueur. Les deux équations traitées séparément comme il est indiqué, les limites d'intégration $0, \infty$ se rapportant à $\log x$, donnent

$$\pi y^{-\alpha} \left[h(y) \pm h\left(\frac{1}{y}\right) \right],$$

et, par conséquent, fournissent en premier lieu par leur somme la formule du texte.

6. Le manuscrit Lien du Clay Mathematical Institute (p. 4) et les *Gesammelte Werke* (p. 141) introduisent encore un $\sum_{\alpha}$ devant l'avant-dernier logarithme. Dans les *Monatsberichte* le signe somme manque :

$$\frac{s}{2} \log \pi - \log(s-1) - \log \prod \frac{s}{2} + \log \left(1 + \frac{(s - \frac{1}{2})^2}{\alpha \alpha} \right) + \log \xi(0)$$

7. Note HME 1974, p. 31. Riemann écrit $\log \xi(0)$ à la place de $-\log 2$, mais puisqu'il utilise ξ pour noter une fonction différente à savoir la fonction $\xi(\frac{1}{2} + it)$, son $\xi(0)$ dénote $\xi(\frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2}$. Cette erreur a été détectée

du vivant de Riemann par Angelo Genocchi (1817-1889), *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite*, in *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 3 (1860), p. 52-59.

8. Note du trad. La fonction $Li(x)$ doit être définie pour les valeurs réelles de x qui sont plus grandes que 1 par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\log x} \pm \pi i$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou bien le signe inférieur, selon que l'intégration est prise relativement à des valeurs complexes dans le sens positif ou bien dans le sens négatif. De là l'on déduit aisément le développement donné par Scheibner (*Schlömilch's Zeitschrift*, t. V)

$$Li(x) = \log \log x - \Gamma'(1) + \sum_{1,\infty}^x \frac{(\log x)^n}{n.n!},$$

qui est valable pour toutes les valeurs de x , et présente une discontinuité pour les valeurs réelles négatives (comparer la correspondance entre Gauss et Bessel).

Si l'on poursuit le calcul indiqué par Riemann, on trouve dans la formule $\log \frac{1}{2}$ au lieu de $\log \xi(0)$. Il est très possible que ceci ne soit qu'un *lapsus calami*, ou une faute d'impression, $\log \xi(0)$ au lieu de $\log \zeta(0)$; en effet, $\log \zeta(0) = \frac{1}{2}$.

9. Note H.M.E. En toute rigueur, les termes $Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})$ ne sont pas périodiques mais oscillatoires.

10. Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt (1807-1851), un élève de Gauss.

11. Lettre de Carl Friedrich Gauss à Johann Franz Encke (1791-1865) du 24 décembre 1849.



$$\exp(\text{li}(\kappa.t.i.o(n))).\exp(e^{\partial i.t.i^{ve}})$$



Les zéros de zêta ne peuvent pas être ailleurs que sur la droite critique parce que sinon, admettons qu'il y en ait à peine 2 qui ne soient pas sur la droite des nombres de partie réelle $\frac{1}{2}$, que l'un soit de la forme $\rho = \alpha + \beta i$ et que son conjugué soit de la forme $\alpha - \beta i$, quand, dans la formule de Riemann

$$f(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} (\text{Li}(x^{\rho}) + \text{Li}(x^{\bar{\rho}})) + \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2 - 1)\ln u} - \ln 2,$$

on ajouterait les logarithmes intégrals de ces 2 zéros conjugués, alors que lorsque les zéros appartiennent bien à la droite critique, les parties imaginaires s'annulent entraînant l'ajout seulement du double de la partie réelle commune aux deux zéros, là, pour ces deux zéros hors droite critique, on obtiendrait comme valeur de la somme des logarithmes intégrals de ces deux complexes un nombre complexe, et alors on serait obligé de conclure par une phrase du style "jusqu'à 3 000 456 278, il y a 5 678 + 8 528i nombres premiers, ce qui, on l'avouera, ne veut strictement rien dire". Nous ne voyons pas d'autre explication...



On essaie d'interpréter géométriquement la formulation littérale de la fonction ζ de Riemann qui est :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^s$$

Cette somme est une somme de nombres complexes. A chacun de ces nombres complexes est associé un point du plan complexe. On peut voir la somme comme une spirale brisée qui à l'infini s'enroulerait autour d'un point du plan complexe à déterminer.

L'hypothèse de Riemann correspondrait alors au fait que seules les racines carrées des entiers successifs seraient admissibles aux dénominateurs pour calculer les longueurs des côtés successifs de la spirale mais que toute autre sorte de longueurs ne permettrait pas que la spirale finisse par aboutir au point origine.

Les angles de rotation $\theta, \theta', \theta''$ qui séparent deux côtés successifs de la spirale sont tous différents : quand on écrit littéralement la somme $\zeta(s)$ avec $s = a + ib$, on obtient

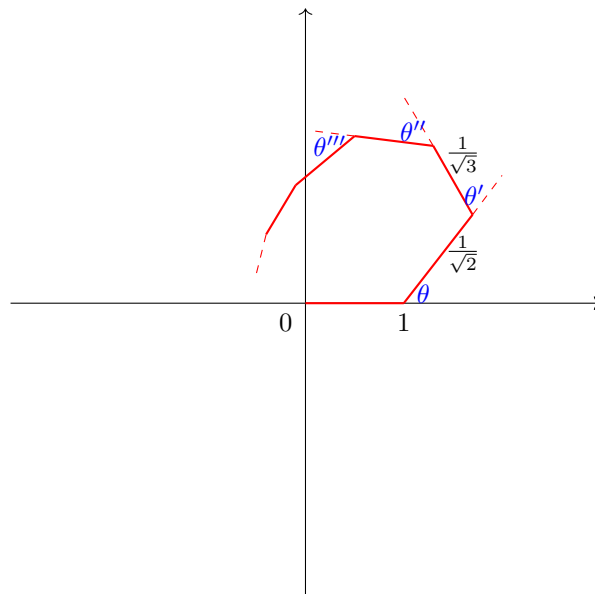
$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^a e^{-ib \ln 2} + \left(\frac{1}{3}\right)^a e^{-ib \ln 3} + \left(\frac{1}{4}\right)^a e^{-ib \ln 4} + \dots$$

Les deux premiers points de la spirale sont $z = 0$ et $z = 1$.

Dans le cas où $a = \frac{1}{2}$, les côtés successifs de la spirale brisée ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots$

Dans le cas où $a = \frac{1}{3}$ par exemple, les côtés successifs de la spirale brisée ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \dots$

Les transformations qui permettent d'obtenir un côté de la spirale à partir du côté précédent (une translation, une homothétie et une rotation) ne commutent pas et doivent être effectuées dans l'ordre énoncé.



Pour les complexes appartenant à la droite critique (i.e. qui ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$), on peut voir les longueurs des côtés de la spirale de la forme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ comme les longueurs d'hypothénuses de triangles rectangles d'autres côtés de longueurs 1 et $\frac{1}{\sqrt{n-1}}$. Les seules longueurs admissibles pour les côtés successifs de la spirale seraient selon l'hypothèse les inverses des racines carrées des entiers successifs. Il faudrait identifier une propriété que seuls auraient les inverses des racines carrées et que n'auraient pas toute autre sorte de nombres, et qui aurait pour conséquence que les zéros de ζ ne pourraient qu'appartenir à la droite critique.

Il me semble qu'il faut se focaliser sur la notion de racine carrée comme ayant une propriété spécifique et négliger les angles car je crois que ces angles étant en nombre infini, on peut trouver pour chacun d'eux son complémentaire au tour complet, ce qui permet de toujours pouvoir "se ramener à" l'orientation de l'axe des réels.

On étudie une spirale du plan cartésien dont les coordonnées des sommets sont définis par la suite :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - x_{n-1} \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n + \lambda_n \cos \theta_n x_n - \lambda_n \cos \theta_n x_{n-1} - \lambda_n \sin \theta_n y_n + \lambda_n \sin \theta_n y_{n-1} \\ y_n + \lambda_n \sin \theta_n x_n - \lambda_n \sin \theta_n x_{n-1} + \lambda_n \cos \theta_n y_n - \lambda_n \cos \theta_n y_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut aussi écrire la suite des coordonnées en utilisant des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ et une matrice 4×4 pour la transformation.

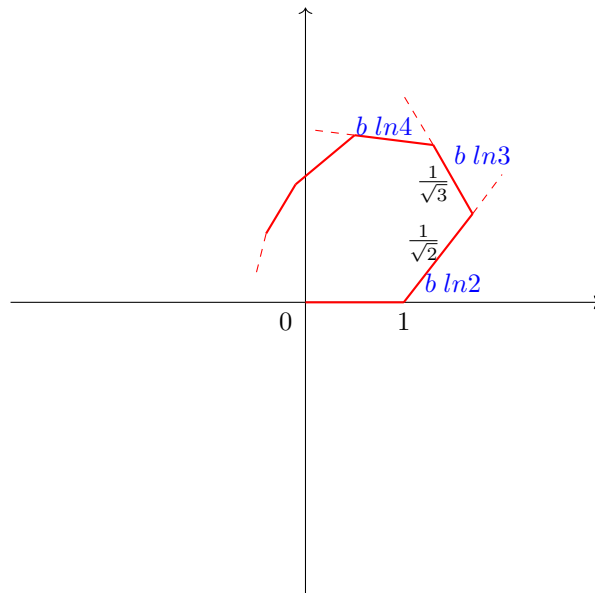
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_n \cos \theta_n & -\lambda_n \sin \theta_n & -\lambda_n \cos \theta_n & \lambda_n \sin \theta_n \\ \lambda_n \sin \theta_n & 1 + \lambda_n \cos \theta_n & -\lambda_n \sin \theta_n & -\lambda_n \cos \theta_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les angles de rotation $\theta, \theta', \theta''$ qui séparent deux côtés successifs de la spirale sont tous différents : quand on écrit littéralement la somme $\zeta(s)$ avec $s = a + ib$, on obtient

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^a e^{-ib \ln 2} + \left(\frac{1}{3}\right)^a e^{-ib \ln 3} + \left(\frac{1}{4}\right)^a e^{-ib \ln 4} + \dots$$

Les deux premiers points de la spirale sont $z = 0$ et $z = 1$.

Dans le cas où $a = \frac{1}{2}$, les côtés successifs de la spirale brisée ont pour longueur $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \dots$ (sur le dessin ci-dessous, on a bêtement mis les angles dans le sens anti-horaire, ça correspond à des $+ib \dots$ comme puissances des e dans la formule ci-dessus plutôt que des $-ib$, c'est sans importance car l'axe des abscisses est axe de symétrie de ζ). Les λ_n (coefficients réducteurs pour passer de la longueur d'un côté à la longueur du côté suivant de la spirale) sont de la forme $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$.



Au départ, on était plutôt parti sur une décomposition en trois opérations successives, une translation, une homothétie puis une rotation codées par les matrices de transformation ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 2x_{n+1} - x_n \\ 2y_{n+1} - y_n \end{pmatrix}$$

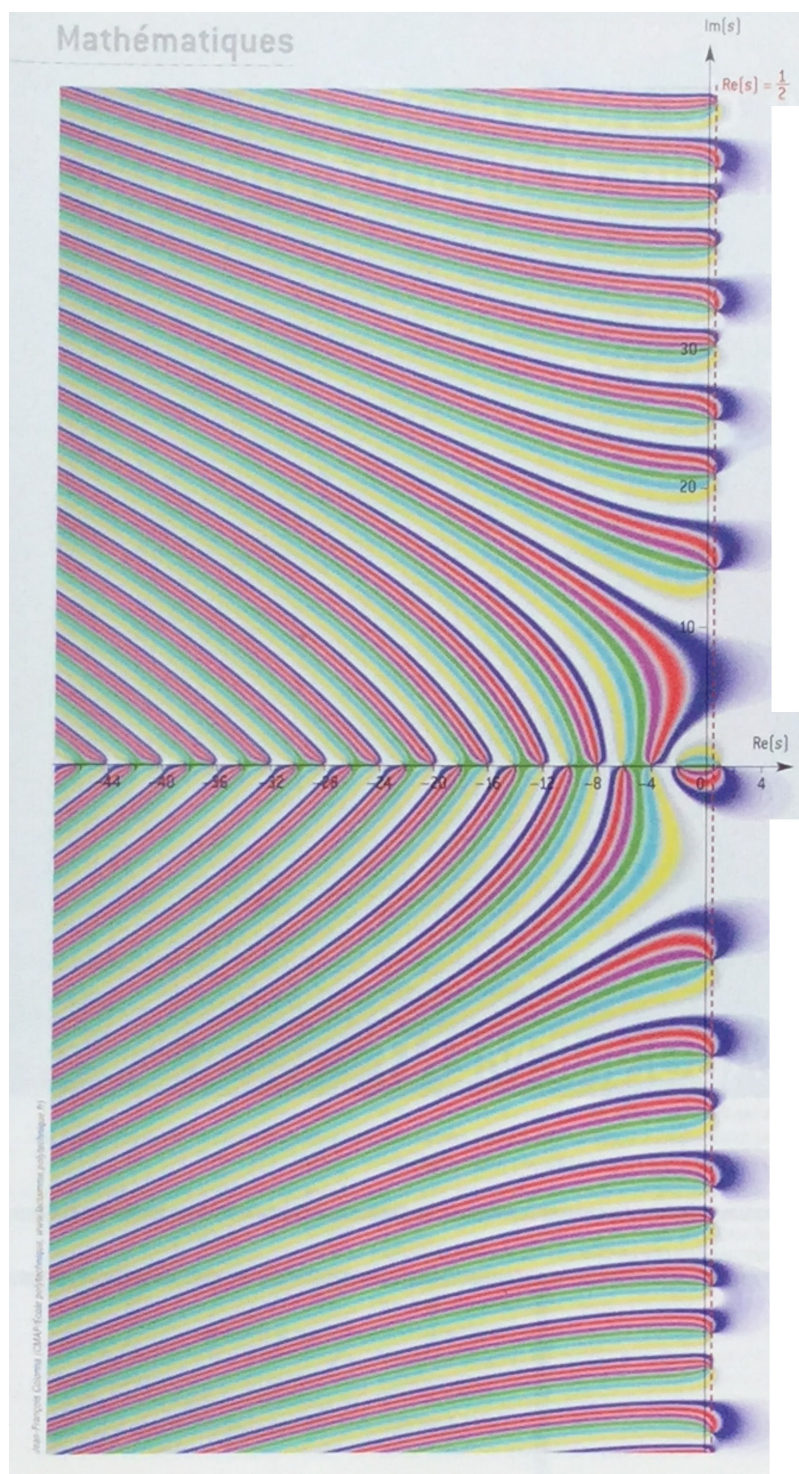
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (1-\lambda_n) & 0 & \lambda_n & 0 \\ 0 & (1-\lambda_n) & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_n \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ x_n + \lambda_n x_{n+1} - \lambda_n x_n \\ y_n + \lambda_n y_{n+1} - \lambda_n y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_n \\ x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ \cos \theta x_{n+1} - \sin \theta y_{n+1} \\ \sin \theta x_{n+1} + \cos \theta y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Arc tangente (Denise Vella-Chemla, 18.6.2017)

On essaie, lentement, de se familiariser avec les images représentant la fonction zêta de Riemann dans le plan complexe. En particulier, il y a deux images : l'une en couleur, l'autre bicolore de forme spirale.

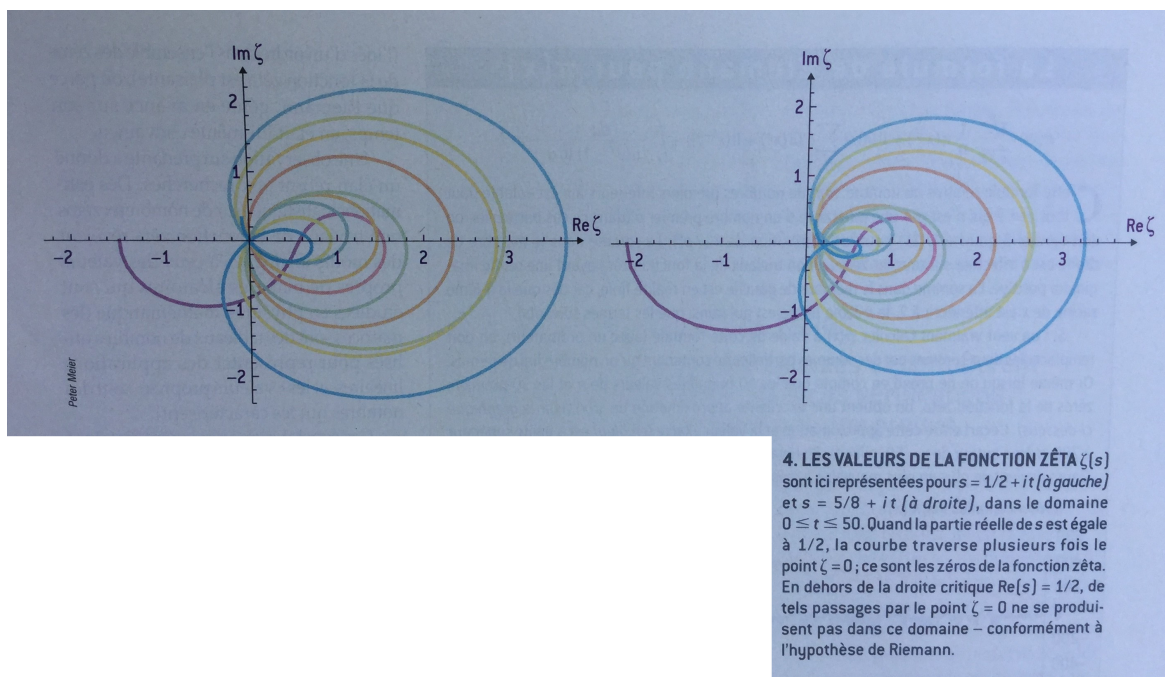
La représentation colorée de la fonction zêta permet de représenter pour chaque point antécédent complexe $a + ib$ à 2 coordonnées (a, b) une image complexe à deux coordonnées également $a' + ib'$. Comme on ne peut le faire, le $a' + ib'$ est représenté par une couleur que l'on obtient dans un disque palette, l'angle de parcours de ce disque (la coordonnée angulaire) permettant de passer subtilement d'une couleur à l'autre et la distance au centre du disque (coordonnée radiale) fournissant l'intensité de la couleur utilisée¹.



Il est très bien expliqué dans un article du magazine Pour la Science (n°377, mars 2009) de Peter Meier et

¹cf <https://en.wikipedia.org/wiki/Hue>

Jörn Steuding que si l'on parcourt verticalement une droite dans la représentation colorée, on se promène en quelque sorte sur une spirale du plan complexe qui peut passer périodiquement par le point origine (zéro) ou bien ne jamais y passer (la spirale est alors décalée vers la droite).



Ceci étudié, on a l'idée de calculer par la fonction arc-tangente l'angle associé aux zéros de la fonction zêta de Riemann.

Les valeurs des parties imaginaires des zéros sont trouvable sur la toile.

Par exemple, ici : <http://lmfdb.org/zeros/zeta/?limit=100000N=1>.

On utilise pour calculer les arcs-tangentes pour les zéros de zêta le programme ci-dessous : le côté opposé de l'angle est la partie imaginaire du zéro, le côté adjacent vaut $\frac{1}{2}$, il s'agit donc de calculer l'arc tangente de $2\mathcal{I}(z)$ pour z parcourant les valeurs du fichier.

```

1  #include <iostream>
2  #include <stdio.h>
3  #include <cmath>
4  #include <fstream>
5
6  int main (int argc, char* argv[])
7  { int i, np ;
8    float zeros[100005] ;
9
10   std::ifstream fichier("leszeros", std::ios::in);
11   if (fichier)
12   {
13     int entier1 ;
14     float entier2 ;
15
16     while (not fichier.eof()) {
17       fichier >> entier1 >> entier2 ;
18       zeros[entier1] = entier2 ;
19     }
20     fichier.close();
21   }
22   else std::cerr << "Impossible d'ouvrir le fichier !" << std::endl ;
23   for (i = 1 ; i <= 100000 ; ++i) std::cout << i << " -> " << atan(2.0*zeros[i]) << "\n" ;
24 }
```

On trouve sur la toile ici https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_dMachin quatre égalités surprenantes concernant certaines valeurs de la fonction arc-tangente :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} \quad (\text{découverte par Machin en 1706})$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \quad (\text{découverte par Euler en 1706})$$

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7} \quad (\text{découverte par Herman en 1706})$$

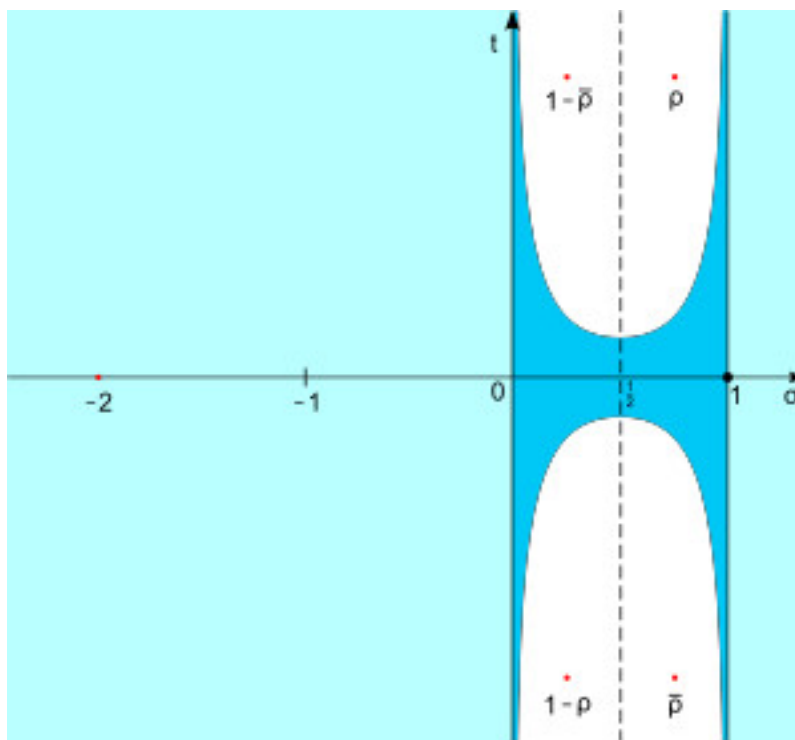
$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} \quad (\text{découverte par Hutton en 1776}).$$

Pour 100000 zéros, à partir de la partie imaginaire du 55204^{ème} zéro, on atteint la valeur 1.57079 sur laquelle le programme se stabilise. En effet, la limite de la fonction $\arctan(x)$ est $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Si on considère que les couples de “couleurs complémentaires” sont (bleu, blanc), (rouge, jaune), (turquoise, violet) et (vert, vert), on constate une symétrie colorée entre points correspondant à des nombres complexes conjugués (qui doit peut-être correspondre au fait que l’image du conjugué d’un complexe est le conjugué de son image (si $\zeta(a + ib) = c + id$ alors $\zeta(a - ib) = c - id$). On notera que, bizarrement, les couleurs de l’arc-en-ciel ne sont pas dans l’ordre quand on “chemine” (par exemple verticalement).

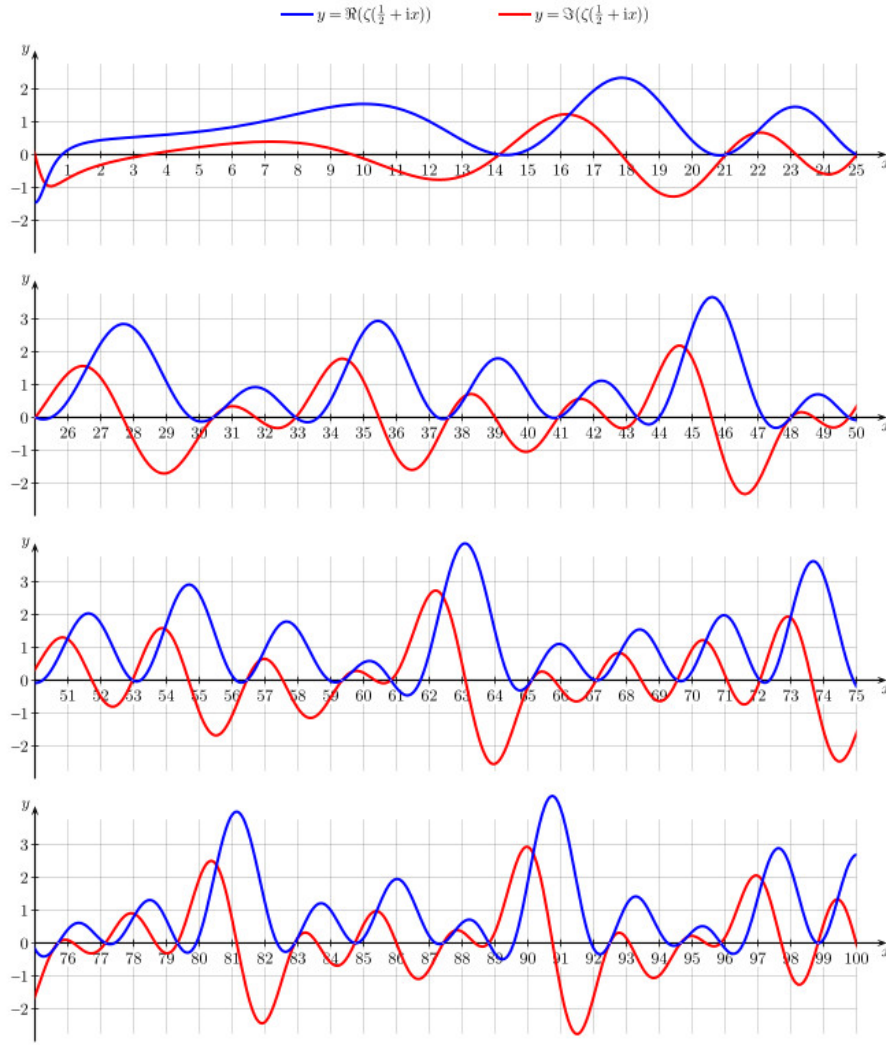
Enfin, deux graphiques à mémoriser, trouvés sur l’article de wikipedia concernant la fonction zêta de Riemann :

- le premier concernant les valeurs symétriques que prend la fonction zêta sur un complexe ρ , son conjugué $\bar{\rho}$, $1 - \rho$ et $1 - \bar{\rho}$;



On a $\rho = a + ib, \bar{\rho} = a - ib, 1 - \bar{\rho} = (1 - a) + ib$ et $1 - \rho = 1 - (a + ib) = (1 - a) - ib = \overline{(1 - \bar{\rho})}$;

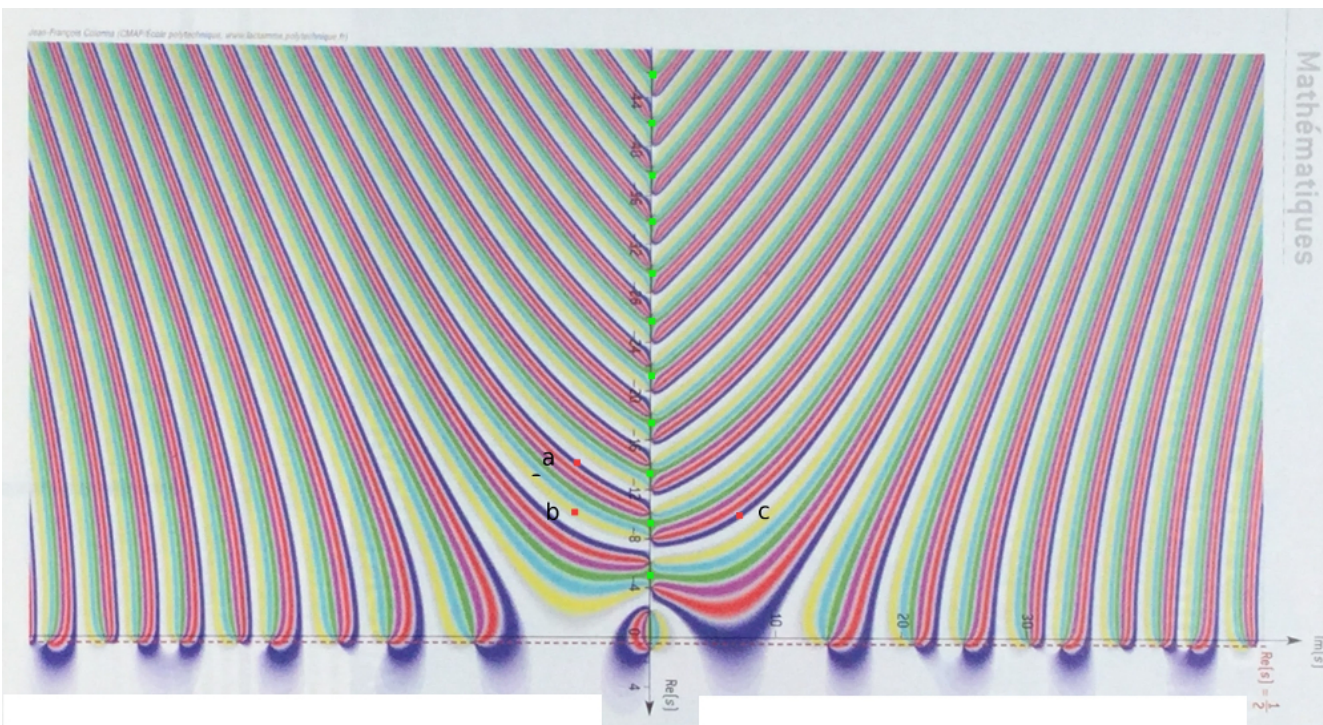
- le second montrant séparément les parties réelles et imaginaires des complexes le long de la droite critique ; la courbe rouge ressemble étrangement à la courbe bleue qu’on aurait décalée vers le bas et la gauche, en l’écrasant à moitié (au dessus de l’axe des abscisses, la courbe rouge semble systématiquement croiser la courbe bleue à la moitié des hauteurs des pics). Il faut aussi trouver un moyen d’aligner horizontalement ses minima.



A la recherche d'une transformation de la représentation graphique colorée de la fonction zêta, on voit qu'il faudrait peut-être considérer plein de petites symétries centrales à appliquer sur des portions du graphique, autour des points marqués de petits carrés verts ci-dessous, avec une inversion des couleurs, que l'on schématise par le passage du point a au point b au point c . Cette transformation s'applique sur l'axe de partie réelle $\frac{1}{2}$ pour lequel la symétrie s'effectue par rapport au point origine.

Pour avoir à l'esprit des réels plutôt que des complexes, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ ainsi : si r est la partie imaginaire d'un nombre complexe annulant zêta,

$$\begin{aligned}
 z(r) &= 1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}+ri}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}+ri}} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}(\cos(r \ln 2) + i \sin(r \ln 2))} + \frac{1}{\sqrt{3}(\cos(r \ln 3) + i \sin(r \ln 3))} + \dots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(r \ln n) - i \sin(r \ln n)}{\sqrt{n}}
 \end{aligned}$$



La configuration de la représentation colorée ainsi que les positions des ρ et $1 - \bar{\rho}$ autour de la droite critique dans la figure à dominante turquoise plus haut nous amène à la réflexion suivante : admettons qu'on ait deux zéros (puisqu'ils vont par 2) qui "tombent" hors de la droite, par exemple $1/4 + ai$ et $3/4 + ai$, pour que la fonction ζ s'annule, si ρ est l'angle correspondant à a , les dénominateurs identiques des formules fournies de $z(a)$ pour ces points doivent être nuls (les $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\rho \ln n) - i \sin(\rho \ln n)$ vus plus haut, les dénominateurs valant $\sqrt[4]{n}$ pour le point $1/4 + ai$ et $\sqrt[4]{n^3}$ pour le point $3/4 + ai$).

Mais alors, en prenant de manière dichotomique un troisième zéro entre les 2 premiers (ou plutôt deux autres zéros plus proches de la droite autour d'elle), on peut restreindre l'intervalle sur lequel l'annulation est forcée d'avoir lieu. On réitère le procédé de fois en fois de façon dichotomique et on voit alors la droite critique comme la limite sur laquelle les zéros doivent fatalement se trouver, les points extrémités de l'intervalle ayant pour partie réelle des $\frac{1}{2} + \varepsilon$ et $\frac{1}{2} - \varepsilon$, avec ε qui tend vers zéro. Ce raisonnement fait penser à une descente infinie de Fermat mais contrairement à elle, il ne permet pas d'aboutir à une contradiction car la descente infinie a lieu sur des réels et non sur des entiers.

Ci-dessous, deux illustrations :

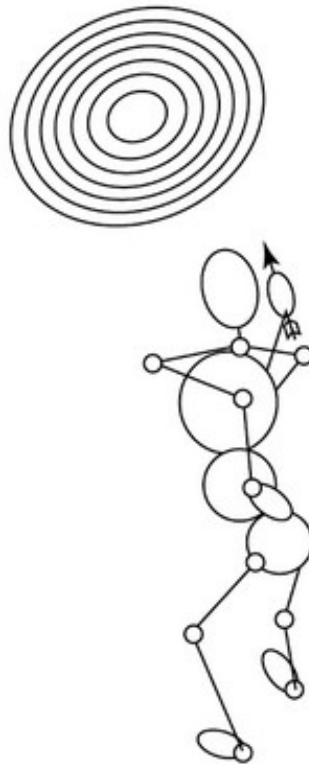
- la photo est la propriété de Jean-François Dars ; on peut la regarder à cette adresse : <http://www.savoirs.essonne.fr/sections/ressources/photos/photo/michael-atyah-et-alain-connes/> ainsi que dans le livre Les déchiffreurs [3] ; le geste des doigts illustre bien l'idée d'élément infinitésimal de distance ;
- la seconde illustration peut être trouvée dans des articles (dont on fournit les références en bibliographie) dans lesquels Alain Connes fournit sa vision des infinitésimaux.

On peut relier, de loin, cette idée de droite-critique-limite au paradoxe de Zénon d'une part (les zéros s'en approcheraient infiniment mais on n'arriverait pas à prouver qu'ils lui appartiennent) ; cela nous fait également penser à une anecdote vécue en enseignant à des élèves de niveau élémentaire : on peut jouer avec eux à "devine mon nombre", dès que sont abordés les décimaux, et ils comprennent vite grâce à ce jeu qu'entre deux nombres, on peut toujours en intercaler un troisième. Pour des élèves petits, il n'y a pas de nombre entre 4 et 5, dans la mesure où ils ont en tête la suite numérique ; plus tard, entre 13,4 et 13,5, transposant leur raisonnement initial, certains pensent qu'il n'y a pas de nombre non plus. Le jeu consiste pour les élèves à poser à l'enseignant des questions fermées : "le nombre est-il plus grand (ou plus petit) que tant ?" pour tenter de deviner le nombre que l'enseignante a choisi. Le fait pour l'enseignant

de “tricher” en ajoutant des décimales leur fait petit à petit comprendre que de même que la suite des nombres est infinie, entre 2 nombres, il y a une infinité de nombres.



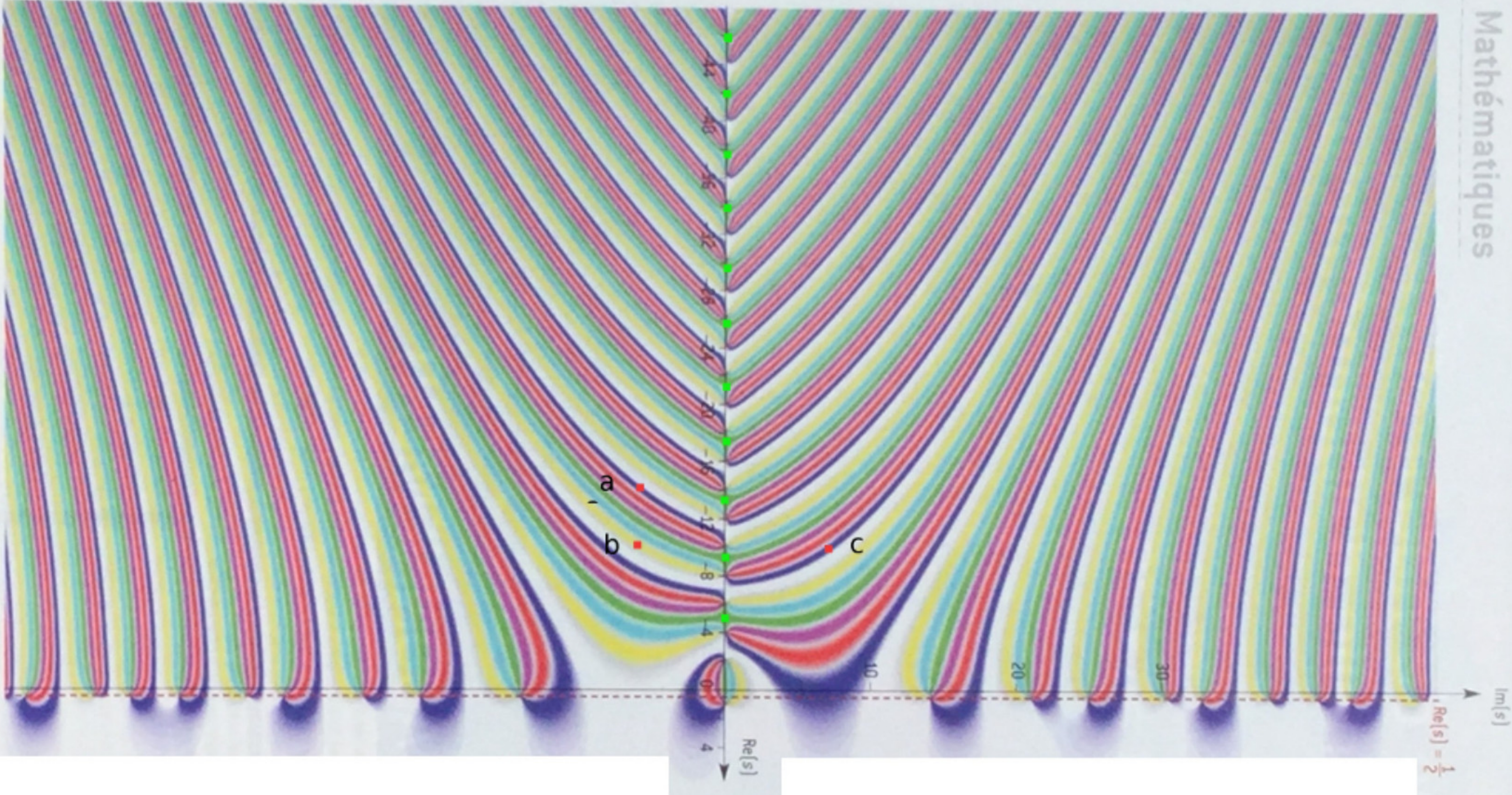
You play a game of throwing darts at some target called Ω



and the question which is asked is: what is the probability $dp(x)$ that actually when you throw the **dart** it lands exactly at a given point $x \in \Omega$?

Bibliographie

- [1] Noncommutative geometry and reality, Journal of mathematical physics, 36, p.6194, (1995).
- [2] Visions in mathematics : GAFA (Geometrical Functional Analysis) 2000, Special Volume, part II, p.506, édité par Noga Alon, Jean Bourgain, Alain Connes, Mikhaïl Gromov, Vitali D. Milman.
- [3] Les déchiffreurs, voyage en mathématiques, Jean-François Dars, Annick Lesne, Anne Papillault, Belin, 2008.



Proposer une autre formule de calcul du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné (Denise Vella-Chemla, 1.7.2017)

On voudrait ici proposer une formule légèrement différente de celle que Bernhard Riemann a élaborée pour compter le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné.

Bien que moins performante que la formule de Riemann, le but de cette nouvelle formule, basée sur une idée de Gauss, pourrait être de faciliter l'appréhension des processus à l'oeuvre dans les petites fluctuations qui interviennent pour le calcul des nombres de nombres premiers, pour le calcul des ratios aux logarithmes, ou bien pour le calcul des tailles des différents intervalles qui sont utilisés dans l'article que Riemann a consacré à la fonction $\pi(x)$.

On ne s'intéresse ici qu'aux formules suivantes de l'article de Riemann, soit que ces formules possèdent une propriété de symétrie, soit qu'elles permettent (c'est le cas pour la dernière) d'obtenir une formule exacte de décompte des nombres premiers. Il est dit que la volonté d'obtenir une formule exacte était l'une des motivations de Riemann lorsqu'il a écrit l'article qui énonce sa célèbre hypothèse.

- 1) $f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots$
- 2) $\pi(x) = \frac{\mu(2)}{2}f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\mu(3)}{3}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{\mu(4)}{4}f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{\mu(5)}{5}f\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots = \sum \frac{\mu(k)}{k}f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$
- 3) $\pi(x) = Li(x) + \frac{\mu(2)}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\mu(3)}{3}Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{\mu(4)}{4}Li\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{\mu(5)}{5}Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots = \sum \frac{\mu(k)}{k}Li\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$
- 4) $f(x) = Li(x) - \sum_{\rho} (Li(x^{\rho}) + Li(x^{\bar{\rho}})) + \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2-1)\ln u} - \ln 2 + \pi i$
(avec $\rho = \frac{1}{2} + \alpha i$ et $\bar{\rho} = \frac{1}{2} - \alpha i$)

Les formules 2) et 3) utilisent la fonction de Moebius qui a comme propriété de permettre d'inverser certains calculs (par l'inversion de Moebius), i.e. elle permet d'obtenir l'image par une fonction d'un nombre en agréant les images de ses diviseurs. La fonction de Moebius "élimine les carrés" et compte la parité du nombre de diviseurs des produits purs (elle vaut -1 pour les nombres produits purs d'un nombre impair de diviseurs (ex : $30 = 2.3.5$ a 3 diviseurs) et 1 pour les nombres produits purs d'un nombre pair de diviseurs (ex : $210 = 2.3.5.7$ a 4 diviseurs)). La fonction de Moebius "équilibre" à peu près les ajouts et les soustractions (jusqu'à 10 racines, 4 signes - pour 2 signes +, jusqu'à 100, 30 signes + et 30 signes - à égalité, jusqu'à 1000, 304 signes + pour 303 signes -, jusqu'à 10000, 3029 signes + pour 3053 signes -, jusqu'à 10^5 , 30372 signes + pour 30421 signes -, etc.).

A la place de la formule de Moebius, on propose de compter, comme Gauss le préconise dans le chapitre des Recherches arithmétiques consacré à la loi de réciprocité quadratique, la parité du nombre de facteurs de la forme $4k-1$ intervenant dans les factorisations des nombres et de remplacer les valeurs fournies par la fonction de Moebius par celles fournies par ce nouveau comptage. On appelle le résultat de notre fonction $D(x)$.

$$D(x) = \pi(x) + \sum_k \frac{4k \text{ moins } 1(k)}{k} \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\log\left(x^{\frac{1}{k}}\right)}.$$

On peut calculer les résultats obtenus pour cette nouvelle formule par le programme ci-après.

Ce programme n'est pas efficace du tout. De plus, on a mal initialisé le cumul : il aurait fallu l'initialiser à $\frac{x}{\log(x)}$ plutôt qu'à $\pi(x)$. Toujours est-il que la différence entre la valeur finale de $D(x)$ et $\pi(x)$ est tout de même suffisamment petite pour présenter un intérêt ($D(x) - \pi(x) = 58$ pour 80 000). Il faudrait comprendre comment les différentes variables évoluent en analysant les premières valeurs (pour x jusqu'à 100). Il faudrait sûrement réfléchir dans une direction qui considère qu'un $4n+1$ peut être mis sous la forme $(-2\sqrt{n}+i)(-2\sqrt{n}-i)$ (les deux facteurs du produit étant deux points conjugués du plan complexe situés de part et d'autre du point réel $-2\sqrt{n}$, l'un en haut, l'autre en bas, sur la droite des complexes de partie réelle $-2\sqrt{n}$) tandis qu'un nombre de la forme $4n-1$ peut être mis sous la forme $(-2\sqrt{n}+1)(-2\sqrt{n}-1)$ (les deux facteurs étant deux réels situés de part et d'autre à distance 1 d'un zéro trivial). Mais ces idées sont pour l'instant trop spéculatives pour pouvoir être exploitées.

```

1  #include <iostream>
2  #include <stdio.h>
3  #include <stdlib.h>
4  #include <math.h>
5  #include <cmath>
6
7  int tabfacteurs[1000005], tabpuiss[1000005], tabexpo[1000005], tabcpte4kmoins1[1000005] ;
8
9  int prime(int atester) {
10     bool pastrouve=true;
11     unsigned long k = 2;
12     if (atester == 1) return 0;
13     if (atester == 2) return 1;
14     if (atester == 3) return 1;
15     if (atester == 5) return 1;
16     if (atester == 7) return 1;
17     while (pastrouve) {
18         if ((k * k) > atester) return 1;
19         else if ((atester % k) == 0) {
20             return 0 ;
21         }
22         else k++;
23     }
24 }
25
26 int arrondi(float nombre) {
27     return nombre + 0.5;
28 }
29
30 int main(int argc, char **argv) {
31     int x, k, i, d, pix, p, nbdiv, tempo, expo ;
32     float res, cumul ;
33     int compte4kmoins1 ;
34
35     compte4kmoins1 = 1 ;
36     for (i = 1 ; i <= 1000000 ; ++i) {
37         std::cout << "\n" << i << " -> " ;
38         tabfacteurs[i] = 1 ;
39         tabpuiss[i] = 1 ;
40         tabexpo[i] = 1 ;
41         tempo = i ;
42         p = i/2 ;
43         nbdiv = 1 ;
44         if (prime(tempo)) {
45             tabfacteurs[1] = tempo ;
46             tabpuiss[1] = tempo ;
47             tabexpo[1] = 1 ;
48         }
49         else while ((tempo > 1) && (p > 1)) {
50             if ((prime(p)) && ((tempo%p) == 0)) {
51                 tabfacteurs[nbdiv] = p ;
52                 nbdiv = nbdiv+1 ;
53                 tempo = tempo/p ;
54             }
55             p=p-1 ;
56         }

```

```

1  if (not(prime(i))) nbdiv=nbdiv-1 ;
2  if ((nbdiv == 1) && (prime(i))) {
3      tabpuiss[1] = i ;
4      tabexpo[1] = 1 ;
5  }
6  else if ((nbdiv == 1) && (not(prime(i)))) {
7      tempo = tabfacteurs[1] ;
8      tabpuiss[1] = i ;
9      expo = 1 ;
10     while (tempo < i) {
11         tempo=tempo*tabfacteurs[1] ;
12         expo = expo+1 ;
13     }
14     tabexpo[1] = expo ;
15 }
16 else if (nbdiv > 1) {
17     for (k = 1 ; k <= nbdiv ; ++k){
18         tempo = tabfacteurs[k] ;
19         expo = 1 ;
20         while (((i % tempo) == 0) && (tempo < i)) {
21             tempo=tempo*tabfacteurs[k] ;
22             expo = expo+1 ;
23         }
24         tabpuiss[k] = tempo/tabfacteurs[k] ;
25         tabexpo[k] = expo-1 ;
26     }
27 }
28 for (k = 1 ; k <= nbdiv ; ++k) {
29     std::cout << tabfacteurs[k] << "^" ;
30     std::cout << tabexpo[k] << "." ;
31     if ((tabfacteurs[k] % 4) == 3)
32     if ((tabexpo[k] % 2) == 1)
33         compte4kmoins1 = compte4kmoins1 * (-1) ;
34 }
35 tabcpte4kmoins1[i] = compte4kmoins1 ;
36 }
37 std::cout << "\n" ;
38 for (x = 2 ; x <= 1000000 ; ++x) {
39     std::cout << x << " --> " ;
40     pix = 0 ;
41     for (i = 2 ; i <= x ; ++i) if (prime(i)) pix = pix+1 ;
42     std::cout << "pi("<< x << ")=" << pix ;
43     std::cout << "   compte4kmoins1 " << tabcpte4kmoins1[x] << "\n" ;
44
45     cumul = (float) pix ;
46     for (k = 2 ; k <= sqrt(x) ; ++k) {
47         res = pow(x,1./k) ;
48         cumul = cumul+(tabcpte4kmoins1[k]/(float) k)*(res/log(res)) ;
49     }
50     std::cout << "res final " << arrondi(cumul) << "\n\n" ;
51 }
52 }

```

Le tableau ci-dessous fournit les différences entre le nombre calculé par la fonction proposée ici $D(x)$ et la valeur effective de $\pi(x)$. Il fournit également les différences entre la fonction $Li(x)$ et la fonction $\pi(x)$. Pour 10^6 , on voit que l'estimation la plus juste proposée par Riemann ($R(x)$) est bien meilleure que l'approximation proposée ici (30 (valeur trouvée dans la littérature) $\ll$ 60). En ce qui concerne le calcul de la formule 3), il n'est qu'approximatif : on a approximé les logarithmes intégraux en faisant calculer par Python les logarithmes intégraux de nombres entiers jusqu'à 1000000. Malgré cela, la formule 3) est la meilleure. Ne disposant pas d'un logiciel de calcul formel permettant de calculer les logarithmes intégraux, on ne peut pas pour l'instant voir l'efficacité de la formule 4).

x	$\pi(x)$	$Li(x)$	$Li(x) - \pi(x)$	$D(x)$	$D(x) - \pi(x)$	<i>formule 1</i>	<i>formule 3</i>
500	95	101	6	95	0	101	94
1 000	168	177	9	168	0	176	168
2 000	303	314	11	304	1	313	303
5 000	669	684	15	672	3	683	669
10 000	1 229	1 245	16	1 235	6	1 247	1 227
20 000	2 262	2 288	26	2 271	9	2 285	2 264
50 000	5 133	5 165	33	5 149	16	5 164	5 133
100 000	9 592	9 629	37	9 614	22	9 633	9 587
200 000	17 984	18 035	51	18 014	30	18 037	17 981
500 000	41 638	41 606	32	41 584	46	41 614	41 529
995 907	78 262	78 332	70	78 199	63	78 298	78 231
1 000 000	78 498	78 627	130	78 558	60	78 726	78 528
10 000 000	664 579	664 917	338			664 829	664 668
100 000 000	5 761 455	5 762 208	753			5 761 554	5 761 551
1 000 000 000	50 847 534	50 849 233	1 699			50 847 633	50 847 455

Ci-dessous, le tableau des écarts à $\pi(x)$, plus parlant :

x	$\pi(x)$	$D(x) - \pi(x)$	<i>formule 1</i> $ - \pi(x)$	<i>formule 3</i> $ - \pi(x)$
500	95	0	6	1
1 000	168	0	8	0
2 000	303	1	10	0
5 000	669	3	14	0
10 000	1 229	6	18	2
20 000	2 262	9	23	2
50 000	5 133	16	31	0
100 000	9 592	22	41	5
200 000	17 984	30	53	3
500 000	41 638	-46	-24	9
995 907	78 262	-63	36	31
1 000 000	78 498	60	228	30
10 000 000	664 579		250	89
100 000 000	5 761 455		99	96
1 000 000 000	50 847 534		99	79

En annexe sont fournies les valeurs calculées au fur et à mesure de l'application des formules 1 et 3 pour le nombre 995907, on voit bien les fluctuations autour de la valeur finalement atteinte.

Fournissons les valeurs qui ont été calculées pour estimer $D(1\,000\,000) = \pi(10^6) + \sum_k \frac{4k\text{moins}1(k)}{k} \frac{x^{\frac{1}{k}}}{\log\left(x^{\frac{1}{k}}\right)}$ et

qui font intervenir les racines n-ièmes de 1000000 (les racines n-ièmes au-delà de la 20^{ème} sont trop petites (i.e.

inférieures strictement à 2, $\sqrt[20]{1\,000\,000} = 1.99526$), leur $\pi(k)$ est nul, elles n'ont pas à être prises en compte :

$\frac{1}{2} \frac{1000}{\log(1000)}$	72.3824	$\frac{1}{11} \frac{3.51119}{\log(3.51119)}$	0.254149
$\frac{-1}{3} \frac{100}{\log(100)}$	-7.23824	$\frac{-1}{12} \frac{3.16228}{\log(3.16228)}$	-0.228893
$\frac{-1}{4} \frac{31.6228}{\log(31.6228)}$	-2.28893	$\frac{-1}{13} \frac{2.89427}{\log(2.89427)}$	-0.209494
$\frac{-1}{5} \frac{15.8429}{\log(15.8429)}$	-1.14718	$\frac{1}{14} \frac{2.6827}{\log(2.6827)}$	0.19418
$\frac{1}{6} \frac{10}{\log(10)}$	0.723824	$\frac{-1}{15} \frac{2.51189}{\log(2.51189)}$	-0.181816
$\frac{-1}{7} \frac{7.19686}{\log(7.19686)}$	-0.520926	$\frac{-1}{16} \frac{2.37137}{\log(2.37137)}$	-0.171646
$\frac{-1}{8} \frac{5.62341}{\log(5.62341)}$	-0.407036	$\frac{-1}{17} \frac{2.25393}{\log(2.25393)}$	-0.163145
$\frac{-1}{9} \frac{4.64159}{\log(4.64159)}$	-0.335969	$\frac{-1}{18} \frac{2.15443}{\log(2.15443)}$	-0.155943
$\frac{-1}{10} \frac{3.98107}{\log(3.98107)}$	-0.28816	$\frac{1}{19} \frac{2.06914}{\log(2.06914)}$	0.149769

Annexe 1 : sources permettant de tester les fonctions moins performantes

Le programme ci-dessous a permis de trouver les valeurs de $f(x)$ jusqu'à 1 000 000 000 selon la première formule fournie (formule proposée en 1) dans la première page).

```
1  #include <iostream>
2  #include <stdio.h>
3  #include <stdlib.h>
4  #include <math.h>
5  #include <cmath>
6
7  int prime(int atester) {
8      bool pastrouve=true;
9      unsigned long k = 2;
10
11     if (atester == 1) return 0;
12     if (atester == 2) return 1;
13     if (atester == 3) return 1;
14     if (atester == 5) return 1;
15     if (atester == 7) return 1;
16     while (pastrouve) {
17         if ((k * k) > atester) return 1;
18         else if ((atester % k) == 0) {
19             return 0 ;
20         }
21         else k++;
22     }
23 }
24
25 int moebius(int n) {
26     int moebius, p, nbdiv, carre ;
27
28     moebius = -2 ;
29     nbdiv = 0 ;
30     for (p=2 ; p <= n ; p++) {
31         if (prime (p)) {
32             carre = p*p ;
33             if ((n % carre) == 0) moebius = 0 ;
34             if ((n % p) == 0) nbdiv++ ;
35         }
36     }
37     if (moebius == 0) return 0 ;
38     else {
39         if ((nbdiv % 2) == 1) return -1 ;
40         else return 1 ;
41     }
42 }
43
44 int arrondi(float nombre) {
45     return nombre + 0.5;
46 }
```

```

1  int main(int argc, char **argv) {
2      int x, y, tempo ;
3      float somme, pix, restempo ;
4      int stocke[100005] ;
5
6      for (x = 2 ; x <= 100000 ; ++x) stocke[x] = 0 ;
7      for (x = 2 ; x <= 100000 ; ++x) {
8          pix = 0 ;
9          for (y = 1 ; y <= x ; ++y)
10             if (prime(y)) pix = pix+1 ;
11          stocke[x] = pix ;
12      }
13      for (x = 2 ; x <= 100000 ; ++x) std::cout << x << " -> pi(x) " << stocke[x] << " moebius(x) " <<
14          moebius(x) << "\n" ;
15
16      for (x = 2 ; x <= 100000 ; ++x) {
17          std::cout << x << " --> " ;
18          somme = stocke[x] ;
19          tempo = 2 ;
20          while (pow(x, 1./tempo) >= 2) {
21              restempo = (1.0/(float)tempo)*((float)stocke[(int)pow(x, 1./tempo)]) ;
22              std::cout << "rs " << restempo << "\n" ;
23              somme = somme+restempo ;
24              tempo = tempo+1 ;
25          }
26          std::cout << (int) somme << "\n" ;
27      }
28      std::cout << "\n\n" ;
29  }

```

Le programme ci-dessous a permis de trouver les valeurs de $\pi(x)$ jusqu'à 1 000 000 000 selon la troisième formule fournie (formule proposée en 3) dans la première page). Les logarithmes intégraux ont été calculés avec gnu-octave et stockés préalablement dans un fichier dans lequel on va les chercher.

```

1  #include <iostream>
2  #include <stdio.h>
3  #include <stdlib.h>
4  #include <math.h>
5  #include <cmath>
6  #include <fstream>
7
8  int prime(int atester) {
9      bool pastrouve=true;
10     unsigned long k = 2;
11
12     if (atester == 1) return 0;
13     if (atester == 2) return 1;
14     if (atester == 3) return 1;
15     if (atester == 5) return 1;
16     if (atester == 7) return 1;
17     while (pastrouve) {
18         if ((k * k) > atester) return 1;
19         else if ((atester % k) == 0) {
20             return 0 ;
21         }
22         else k++;
23     }
24 }

```

```

1
2 int moebius(int n) {
3     int moebius, p, racine, nbdiv, carre ;
4
5     moebius = -2 ;
6     nbdiv = 0 ;
7     racine = sqrt(n) ;
8     for (p=2 ; p <= n ; p++) {
9         if (prime(p)) {
10             carre = p*p ;
11             if ((n % carre) == 0) moebius = 0 ;
12             if ((n % p) == 0) nbdiv++ ;
13         }
14     }
15     if (moebius == 0) return 0 ;
16     else {
17         if ((nbdiv % 2) == 1) return -1 ;
18         else return 1 ;
19     }
20 }
21
22 int arrondi(float nombre) {
23     return nombre + 0.5;
24 }
25
26 int main(int argc, char **argv) {
27     int x, y, pix, mu, k, i ;
28     float res, cumul ;
29     int stocke[10005] ;
30     float logainte[10005] ;
31
32     for (x = 2 ; x <= 10000 ; ++x) stocke[x] = 0 ;
33     for (x = 2 ; x <= 10000 ; ++x) {
34         pix = 0 ;
35         for (y = 1 ; y <= x ; ++y)
36             if (prime(y)) pix = pix+1 ;
37         stocke[x] = pix ;
38     }
39     for (x = 2 ; x <= 10000 ; ++x) {
40         std::cout << x << " -> pi(x) " << stocke[x] ;
41         std::cout << "   moebius(x) " << moebius(x) << "\n" ;
42     }
43     std::ifstream fichier("Li10000", std::ios::in);
44     if (fichier) {
45         float flotte ;
46
47         i = 2 ;
48         while (not fichier.eof()) {
49             fichier >> flotte ;
50             logainte[i] = flotte ;
51             std::cout << "li(" << i << ") = " << logainte[i] << "\n" ;
52             i = i+1 ;
53         }
54         fichier.close();
55     }
56     else std::cerr << "Impossible d'ouvrir le fichier !" << std::endl ;
57     for (x = 2 ; x <= 10000 ; ++x) {
58         std::cout << x << " --> " ;
59         cumul = (float) logainte[x] ;
60         for (k = 2 ; k <= x ; ++k)
61             cumul = cumul + ((float) moebius(k) / (float) k) * (logainte[(int) pow(x, 1./k)]) ;
62         std::cout << cumul << "\n" ;
63     }
64 }

```

Annexe 2 : quelques valeurs de racines n-ièmes

x	500	1000	2000	5000	10000	20000	50000	100000	200000	500000	995907	10^6	10^9
$\sqrt[2]{x}$	22.3607	31.6228	44.7214	70.7107	100	141.421	223.607	316.228	447.214	707.107	997.951	1000	31622.8
$\sqrt[3]{x}$	7.93701	10	12.5992	17.0998	21.5443	27.1442	36.8403	46.4159	58.4804	79.3701	99.8634	100	1000
$\sqrt[4]{x}$	4.72871	5.62341	6.6874	8.40896	10	11.8921	14.9535	17.7828	21.1474	26.5915	31.5904	31.6228	177.828
$\sqrt[5]{x}$	3.46572	3.98107	4.57305	5.4928	6.30957	7.2478	8.70551	10	11.487	13.7973	15.8359	15.8489	63.0957
$\sqrt[6]{x}$	2.81727	3.16228	3.54954	4.13519	4.64159	5.21001	6.06962	6.81292	7.64724	8.90899	9.99317	10	31.6228
$\sqrt[7]{x}$	2.42978	2.6827	2.96194	3.37617	3.72759	4.1156	4.69117	5.17947	5.7186	6.51836	7.19264	7.19686	19.307
$\sqrt[8]{x}$	2.17456	2.37137	2.586	2.89982	3.16228	3.44849	3.86697	4.21697	4.59863	5.15669	5.62053	5.62341	13.3352
$\sqrt[9]{x}$	1.99474	2.15443	2.32692	2.5763	2.78256	3.00533	3.32742	3.59381	3.88153	4.29753	4.63947	4.64159	10
$10\sqrt{x}$		1.99526	2.13847	2.34367	2.51189	2.69217	2.95051	3.16228	3.38925	3.71447	3.97944	3.98107	7.94328
$11\sqrt{x}$			1.99569	2.16905	2.31013	2.46038	2.67411	2.84804	3.03328	3.29677	3.50988	3.51119	6.57933
$12\sqrt{x}$				2.03352	2.15443	2.28254	2.46366	2.61016	2.76537	2.98479	3.1612	3.16228	5.62341
$13\sqrt{x}$				1.92547	2.03092	2.14214	2.29858	2.42446	2.55724	2.74399	2.89335	2.89427	4.92388
$14\sqrt{x}$					1.9307	2.02869	2.16591	2.27585	2.39136	2.55311	2.68191	2.6827	4.39397
$15\sqrt{x}$						1.93524	2.05714	2.15443	2.25633	2.39845	2.5112	2.51189	3.98107
$16\sqrt{x}$							1.96646	2.05353	2.14444	2.27084	2.37077	2.37137	3.65174
$17\sqrt{x}$								1.96842	2.05034	2.16388	2.25339	2.25393	3.38386
$18\sqrt{x}$									1.97016	2.07305	2.15394	2.15443	3.16228
$19\sqrt{x}$										1.99501	2.06869	2.06914	2.97635
$20\sqrt{x}$											1.99485	1.99526	2.81838
$21\sqrt{x}$													2.6827
$22\sqrt{x}$													2.56502
$23\sqrt{x}$													2.46209
$24\sqrt{x}$													2.37137
$25\sqrt{x}$													2.29087
$26\sqrt{x}$													2.21898
$27\sqrt{x}$													2.15443
$28\sqrt{x}$													2.09618
$29\sqrt{x}$													2.04336
$30\sqrt{x}$													1.99526

Annexe 3 : Valeurs intermédiaires dans les calculs des formules 1 et 3 pour 995907

res = 78199.0.
+ (1.0/2.0)*168.0 → 78283.00000
+ (1.0/3.0) * 25.0 → 78291.33333
+ (1.0/4.0) * 11.0 → 78294.08333
+ (1.0/5.0) * 6.0 → 78295.28333
+ (1.0/6.0) * 4.0 → 78295.95000
+ (1.0/7.0) * 4.0 → 78296.52143
+ (1.0/8.0) * 3.0 → 78296.89643
+ (1.0/9.0) * 2.0 → 78297.11865
+ (1.0/10.0) * 2.0 → 78297.31865
+ (1.0/11.0) * 2.0 → 78297.50047
+ (1.0/12.0) * 2.0 → 78297.66714
+ (1.0/13.0) * 1.0 → 78297.74406
+ (1.0/14.0) * 1.0 → 78297.81549
+ (1.0/15.0) * 1.0 → 78297.88215
+ (1.0/16.0) * 1.0 → 78297.94465
+ (1.0/17.0) * 1.0 → 78298.00348
+ (1.0/18.0) * 1.0 → 78298.05903
+ (1.0/19.0) * 1.0 → 78298.11166
formule 1 → 78298.11166

res = 78330.198822562036 (=li(995907)-li(2)).
- (1.0/2.0)*176.268 → 78242.06482
- (1.0/3.0) * 29.0513 → 78232.38106
- (1.0/5.0) * 7.41526 → 78230.89800
+ (1.0/6.0) * 5.11747 → 78231.75092
- (1.0/7.0) * 3.8102 → 78231.20660
+ (1.0/10.0) * 1.90756 → 78231.39736
- (1.0/11.0) * 1.55148 → 78231.25631
- (1.0/13.0) * 1.101972 → 78231.17155
+ (1.0/14.0) * 0.813336 → 78231.22964
+ (1.0/15.0) * 0.634324 → 78231.27193
- (1.0/17.0) * 0.336776 → 78231.25212
- (1.0/19.0) * 0.0967475 → 78231.24703
formule 3 → 78231.24703

Annexe 4 : Valeurs intermédiaires dans les calculs des formules 1 et 3 pour 10^6

res = 78627.549159.
+ (1.0/2.0)*168.0 → 78711.54916
+ (1.0/3.0) * 25.0 → 78719.88249
+ (1.0/4.0) * 11.0 → 78722.63249
+ (1.0/5.0) * 6.0 → 78723.83249
+ (1.0/6.0) * 4.0 → 78724.49916
+ (1.0/7.0) * 4.0 → 78725.07059
+ (1.0/8.0) * 3.0 → 78725.44559
+ (1.0/9.0) * 2.0 → 78725.66781
+ (1.0/10.0) * 2.0 → 78725.86781
+ (1.0/11.0) * 2.0 → 78726.04963
+ (1.0/12.0) * 2.0 → 78726.21629
+ (1.0/13.0) * 1.0 → 78726.29322
+ (1.0/14.0) * 1.0 → 78726.36465
+ (1.0/15.0) * 1.0 → 78726.43131
+ (1.0/16.0) * 1.0 → 78726.49381
+ (1.0/17.0) * 1.0 → 78726.55264
+ (1.0/18.0) * 1.0 → 78726.60819
+ (1.0/19.0) * 1.0 → 78726.66082
formule 1 → 78726.66082

```

res = 78627.549159 (=li(1000000)-li(2)).
-(1.0/2.0)*176.56449 → 78539.26691
-(1.0/3.0)*29.080977 → 78529.57326
-(1.0/5.0)*7.41996 → 78528.08926
+(1.0/6.0)*5.120435 → 78528.94267
-(1.0/7.0)*3.81234 → 78528.39805
+(1.0/10.0)*1.90874 → 78528.58892
-(1.0/11.0)*1.55252 → 78528.44778
-(1.0/13.0)*1.02059 → 78528.36928
+(1.0/14.0)*0.814136 → 78528.42743
+(1.0/15.0)*0.635074 → 78528.46977
-(1.0/17.0)*0.33744 → 78528.44992
-(1.0/19.0)*0.0973665 → 78528.44479
formule 3 → 78528.44479

```

Annexe 5 : Valeurs intermédiaires dans les calculs des formules 1 et 3 pour 10^7

```

res = 664579.0.
+(1.0/2.0)*446.0 → 664802.00000
+(1.0/3.0)*47.0 → 664817.66667
+(1.0/4.0)*25.0 → 664823.91667
+(1.0/5.0)*9.0 → 664825.71667
+(1.0/6.0)*6.0 → 664826.71667
+(1.0/7.0)*4.0 → 664827.28810
+(1.0/8.0)*4.0 → 664827.78810
+(1.0/9.0)*4.0 → 664828.23254
+(1.0/10.0)*3.0 → 664828.53254
+(1.0/11.0)*2.0 → 664828.71436
+(1.0/12.0)*2.0 → 664828.88102
+(1.0/13.0)*2.0 → 664829.03487
+(1.0/14.0)*2.0 → 664829.17773
+(1.0/15.0)*1.0 → 664829.24439
+(1.0/16.0)*1.0 → 664829.30689
+(1.0/17.0)*1.0 → 664829.36572
+(1.0/18.0)*1.0 → 664829.42127
+(1.0/19.0)*1.0 → 664829.47391
+(1.0/20.0)*1.0 → 664829.52391
+(1.0/21.0)*1.0 → 664829.57152
+(1.0/22.0)*1.0 → 664829.61698
+(1.0/23.0)*1.0 → 664829.66046
formule 1 → 664829.66046

```

```

res = 664917.359884 (=li(10000000)-li(2)).
-(1.0/2.0)*461.916 → 664686.40188
-(1.0/3.0)*52.0412 → 664669.05482
-(1.0/5.0)*10.5047 → 664666.95388
+(1.0/6.0)*6.99028 → 664668.11892
-(1.0/7.0)*5.12043572 → 664667.38743
+(1.0/10.0)*2.59679 → 664667.64711
-(1.0/11.0)*2.15298 → 664667.45139
-(1.0/13.0)*1.50758 → 664667.33542
+(1.0/14.0)*1.26268 → 664667.42561
+(1.0/15.0)*1.05275 → 664667.49579
-(1.0/17.0)*0.708872 → 664667.45410
-(1.0/19.0)*0.435926 → 664667.43115
+(1.0/21.0)*0.2115 → 664667.44122
+(1.0/22.0)*0.113026 → 664667.44636
-(1.0/23.0)*0.0220097 → 664667.44540
formule 3 → 664667.44540

```

Annexe 6 : Valeurs intermédiaires dans les calculs des formules 1 et 3 pour 10^8

res = 5761455.0.
+ (1.0/2.0)*168.0 → 5761539.00000
+ (1.0/3.0) * 25.0 → 5761547.33333
+ (1.0/4.0) * 11.0 → 5761550.08333
+ (1.0/5.0) * 6.0 → 5761551.28333
+ (1.0/6.0) * 4.0 → 5761551.95000
+ (1.0/7.0) * 4.0 → 5761552.52143
+ (1.0/8.0) * 3.0 → 5761552.89643
+ (1.0/9.0) * 2.0 → 5761553.11865
+ (1.0/10.0) * 2.0 → 5761553.31865
+ (1.0/11.0) * 2.0 → 5761553.50047
+ (1.0/12.0) * 2.0 → 5761553.66714
+ (1.0/13.0) * 1.0 → 5761553.74406
+ (1.0/14.0) * 1.0 → 5761553.81549
+ (1.0/15.0) * 1.0 → 5761553.88215
+ (1.0/16.0) * 1.0 → 5761553.94465
+ (1.0/17.0) * 1.0 → 5761554.00348
+ (1.0/18.0) * 1.0 → 5761554.05903
+ (1.0/19.0) * 1.0 → 5761554.11166
formule 1 → 5761554.11166

res = 5762208.330284 (=li(100000000)-li(2)).
- (1.0/2.0)*1245.0920 → 5761585.78428
- (1.0/3.0) * 94.9471 → 5761554.13525
- (1.0/5.0) * 14.743 → 5761551.18665
+ (1.0/6.0) * 9.36926 → 5761552.74819
- (1.0/7.0) * 6.69582 → 5761551.79165
+ (1.0/10.0) * 3.34743 → 5761552.12639
- (1.0/11.0) * 2.79446 → 5761551.87235
- (1.0/13.0) * 2.01134 → 5761551.71763
+ (1.0/14.0) * 1.72081 → 5761551.84055
+ (1.0/15.0) * 1.47471 → 5761551.93886
- (1.0/17.0) * 1.07737 → 5761551.87549
- (1.0/19.0) * 0.767058 → 5761551.83511
- (1.0/21.0) * 0.515185 → 5761551.81058
- (1.0/22.0) * 0.405563 → 5761551.79215
- (1.0/23.0) * 0.304730 → 5761551.77890
- (1.0/26.0) * 0.0441204 → 5761551.77720
formule 3 → 5761551.77720

Annexe 7 : Valeurs intermédiaires dans les calculs des formules 1 et 3 pour 10^9

res = 50847534.0.
+ (1.0/2.0)*168.0 → 50847618.00000
+ (1.0/3.0) * 25.0 → 50847626.33333
+ (1.0/4.0) * 11.0 → 50847629.08333
+ (1.0/5.0) * 6.0 → 50847630.28333
+ (1.0/6.0) * 4.0 → 50847630.95000
+ (1.0/7.0) * 4.0 → 50847631.52143
+ (1.0/8.0) * 3.0 → 50847631.89643
+ (1.0/9.0) * 2.0 → 50847632.11865
+ (1.0/10.0) * 2.0 → 50847632.31865
+ (1.0/11.0) * 2.0 → 50847632.50047
+ (1.0/12.0) * 2.0 → 50847632.66714
+ (1.0/13.0) * 1.0 → 50847632.74406
+ (1.0/14.0) * 1.0 → 50847632.81549
+ (1.0/15.0) * 1.0 → 50847632.88215
+ (1.0/16.0) * 1.0 → 50847632.94465
+ (1.0/17.0) * 1.0 → 50847633.00348
+ (1.0/18.0) * 1.0 → 50847633.05903

$+(1.0/19.0) * 1.0 \rightarrow 50847633.11166$
formule 1 $\rightarrow 50847633.11166$

$\text{res} = 50849233.911838 (= \text{li}(1000000000) - \text{li}(2)).$
 $-(1.0/2.0) * 3432.87 \rightarrow 50847517.47684$
 $-(1.0/3.0) * 176.5644942 \rightarrow 50847458.62201$
 $-(1.0/5.0) * 20.6717 \rightarrow 50847454.48767$
 $+(1.0/6.0) * 12.4509 \rightarrow 50847456.56282$
 $-(1.0/7.0) * 8.62744 \rightarrow 50847455.33033$
 $+(1.0/10.0) * 4.18123 \rightarrow 50847455.74845$
 $-(1.0/11.0) * 3.49223 \rightarrow 50847455.43097$
 $-(1.0/13.0) * 2.5419 \rightarrow 50847455.23544$
 $+(1.0/14.0) * 2.19725 \rightarrow 50847455.39239$
 $+(1.0/15.0) * 1.90874 \Rightarrow 50847455.51964$
 $-(1.0/17.0) * 1.44963 \rightarrow 50847455.43437$
 $-(1.0/19.0) * 1.09682 \rightarrow 50847455.37664$
 $-(1.0/21.0) * 0.814136 \rightarrow 50847455.33787$
 $-(1.0/22.0) * 0.692111 \rightarrow 50847455.30641$
 $-(1.0/23.0) * 0.58041 \rightarrow 50847455.28117$
 $-(1.0/26.0) * 0.294016 \rightarrow 50847455.26987$
 $-(1.0/29.0) * 0.0616036 \rightarrow 50847455.26774$
formule 3 $\rightarrow 50847455.26774$

On étudie ici les calculs de la formule 2) ci-dessous fournie dans l'article que Riemann a consacré au nombre de nombres premiers pour les nombres 995 907, 10^6 , 10^7 , 10^8 , 10^9 .

$$1) f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots$$

$$2) \pi(x) = \frac{\mu(2)}{2}f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\mu(3)}{3}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{\mu(4)}{4}f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{\mu(5)}{5}f\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots = \sum \frac{\mu(k)}{k}f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

La formule 2) utilise les valeurs de f calculées au préalable qu'on fournit dans le tableau ci-après en regard des racines k-ièmes des nombres choisis (à gauche de la flèche dans chaque case, la racine k-ième, à droite, son image par f).

f	$\sqrt[2]{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[5]{x}$	$\sqrt[6]{x}$	$\sqrt[7]{x}$	$\sqrt[10]{x}$
995 907	997.951 → 176	99.8634 → 28	15.8359 → 7	9.99317 → 5	7.19264 → 4	3.97944 → 2
10^6	1000 → 176	100 → 28	15.8489 → 7	10 → 5	7.19686 → 4	3.98107 → 2
10^7	3162.28 → 458	215.443 → 52	25.1189 → 11	14.678 → 7	10 → 5	5.01187 → 3
10^8	10000 → 1247	464.159 → 96	39.8107 → 14	21.5443 → 9	13.895 → 7	6.30957 → 3
10^9	31622.8 → 3428	1000 → 176	63.0957 → 21	31.6228 → 13	19.307 → 9	7.94328 → 4
f	$\sqrt[11]{x}$	$\sqrt[13]{x}$	$\sqrt[14]{x}$	$\sqrt[15]{x}$	$\sqrt[17]{x}$	$\sqrt[19]{x}$
995 907	3.50988 → 2	2.89335 → 1	2.68191 → 1	2.5112 → 1	2.25339 → 1	2.06869 → 1
10^6	3.51119 → 2	2.89427 → 1	2.6827 → 1	2.51189 → 1	2.25393 → 1	2.06914 → 1
10^7	4.32876 → 2	3.45511 → 2	3.16228 → 1	2.92864 → 1	2.58086 → 1	2.33572 → 1
10^8	5.3356 → 3	4.12463 → 2	3.72759 → 2	3.41455 → 2	2.95521 → 1	2.63665 → 1
10^9	6.57933 → 3	4.92388 → 2	4.39397 → 2	3.98107 → 2	3.38386 → 2	2.97635 → 1
f	$\sqrt[21]{x}$	$\sqrt[22]{x}$	$\sqrt[23]{x}$	$\sqrt[26]{x}$	$\sqrt[29]{x}$	
995 907	—	—	—	—	—	
10^6	—	—	—	—	—	
10^7	2.15443 → 1	2.08057 → 1	2.01534 → 1	—	—	
10^8	2.4041 → 1	2.31013 → 1	2.22754 → 1	2.03092 → 1	—	
10^9	2.6827 → 1	2.56502 → 1	2.46209 → 1	2.21898 → 1	2.04336 → 1	

La fonction de Moebius “équilibre” à peu près les ajouts et les soustractions.

x	$\pi(x)$	formule 2)
995 907	78 262	78 199
1 000 000	78 498	78 627
10 000 000	664 579	664 555
100 000 000	5 761 455	5 760 896
1 000 000 000	50 847 534	50 845 856

Ci-dessous, le tableau des écarts à $\pi(x)$, plus parlant :

x	$\pi(x)$	formule 2(x) - $\pi(x)$
995 907	78 262	-63
1 000 000	78 498	+129
10 000 000	664 579	-24
100 000 000	5 761 455	-559
1 000 000 000	50 847 534	-1678

Ci-dessous les valeurs calculées au fur et à mesure de l'application de la formule 2 pour les nombres choisis.

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 995907

res = 78 298 (= f(995907)).
 - (1.0/2.0)*176 → 78210.00000
 - (1.0/3.0)*28 → 78200.66667
 - (1.0/5.0)*7 → 78199.26667
 + (1.0/6.0)*5 → 78200.10000
 - (1.0/7.0)*4 → 78199.52857

$+(1.0/10.0) * 2 \rightarrow 78199.72857$
 $-(1.0/11.0) * 2 \rightarrow 78199.54675$
 $-(1.0/13.0) * 1 \rightarrow 78199.46983$
 $+(1.0/14.0) * 1 \rightarrow 78199.54126$
 $+(1.0/15.0) * 1 \rightarrow 78199.60793$
 $-(1.0/17.0) * 1 \rightarrow 78199.54910$
 $-(1.0/19.0) * 1 \rightarrow 78199.49647$
formule 2 $\rightarrow 78199.49647$

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^6

$\text{res} = 78\,726 (= f(10^6)).$
 $-(1.0/2.0) * 176 \rightarrow 78638.00000$
 $-(1.0/3.0) * 28 \rightarrow 78628.66667$
 $-(1.0/5.0) * 7 \rightarrow 78627.26667$
 $+(1.0/6.0) * 5 \rightarrow 78628.10000$
 $-(1.0/7.0) * 4 \rightarrow 78627.52857$
 $+(1.0/10.0) * 2 \rightarrow 78627.72857$
 $-(1.0/11.0) * 2 \rightarrow 78627.54675$
 $-(1.0/13.0) * 1 \rightarrow 78627.46983$
 $+(1.0/14.0) * 1 \rightarrow 78627.54126$
 $+(1.0/15.0) * 1 \rightarrow 78627.60793$
 $-(1.0/17.0) * 1 \rightarrow 78627.54910$
 $-(1.0/19.0) * 1 \rightarrow 78627.49647$
formule 2 $\rightarrow 78627.49647$

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^7

$\text{res} = 664\,829 (= f(10^7)).$
 $-(1.0/2.0) * 458 \rightarrow 664600.00000$
 $-(1.0/3.0) * 128 \rightarrow 664557.33333$
 $-(1.0/5.0) * 11 \rightarrow 664555.13333$
 $+(1.0/6.0) * 7 \rightarrow 664556.30000$
 $-(1.0/7.0) * 5 \rightarrow 664555.58571$
 $+(1.0/10.0) * 4 \rightarrow 664555.98571$
 $-(1.0/11.0) * 2 \rightarrow 664555.80390$
 $-(1.0/13.0) * 2 \rightarrow 664555.65005$
 $+(1.0/14.0) * 1 \rightarrow 664555.72148$
 $+(1.0/15.0) * 1 \rightarrow 664555.78815$
 $-(1.0/17.0) * 1 \rightarrow 664555.72932$
 $-(1.0/19.0) * 1 \rightarrow 664555.67669$
 $+(1.0/21.0) * 1 \rightarrow 664555.72431$
 $+(1.0/22.0) * 1 \rightarrow 664555.76976$
 $-(1.0/23.0) * 1 \rightarrow 664555.72629$
formule 2 $\rightarrow 664555.72629$

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^8

$\text{res} = 5\,761\,554 (= f(10^8)).$
 $-(1.0/2.0) * 1247 \rightarrow 5760930.50000$
 $-(1.0/3.0) * 96 \rightarrow 5760898.50000$
 $-(1.0/5.0) * 14 \rightarrow 5760895.70000$
 $+(1.0/6.0) * 9 \rightarrow 5760897.20000$
 $-(1.0/7.0) * 7 \rightarrow 5760896.20000$
 $+(1.0/10.0) * 3 \rightarrow 5760896.50000$
 $-(1.0/11.0) * 3 \rightarrow 5760896.22727$
 $-(1.0/13.0) * 2 \rightarrow 5760896.07343$
 $+(1.0/14.0) * 2 \rightarrow 5760896.21628$
 $+(1.0/15.0) * 2 \rightarrow 5760896.34962$
 $-(1.0/17.0) * 1 \rightarrow 5760896.29079$
 $-(1.0/19.0) * 1 \rightarrow 5760896.23816$
 $-(1.0/21.0) * 1 \rightarrow 5760896.19054$

$-(1.0/22.0) * 1 \rightarrow 5760896.14509$
 $-(1.0/23.0) * 1 \rightarrow 5760896.10161$
 $-(1.0/26.0) * 1 \rightarrow 5760896.06315$
 formule 2 $\rightarrow 5760896.06315$

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 10^9

res = 50 847 633 (= $f(10^9)$).
 $-(1.0/2.0) * 3428 \rightarrow 50845919.00000$
 $-(1.0/3.0) * 176 \rightarrow 50845860.33333$
 $-(1.0/5.0) * 21 \rightarrow 50845856.13333$
 $+(1.0/6.0) * 13 \rightarrow 50845858.30000$
 $-(1.0/7.0) * 9 \rightarrow 50845857.01429$
 $+(1.0/10.0) * 4 \rightarrow 50845857.41429$
 $-(1.0/11.0) * 3 \rightarrow 50845857.14156$
 $-(1.0/13.0) * 2 \rightarrow 50845856.98771$
 $+(1.0/14.0) * 2 \rightarrow 50845857.13057$
 $+(1.0/15.0) * 2 \rightarrow 50845857.26390$
 $-(1.0/17.0) * 2 \rightarrow 50845857.14626$
 $-(1.0/19.0) * 1 \rightarrow 50845857.09362$
 $-(1.0/21.0) * 1 \rightarrow 50845857.04601$
 $-(1.0/22.0) * 1 \rightarrow 50845857.00055$
 $-(1.0/23.0) * 1 \rightarrow 50845856.95707$
 $-(1.0/26.0) * 1 \rightarrow 50845856.91861$
 $-(1.0/29.0) * 1 \rightarrow 50845856.88413$
 formule 2 $\rightarrow 50845856.88413$

Concernant le dernier paragraphe de l'article de Bernhard Riemann :

“Il serait intéressant dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique¹ contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $F(x)$ serait obtenue à l'aide de la fonction $f(x)$ qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec $Li(x) + \log \xi(0)$.”

il s'agit de comparer $Li(x)$ et $f(x)$ dont on rappelle quelques valeurs :

x	$f(x)$	$Li(x)$	$Li(x) - f(x)$
500	101	101	0
10^3	176	177	1
$2 \cdot 10^3$	313	314	1
$5 \cdot 10^3$	683	684	1
10^4	1247	1245	-2
$2 \cdot 10^4$	2285	2288	3
$5 \cdot 10^4$	5164	5165	1
10^5	9633	9629	-4
$2 \cdot 10^5$	18037	18035	-2
$5 \cdot 10^5$	41614	41606	-8
995 907	78 298	78 332	34
10^6	78 726	78 627	-99
10^7	664 829	664 917	88
10^8	5 761 554	5 762 208	654
10^9	50 847 633	50 847 534	-99

Il faut peut-être, dans la comparaison “en moyenne”, considérer, comme le fait le traducteur, que $\log \xi(0)$ est une coquille typographique et doit prendre la valeur $\frac{1}{2}$, ou bien selon l'idée d'autres, remplacer $\log \xi(0)$ par $li(2) = 1.045164$.

¹selon le traducteur, penser ici oscillatoire plutôt que périodique.

Toujours est-il que le rapport $\frac{50\,847\,633}{50\,847\,534}$ pour $x = 10^9$ vaut 1.000001947 et que donc, puisque $f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots$, il suffirait, si l'hypothèse de Riemann était démontrée, pour trouver quasi-exactement le nombre de nombres premiers inférieurs à x de calculer $Li(x) = li(x) - li(2)$ et de lui soustraire la moitié du nombre de nombres premiers inférieurs à la racine carrée de x , ainsi que le tiers du nombre de nombres premiers inférieurs à la racine cubique de x , ainsi que le quart du nombre de nombres premiers de la racine quatrième de x , en poursuivant les retraits jusqu'à la dernière racine k -ième de x supérieure ou égale à 2.

On vérifie cela avec le nombre 10^9 uniquement ; on calcule $\pi(x) = Li(x) - \sum_k \frac{1}{k} \pi(\sqrt[k]{x})$:

```
res = Li(109) = 50849233.0 - (1.0/2.0) * 3401.0 = 50847532.500000
- (1.0/3.0) * 168.0 = 50847476.500000
- (1.0/4.0) * 40.0 = 50847466.500000
- (1.0/5.0) * 18.0 = 50847462.900000
- (1.0/6.0) * 11.0 = 50847461.066667
- (1.0/7.0) * 8.0 = 50847459.923810
- (1.0/8.0) * 6.0 = 50847459.173810
- (1.0/9.0) * 4.0 = 50847458.729365
- (1.0/10.0) * 4.0 = 50847458.329365
- (1.0/11.0) * 3.0 = 50847458.056638
- (1.0/12.0) * 3.0 = 50847457.806638
- (1.0/13.0) * 2.0 = 50847457.652792
- (1.0/14.0) * 2.0 = 50847457.509935
- (1.0/15.0) * 2.0 = 50847457.376601
- (1.0/16.0) * 2.0 = 50847457.251601
- (1.0/17.0) * 2.0 = 50847457.133954
- (1.0/18.0) * 2.0 = 50847457.022843
- (1.0/19.0) * 1.0 = 50847456.970211
- (1.0/20.0) * 1.0 = 50847456.920211
- (1.0/21.0) * 1.0 = 50847456.872592
- (1.0/22.0) * 1.0 = 50847456.827138
- (1.0/23.0) * 1.0 = 50847456.783660
- (1.0/24.0) * 1.0 = 50847456.741993
- (1.0/25.0) * 1.0 = 50847456.701993
- (1.0/26.0) * 1.0 = 50847456.663531
- (1.0/27.0) * 1.0 = 50847456.626494
- (1.0/28.0) * 1.0 = 50847456.590780
- (1.0/29.0) * 1.0 = 50847456.556297
```

L'écart rapporté à $\pi(x)$ de la valeur finale obtenue $\frac{50847534 - 50847456}{50847534}$ est égal à 0.00000153098 mais dès la première soustraction, en ôtant simplement $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})$, on a un écart aussi petit que $\frac{50847534 - 50847532}{50847534} = 3,93332743 \cdot 10^{-8}$.

Annexe : autres résultats

Calculs pour 10^8

$\text{res} = \text{Li}(10^8) = 5762208.0$
– $(1.0/2.0) * 1229.0 = 5761593.500000$
– $(1.0/3.0) * 90.0 = 5761563.500000$
– $(1.0/4.0) * 25.0 = 5761557.250000$
– $(1.0/5.0) * 12.0 = 5761554.850000$
– $(1.0/6.0) * 8.0 = 5761553.516667$
– $(1.0/7.0) * 6.0 = 5761552.659524$
– $(1.0/8.0) * 4.0 = 5761552.159524$
– $(1.0/9.0) * 4.0 = 5761551.715079$
– $(1.0/10.0) * 3.0 = 5761551.415079$
– $(1.0/11.0) * 3.0 = 5761551.142352$
– $(1.0/12.0) * 2.0 = 5761550.975685$
– $(1.0/13.0) * 2.0 = 5761550.821839$
– $(1.0/14.0) * 2.0 = 5761550.678982$
– $(1.0/15.0) * 2.0 = 5761550.545649$
– $(1.0/16.0) * 2.0 = 5761550.420649$
– $(1.0/17.0) * 1.0 = 5761550.361825$
– $(1.0/18.0) * 1.0 = 5761550.306270$
– $(1.0/19.0) * 1.0 = 5761550.253638$
– $(1.0/20.0) * 1.0 = 5761550.203638$
– $(1.0/21.0) * 1.0 = 5761550.156019$
– $(1.0/22.0) * 1.0 = 5761550.110565$
– $(1.0/23.0) * 1.0 = 5761550.067086$
– $(1.0/24.0) * 1.0 = 5761550.025420$
– $(1.0/25.0) * 1.0 = 5761549.985420$
– $(1.0/26.0) * 1.0 = 5761549.946958$

$\text{Erreur} = (5761455 - 5761593)/5761455 = 2,39.10^{-5}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui tombe à $.10^{-}$ si on va au bout des calculs $((5761455-5761549)/5761455=1,63.10^{-5})$.

Calculs pour 10^7

$\text{res} = \text{Li}(10^7) = 664917.0$
– $(1.0/2.0) * 446.0 = 664694.000000$
– $(1.0/3.0) * 47.0 = 664678.333333$
– $(1.0/4.0) * 16.0 = 664674.333333$
– $(1.0/5.0) * 9.0 = 664672.533333$
– $(1.0/6.0) * 6.0 = 664671.533333$
– $(1.0/7.0) * 4.0 = 664670.961905$
– $(1.0/8.0) * 4.0 = 664670.461905$
– $(1.0/9.0) * 3.0 = 664670.128571$
– $(1.0/10.0) * 3.0 = 664669.828571$
– $(1.0/11.0) * 2.0 = 664669.646753$
– $(1.0/12.0) * 2.0 = 664669.480087$
– $(1.0/13.0) * 2.0 = 664669.326240$
– $(1.0/14.0) * 2.0 = 664669.183383$
– $(1.0/15.0) * 1.0 = 664669.116717$
– $(1.0/16.0) * 1.0 = 664669.054217$
– $(1.0/17.0) * 1.0 = 664668.995393$
– $(1.0/18.0) * 1.0 = 664668.939838$
– $(1.0/19.0) * 1.0 = 664668.887206$
– $(1.0/20.0) * 1.0 = 664668.837206$
– $(1.0/21.0) * 1.0 = 664668.789587$
– $(1.0/22.0) * 1.0 = 664668.744132$
– $(1.0/23.0) * 1.0 = 664668.700654$

$\text{Erreur} = (664579 - 664694)/664579 = 1,73.10^{-4}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui tombe à $1,33.10^{-4}$ si on va au bout des calculs $(=(664579-664668)/664579)$.

Calculs pour 10^6

res = Li(10^6) = 78627.0
– (1.0/2.0) * 168.0 = 78543.000000
– (1.0/3.0) * 25.0 = 78534.666667
– (1.0/4.0) * 11.0 = 78531.916667
– (1.0/5.0) * 7.0 = 78530.516667
– (1.0/6.0) * 4.0 = 78529.850000
– (1.0/7.0) * 4.0 = 78529.278571
– (1.0/8.0) * 3.0 = 78528.903571
– (1.0/9.0) * 2.0 = 78528.681349
– (1.0/10.0) * 2.0 = 78528.481349
– (1.0/11.0) * 2.0 = 78528.299531
– (1.0/12.0) * 2.0 = 78528.132864
– (1.0/13.0) * 1.0 = 78528.055941
– (1.0/14.0) * 1.0 = 78527.984513
– (1.0/15.0) * 1.0 = 78527.917846
– (1.0/16.0) * 1.0 = 78527.855346
– (1.0/17.0) * 1.0 = 78527.796523
– (1.0/18.0) * 1.0 = 78527.740967
– (1.0/19.0) * 1.0 = 78527.688335

$Erreur = (78543 - 78498)/78498 = 5.10^{-4}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui tombe à 3.10^{-4} si on va au bout des calculs ($= (78527 - 78498)/78498$).

Calculs pour 10^5

res = Li(10^5) = 9629.0
– (1.0/2.0) * 25.0 = 9616.500000
– (1.0/3.0) * 8.0 = 9613.833333
– (1.0/4.0) * 4.0 = 9612.833333
– (1.0/5.0) * 3.0 = 9612.233333
– (1.0/6.0) * 2.0 = 9611.900000
– (1.0/7.0) * 2.0 = 9611.614286
– (1.0/8.0) * 2.0 = 9611.364286
– (1.0/9.0) * 2.0 = 9611.142063
– (1.0/10.0) * 2.0 = 9610.942063
– (1.0/11.0) * 2.0 = 9610.760245
– (1.0/12.0) * 2.0 = 9610.593579
– (1.0/13.0) * 2.0 = 9610.439732

$Erreur = (9616 - 9592)/9592 = 2.10^{-3}$ si on s'arrête à la racine carrée et divisée par 2 si on va au bout des calculs.

Calculs pour 10^4

res = Li(10^4) = 1245.0
– (1.0/2.0) * 25.0 = 1232.500000
– (1.0/3.0) * 8.0 = 1229.833333
– (1.0/4.0) * 4.0 = 1228.833333
– (1.0/5.0) * 3.0 = 1228.233333
– (1.0/6.0) * 2.0 = 1227.900000
– (1.0/7.0) * 2.0 = 1227.614286
– (1.0/8.0) * 2.0 = 1227.364286
– (1.0/9.0) * 1.0 = 1227.253175
– (1.0/10.0) * 1.0 = 1227.153175
– (1.0/11.0) * 1.0 = 1227.062266
– (1.0/12.0) * 1.0 = 1226.978932
– (1.0/13.0) * 1.0 = 1226.902009

$Erreur = (1232 - 1229)/1229 = 2.10^{-3}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui reste à 2.10^{-3} (en négatif) si on va au bout des calculs ($= (1226 - 1229)/1229$).

Calculs pour 10^3

$$\text{res} = \text{Li}(10^3) = 177.0$$

$$- (1.0/2.0) * 31.0 = 161.500000$$

$$- (1.0/3.0) * 4.0 = 160.166667$$

$$- (1.0/4.0) * 3.0 = 159.416667$$

$$- (1.0/5.0) * 2.0 = 159.016667$$

$$- (1.0/6.0) * 2.0 = 158.683333$$

$$- (1.0/7.0) * 1.0 = 158.540476$$

$$- (1.0/8.0) * 1.0 = 158.415476$$

$$- (1.0/9.0) * 1.0 = 158.304365$$

$Erreur = (161 - 168)/168 = -4.10^{-2}$ si on s'arrête à la racine carrée et qui devient -5.10^{-2} si on va au bout des calculs $(=(158-168)/168)$.

Après avoir étudié la note de Bernhard Riemann “*Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*” et en avoir programmé quelques formules, on aboutit au programme suivant, en C++, qui résume toute la puissance de la fonction Logarithme intégral $Li(x)$, qui permet l’obtention d’une excellente approximation du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné à partir de son logarithme intégral auquel on soustrait la moitié du nombre de nombres premiers inférieurs à sa racine carrée.

Présentons les résultats que l’on peut obtenir par programme (la colonne dans laquelle on soustrait directement le nombre de nombres premiers inférieurs à la racine du nombre considéré plutôt que la moitié d’un tel nombre est dû au fait d’une coquille de programmation initiale qui montre que l’une ou l’autre des possibilités donnent des résultats semblables (du moins jusqu’à 10^9).

x	$Li(x)$	$\sqrt{x}$	$\pi(\sqrt{x})$	$\pi(x)$	$Li(x) - \pi(\sqrt{x})$	$Li(x) - (1/2)\pi(\sqrt{x})$
10^2	29	10	4	25	25	27
10^3	177	31	11	168	166	172
10^4	1 245	100	25	1 229	1 220	1 233
10^5	9 629	316	65	9 592	9 564	9 597
10^6	78 627	1 000	168	78 498	78 459	78 543
10^7	664 917	3 162	446	664 579	664 471	664 694
10^8	5 762 208	10 000	1 229	5 761 455	5 760 979	5 761 594
10^9	50 849 233	31 622	3 401	50 847 534	50 845 832	50 847 533

Voici le tableau des écarts relatifs à $\pi(x)$.

x	$\frac{\pi(x) - (Li(x) - \pi(\sqrt{x}))}{\pi(x)}$	$\frac{\pi(x) - (Li(x) - \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}))}{\pi(x)}$
10^2	0	-0.08 (= -2/25)
10^3	0.0119 (= 2/168)	0.0238 (= 4/168)
10^4	0.0073 (= 9/1 229)	0.003254 (= 4/1 229)
10^5	0.0029 (= 28/9 592)	0.00052126 (= 5/9 592)
10^6	0.00049 (= 39/78 498)	0.00057326 (= 45/78 498)
10^7	0.000162 (= 108/664 579)	0.000173041 (= 115/664 579)
10^8	0.00008261 (= 476/5 761 455)	0.000024125 (= 139/5 761 455)
10^9	0.00000586065 (= 298/50 847 534)	$1,96 \cdot 10^{-8}$ (= 1/50 847 533)

```

1  #include <iostream>
2  #include <stdio.h>
3  #include <cmath>
4  #include <fstream>
5
6  int prime(int atester) {
7      bool pastrouve=true;
8      unsigned long k = 2;
9
10     if (atester == 1) return 0;
11     if (atester == 2) return 1;
12     if (atester == 3) return 1;
13     if (atester == 5) return 1;
14     if (atester == 7) return 1;
15     while (pastrouve) {
16         if ((k * k) > atester) return 1;
17         else
18             if ((atester % k) == 0) return 0 ;
19             else k++;
20     }
21 }
22
23 int main (int argc, char* argv[]) {
24     int n, i, nbpremiers ;
25     float res, rac, nbpremrac ;
26     float logainte[10010] ;
27
28     std::ifstream fichier("petitlog", std::ios::in);
29     if (fichier) {
30         float flotte ;
31
32         i = 2 ;
33         while (not fichier.eof()) {
34             fichier >> flotte ;
35             logainte[i] = flotte-1.04516378011749 ;
36             //std::cout << "li(" << i << ") = " << logainte[i] << "\n" ;
37             i = i+1 ;
38         }
39         fichier.close();
40     }
41     else std::cerr << "Impossible d'ouvrir le fichier !" << std::endl ;
42
43     for (n = 1 ; n <= 10000 ; ++n) {
44         rac = sqrt(n) ;
45         nbpremrac = 0 ;
46         nbpremiers = 0 ;
47         for (i = 2 ; i <= rac ; ++i) if (prime(i)) nbpremrac = nbpremrac+1 ;
48         for (i = 2 ; i <= n ; ++i) if (prime(i)) nbpremiers = nbpremiers+1 ;
49         res = logainte[n]-0.5*nbpremrac ;
50         std::cout << n << " -> " << nbpremiers << " approx " << res ;
51         std::cout << " erreur = " << (nbpremiers-res)/nbpremiers << "\n" ;
52     }
53 }

```

Les premières et dernières lignes de l'exécution de ce programme sont :

```
1 3 -> 2 approx 1.11842 erreur 0.440788
2 4 -> 2 approx 1.42242 erreur 0.288789
3 5 -> 3 approx 2.08942 erreur 0.303525
4 6 -> 3 approx 2.67706 erreur 0.107647
5 7 -> 4 approx 3.21189 erreur 0.197028
6 8 -> 4 approx 3.70855 erreur 0.0728613
7 9 -> 4 approx 3.67607 erreur 0.0809815
8 10 -> 4 approx 4.12044 erreur -0.0301089
9 11 -> 5 approx 4.54585 erreur 0.0908309
10 12 -> 5 approx 4.95538 erreur 0.00892324
11 13 -> 6 approx 5.35138 erreur 0.108103
12 14 -> 6 approx 5.73566 erreur 0.0440563
13 15 -> 6 approx 6.10966 erreur -0.0182769
14 16 -> 6 approx 6.47455 erreur -0.0790921
15 17 -> 7 approx 6.8313 erreur 0.0240998
16 18 -> 7 approx 7.18071 erreur -0.0258157
17 19 -> 8 approx 7.52346 erreur 0.0595673
18 20 -> 8 approx 7.86014 erreur 0.017483
19 21 -> 8 approx 8.19123 erreur -0.0239042
20 22 -> 8 approx 8.51719 erreur -0.0646486
21 23 -> 9 approx 8.83838 erreur 0.0179575
22 24 -> 9 approx 9.15515 erreur -0.017239
23 25 -> 9 approx 8.96779 erreur 0.00357861
24 26 -> 9 approx 9.27657 erreur -0.03073
25 27 -> 9 approx 9.58172 erreur -0.0646358
26 28 -> 9 approx 9.88346 erreur -0.0981627
27 29 -> 10 approx 10.182 erreur -0.0181988
28 30 -> 10 approx 10.4775 erreur -0.0477468
29 31 -> 11 approx 10.7701 erreur 0.0209031
30 32 -> 11 approx 11.0599 erreur -0.00544799
31 33 -> 11 approx 11.3472 erreur -0.0315625
32
33
34 9971 -> 1229 approx 1229.44 erreur -0.00117498
35 9972 -> 1229 approx 1229.55 erreur -0.00126345
36 9973 -> 1229 approx 1229.66 erreur -0.000537149
37 9974 -> 1229 approx 1229.77 erreur -0.000625449
38 9975 -> 1229 approx 1229.88 erreur -0.000713848
39 9976 -> 1229 approx 1229.99 erreur -0.000802247
40 9977 -> 1229 approx 1230.09 erreur -0.000890646
41 9978 -> 1229 approx 1230.2 erreur -0.000978946
42 9979 -> 1229 approx 1230.31 erreur -0.00106735
43 9980 -> 1229 approx 1230.42 erreur -0.00115565
44 9981 -> 1229 approx 1230.53 erreur -0.00124404
45 9982 -> 1229 approx 1230.64 erreur -0.00133244
46 9983 -> 1229 approx 1230.75 erreur -0.00142074
47 9984 -> 1229 approx 1230.85 erreur -0.00150914
48 9985 -> 1229 approx 1230.96 erreur -0.00159744
49 9986 -> 1229 approx 1231.07 erreur -0.00168584
50 9987 -> 1229 approx 1231.18 erreur -0.00177424
51 9988 -> 1229 approx 1231.29 erreur -0.00186254
52 9989 -> 1229 approx 1231.4 erreur -0.00195094
53 9990 -> 1229 approx 1231.51 erreur -0.00203924
54 9991 -> 1229 approx 1231.61 erreur -0.00212764
55 9992 -> 1229 approx 1231.72 erreur -0.00221594
56 9993 -> 1229 approx 1231.83 erreur -0.00230434
57 9994 -> 1229 approx 1231.94 erreur -0.00239264
58 9995 -> 1229 approx 1232.05 erreur -0.00248104
59 9996 -> 1229 approx 1232.16 erreur -0.00256934
60 9997 -> 1229 approx 1232.27 erreur -0.00265774
61 9998 -> 1229 approx 1232.37 erreur -0.00274604
62 9999 -> 1229 approx 1232.48 erreur -0.00283443
63 10000 -> 1229 approx 1232.59 erreur -0.00292273
```

En python, le programme est plus court, et plus rapide à l'exécution :

```
1 import mpmath
2 from mpmath import *
3 from math import *
4
5 def prime(atester):
6     pastrouve = True
7     k = 2
8     if (atester == 1): return False
9     if (atester == 2): return True
10    if (atester == 3): return True
11    if (atester == 5): return True
12    if (atester == 7): return True
13    while (pastrouve):
14        if ((k * k) > atester):
15            return True
16        else:
17            if ((atester % k) == 0):
18                return False
19            else: k=k+1
20
21 def pi(x):
22     nbpremiers = 0
23     for y in range(1,x):
24         if prime(y):
25             nbpremiers=nbpremiers+1
26     return nbpremiers
27
28 x=int(input())
29 res = li(x)-li(2)
30 a = pi(x)
31 print "pi(x) = %d" %a
32 b = int(sqrt(x))
33 c = pi(b)
34 res=res-(1.0/2.0)*c
35 print "res = %10.6f" %res
36 erreur = (res-a)/a
37 print "erreur = %10.6f" %erreur
```

Par exécution des programmes en python, on obtient les résultats suivants, légèrement différents de ceux obtenus

en c++ : $x = 100$ $\pi(x) = 25$

$\text{res} = 27.080978$

$\text{erreur} = 0.083239$

$x = 1000$ $\pi(x) = 168$

$\text{res} = 171.564494$

$\text{erreur} = 0.021217$

$x = 10000$ $\pi(x) = 1229$

$\text{res} = 1232.592052$

$\text{erreur} = 0.002923$

$x = 100000$ $\pi(x) = 9592$

$\text{res} = 9596.263837$

$\text{erreur} = 0.000445$

$x = 1000000$ $\pi(x) = 78498$

$\text{res} = 78542.503996$

$\text{erreur} = 0.000567$

$x = 10000000$ $\pi(x) = 664579$
 $\text{res} = 664694.359885$
 $\text{erreur} = 0.000174$

$x = 100000000$ $\pi(x) = 5761455$
 $\text{res} = 5761593.830284$
 $\text{erreur} = 0.000024$

Référence

Traduction en français par L.Laugel in *Riemann, œuvres mathématiques*, Gauthier-Villars, 1898., de *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, *Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860)* 671-680.

On étudie ici les calculs de la formule 2) ci-dessous fournie dans l'article que Riemann a consacré au nombre de nombres premiers pour les nombres $995\,907$, 10^6 , 10^7 , 10^8 , 10^9 .

$$1) f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots$$

$$2) \pi(x) = \frac{\mu(2)}{2}f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\mu(3)}{3}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{\mu(4)}{4}f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{\mu(5)}{5}f\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots = \sum \frac{\mu(k)}{k}f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

La formule 2) utilise les valeurs de f calculées au préalable qu'on fournit dans le tableau ci-après en regard des racines k-ièmes des nombres choisis (à gauche de la flèche dans chaque case, la racine k-ième, à droite, son image par f).

f	$\sqrt[2]{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[5]{x}$	$\sqrt[6]{x}$	$\sqrt[7]{x}$	$\sqrt[10]{x}$
995 907	997.951 → 176	99.8634 → 28	15.8359 → 7	9.99317 → 5	7.19264 → 4	3.97944 → 2	
10^6	1000 → 176	100 → 28	15.8489 → 7	10 → 5	7.19686 → 4	3.98107 → 2	
10^7	3162.28 → 458	215.443 → 52	25.1189 → 11	14.678 → 7	10 → 5	5.01187 → 3	
10^8	10000 → 1247	464.159 → 96	39.8107 → 14	21.5443 → 9	13.895 → 7	6.30957 → 3	
10^9	31622.8 → 3428	1000 → 176	63.0957 → 21	31.6228 → 13	19.307 → 9	7.94328 → 4	
f	$\sqrt[11]{x}$	$\sqrt[12]{x}$	$\sqrt[13]{x}$	$\sqrt[14]{x}$	$\sqrt[15]{x}$	$\sqrt[17]{x}$	$\sqrt[19]{x}$
995 907	3.50988 → 2	2.89335 → 1	2.68191 → 1	2.5112 → 1	2.25339 → 1	2.06869 → 1	
10^6	3.51119 → 2	2.89427 → 1	2.6827 → 1	2.51189 → 1	2.25393 → 1	2.06914 → 1	
10^7	4.32876 → 2	3.45511 → 2	3.16228 → 1	2.92864 → 1	2.58086 → 1	2.33572 → 1	
10^8	5.3356 → 3	4.12463 → 2	3.72759 → 2	3.41455 → 2	2.95521 → 1	2.63665 → 1	
10^9	6.57933 → 3	4.92388 → 2	4.39397 → 2	3.98107 → 2	3.38386 → 2	2.97635 → 1	
f	$\sqrt[20]{x}$	$\sqrt[21]{x}$	$\sqrt[22]{x}$	$\sqrt[23]{x}$	$\sqrt[24]{x}$	$\sqrt[25]{x}$	
995 907	—	—	—	—	—	—	
10^6	—	—	—	—	—	—	
10^7	2.15443 → 1	2.08057 → 1	2.01534 → 1	—	—	—	
10^8	2.4041 → 1	2.31013 → 1	2.22754 → 1	2.03092 → 1	—	—	
10^9	2.6827 → 1	2.56502 → 1	2.46209 → 1	2.21898 → 1	2.04336 → 1	—	

La fonction de Moebius "équilibre" à peu près les ajouts et les soustractions.

x	$\pi(x)$	formule 2)
995 907	78 262	78 199
1 000 000	78 498	78 627
10 000 000	664 579	664 555
100 000 000	5 761 455	5 760 896
1 000 000 000	50 847 534	50 845 856

Ci-dessous, le tableau des écarts à $\pi(x)$, plus parlant :

x	$\pi(x)$	formule 2(x) - $\pi(x)$
995 907	78 262	-63
1 000 000	78 498	+129
10 000 000	664 579	-24
100 000 000	5 761 455	-559
1 000 000 000	50 847 534	-1678

Ci-dessous les valeurs calculées au fur et à mesure de l'application de la formule 2 pour les nombres choisis.

Valeurs intermédiaires dans les calculs de la formule 2 pour 995907

res = 78 298 (= f(995907)).

-(1.0/2.0)*176 → 78210.00000

-(1.0/3.0)*28 → 78200.66667

-(1.0/5.0)*7 → 78199.26667

+(1.0/6.0)*5 → 78200.10000

-(1.0/7.0)*4 → 78199.52857

Emerveillement (Denise Vella-Chemla, 8.7.2017)

Après avoir étudié la note de Bernhard Riemann “*Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*” et en avoir programmé quelques formules, on aboutit au programme suivant, en C++, qui résume toute la puissance de la fonction Logarithme intégral $Li(x)$, qui permet l’obtention d’une excellente approximation du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné à partir de son logarithme intégral auquel on soustrait la moitié du nombre de nombres premiers inférieurs à sa racine carrée.

Présentons les résultats que l’on peut obtenir par programme (la colonne dans laquelle on soustrait directement le nombre de nombres premiers inférieurs à la racine du nombre considéré plutôt que la moitié d’un tel nombre est dû au fait d’une coquille de programmation initiale qui montre que l’une ou l’autre des possibilités donnent des résultats semblables (du moins jusqu’à 10^9).

x	$Li(x)$	$\sqrt{x}$	$\pi(\sqrt{x})$	$\pi(x)$	$Li(x) - \pi(\sqrt{x})$	$Li(x) - (1/2)\pi(\sqrt{x})$
10^2	29	10	4	25	25	27
10^3	177	31	11	168	166	172
10^4	1 245	100	25	1 229	1 220	1 233
10^5	9 629	316	65	9 592	9 564	9 597
10^6	78 627	1 000	168	78 498	78 459	78 543
10^7	664 917	3 162	446	664 579	664 471	664 694
10^8	5 762 208	10 000	1 229	5 761 455	5 760 979	5 761 594
10^9	50 849 233	31 622	3 401	50 847 534	50 845 832	50 847 533

Voici le tableau des écarts relatifs à $\pi(x)$.

x	$\frac{\pi(x) - (Li(x) - \pi(\sqrt{x}))}{\pi(x)}$	$\frac{\pi(x) - (Li(x) - \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}))}{\pi(x)}$
10^2	0	-0.08 (= -2/25)
10^3	0.0119 (= 2/168)	0.0238 (= 4/168)
10^4	0.0073 (= 9/1 229)	0.003254 (= 4/1 229)
10^5	0.0029 (= 28/9 592)	0.00052126 (= 5/9 592)
10^6	0.00049 (= 39/78 498)	0.00057326 (= 45/78 498)
10^7	0.000162 (= 108/664 579)	0.000173041 (= 115/664 579)
10^8	0.00008261 (= 476/5 761 455)	0.000024125 (= 139/5 761 455)
10^9	0.00000586065 (= 298/50 847 534)	$1,96 \cdot 10^{-8}$ (= 1/50 847 533)

Différence entre les fonctions f et F de l'article de Riemann concernant le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée (22.8.2017)

Dans son article si important, Riemann utilise deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ (cette dernière correspondant à $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x) dont on étudie ci-après ce qui les distingue lorsqu'on limite, comme préconisé dans la note de Riemann, ces sommes à un nombre fini de termes.

$\pi(x)$ étant nul lorsque $x < 2$, on prendra comme derniers éléments des sommes les logarithmes à base 2.

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \frac{1}{k} F\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$(2) \quad F(x) = \sum_{k \geq 2} \frac{\mu(k)}{k} f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

$$(3) \quad f\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{k} \log_2 x \rfloor} \frac{1}{l} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(4) \quad F\left(x^{\frac{1}{k}}\right) = \sum_{l \geq 2} \frac{\mu(l)}{l} f\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(1) + (4) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \frac{1}{k} \sum_{l \geq 2} \frac{\mu(l)}{l} f\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$= \sum_{k=1, l \geq 2}^{k=\lfloor \frac{\log_2 x}{l} \rfloor} \frac{\mu(l)}{kl} f\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(2) + (3) \quad F(x) = \sum_{k \geq 2} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{1}{k} \log_2 x \rfloor} \frac{1}{l} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$= \sum_{k \geq 2, l=1}^{l=\lfloor \frac{1}{k} \log_2 x \rfloor} \frac{\mu(k)}{kl} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

$$(\text{en échangeant } k \text{ et } l) \quad F(x) = \sum_{l \geq 2, k=1}^{k=\lfloor \frac{1}{l} \log_2 x \rfloor} \frac{\mu(l)}{kl} F\left(x^{\frac{1}{kl}}\right)$$

On voit que la différence entre les deux fonctions se situe au niveau du dernier terme de la somme qui est $k = \lfloor \frac{\log_2 x}{l} \rfloor$ pour le calcul de $f(x)$ et $\lfloor \frac{1}{l} \log_2 x \rfloor$ pour le calcul de $F(x)$.

Moyenne des parties fractionnaires des parties réelles des zéros de zêta (Denise Vella-Chemla, 4.3.2018)

On calcule par le programme python suivant les moyennes des parties fractionnaires des parties réelles des zéros de zêta qui sont fournies par Odlyzko ici http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/index.html.

```
1 import math
2 from math import *
3
4 zeros=[]
5 with open('leszerosdezeta', 'r') as f:
6     for p in f.readlines():
7         z = float(p.split()[1])
8         zeros.append(z)
9 f.close()
10 print(' ')
11 somme=0.0
12 for i in range(0,100000):
13     res = zeros[i]-floor(zeros[i])
14     somme=somme+res
15     print(res)
16 print('moyenne')
17 print(somme/i)
```

Pour le fichier contenant 100000 zéros, la moyenne obtenue est : 0.499356115471.

Pour le fichier des zéros autour de 10^{12} , la moyenne obtenue est : 0.499758301944.

Pour le fichier des zéros autour de 10^{21} , la moyenne obtenue est : 0.496515278444.

Pour le fichier des zéros autour de 10^{22} , la moyenne obtenue est : 0.4983445377.

Pour le très gros fichier fourni par Odlyzko et contenant 2001053 zéros de zêta, la moyenne obtenue est : 0.500277516477.

On refait quelques tests, en les complétant de tests sur un fichier de nombres aléatoires de l'intervalle $[0, 1]$.

On obtient pour le fichier contenant les 2001053 zéros fournis par Odlyzko :

- moyenne = 0.50027726647,
- médiane = 0.499993778489,
- écart-type = 0.288607100069.

On obtient pour le fichier contenant des nombres aléatoires :

- moyenne = 0.500009450015,
- médiane = 0.499661660179,
- écart-type = 0.28860413121.

```

1 import math
2 from math import *
3 import numpy
4 from numpy import *
5 import numpy.random
6
7 tabzeros=fromfile('leszerostresgrosfichier',dtype=float,count=-1,sep=' ')
8 tab2=numpy.random.random(tabzeros.size)
9 print(' ')
10 print(tabzeros.ndim)
11 print(tabzeros.size)
12 for i in range(tabzeros.size):
13     tabzeros[i]=tabzeros[i]-floor(tabzeros[i])
14 print('tab1')
15 print(mean(tabzeros))
16 print(median(tabzeros))
17 print(std(tabzeros))
18 print('tab2')
19 print(mean(tab2))
20 print(median(tab2))
21 print(std(tab2))

```

Toujours est-il que le rapport $\frac{50\,847\,633}{50\,847\,534}$ pour $x = 10^9$ vaut 1.000001947 et que donc, puisque $f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\pi\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{5}\pi\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \dots$, il suffirait, si l'hypothèse de Riemann était démontrée, pour trouver quasi-exactement le nombre de nombres premiers inférieurs à x de calculer $Li(x) = li(x) - li(2)$ et de lui soustraire la moitié du nombre de nombres premiers inférieurs à la racine carrée de x , ainsi que le tiers du nombre de nombres premiers inférieurs à la racine cubique de x , ainsi que le quart du nombre de nombres premiers de la racine quatrième de x , en poursuivant les retraits jusqu'à la dernière racine k -ième de x supérieure ou égale à 2.

Programme de calcul de la formule de Connes-Consani d'une fonction de comptage liée à la fonction zêta de Riemann (Denise Vella-Chemla, 22.4.2018)

On fournit ici le programme de calcul de la fonction de comptage fournie dans le cours d'Alain Connes au Collège de France de l'année 2008-2009 "Le monoïde des classes d'Adèles", consultable ici : https://www.college-de-france.fr/media/alain-connes/UPL59830_connes_res0809.pdf.

Cette fonction de comptage $N(q)$ vaut, pour $q \in [1, \infty)$ et Z l'ensemble des zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann :

$$N(q) = q - \sum_{\rho \in Z} \text{order}(\rho) q^{\rho} + 1$$

```

1  import math
2  from math import *
3  import cmath
4  from cmath import *
5  import mpmath
6  from mpmath import *
7  import scipy
8  from scipy import integrate
9  import numpy
10 from numpy import *
11
12 def prime(atester):
13     pastrouve = True
14     k = 2
15     if (atester == 1): return False
16     if (atester == 2): return True
17     if (atester == 3): return True
18     if (atester == 5): return True
19     if (atester == 7): return True
20     while (pastrouve):
21         if ((k * k) > atester):
22             return True
23         else:
24             if ((atester % k) == 0):
25                 return False
26             else: k=k+1
27
28     """for x in range(1,1000000):
29         if prime(x):
30             print(x)"""
31
32     """zeros=[0.5+ 14.1347251417346937904572519835624766j,
33              0.5- 14.1347251417346937904572519835624766j,
34              0.5+ 21.0220396387715549926284795938969162j,
35              0.5- 21.0220396387715549926284795938969162j,..."""

```

```

1 zeros=[]
2 with open('leszerosdezeta', 'r') as f:
3     for p in f.readlines():
4         z = float(p.split()[1])
5         zeros.append(0.5+z*j)
6         zeros.append(0.5-z*j)
7 f.close()
8 """
9 print('')
10 print('les zeros')
11 for z in zeros:
12     print(z)
13 """
14 print('')
15 print('la fonction')
16 for p in range(2,12):
17     if (prime(p)):
18         for l in range(1,12):
19             x = p**l
20             s=''
21             s+='{0:d}~{1:d}={2:d}'.format(p,l,x)
22             print('')
23             print(s)
24             somme = x+1
25             for z in zeros:
26                 """print(z.imag)"""
27                 somme = somme - x**z
28             print(somme)

```

On note dans les tableaux ci-dessous les résultats du calcul de $N(q)$ avec $q = p^l$ pour p nombre premier inférieur à 48 et l compris entre 1 et 12, avec Z l'ensemble des 200000 premiers zéros non-triviaux de zêta (100000 de parties imaginaires positives et leur conjugué) fournis sur la toile par Odlyzko. On voit clairement la formule être “de plus en plus” juste, plus la taille des nombres augmente.

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
2^1	2	16526.022751118	3^1	3	26202.3597929168	5^1	5	38379.993254418
2^2	4	16526.8723080138	3^2	9	26193.5141189349	5^2	25	38376.4744394744
2^3	8	16541.8346696773	3^3	27	26215.9897049863	5^3	125	38497.7951430358
2^4	16	16529.9378096922	3^4	81	26215.0292622448	5^4	625	38212.7669195398
2^5	32	16517.1894144178	3^5	243	26234.1241967476	5^5	3125	39692.8475347931
2^6	64	16541.3837311068	3^6	729	25557.1812357914	5^6	15625	38978.1712748674
2^7	128	16596.457314137	3^7	2187	25139.34262301	5^7	78125	-21909.0320787703
2^8	256	16530.1027525653	3^8	6561	22813.9543148104	5^8	390625	34087.6262616789
2^9	512	16677.4128374294	3^9	19683	60904.2606401426	5^9	1953125	1822603.05018823
2^{10}	1024	16924.5256439669	3^{10}	59049	19819.9498798134	5^{10}	9765625	8812263.10212509
2^{11}	2048	16487.7126061848	3^{11}	177147	128839.908639892	5^{11}	48828125	53338264.3395279

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
7^1	7	46404.9338047014	11^1	11	57188.4645348426
7^2	49	46376.3368749039	11^2	121	57156.8354495423
7^3	343	46397.6984599656	11^3	1331	56511.0593488764
7^4	2401	42855.8567832658	11^4	14641	36201.8474304666
7^5	16807	40850.3069858886	11^5	161051	433036.226139666
7^6	117649	92518.822968482	11^6	1771561	1037835.49029106
7^7	823543	943094.788109194	11^7	19487171	19883161.943641
7^8	5764801	5592070.70530986	11^8	214358881	222968138.395264
7^9	40353607	40259900.2377517	11^9	2357947691	2375040033.44047
7^{10}	282475249	275547273.890145	11^{10}	25937424601	25929023679.1753
7^{11}	1977326743	2013531665.95512	11^{11}	285311670611	285325042242.14

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
13^1	13	61173.455982275	17^1	17	67570.864210361
13^2	169	61152.1842074158	17^2	289	67488.2796872391
13^3	2197	61595.0817517291	17^3	4913	64494.4571301473
13^4	28561	35119.101318525	17^4	83521	95126.1413652707
13^5	371293	842806.502153679	17^5	1419857	1527796.0967923
13^6	4826809	4844105.03767551	17^6	24137569	26266974.9339189
13^7	62748517	66948670.668413	17^7	410338673	405312134.16939
13^8	815730721	804835326.305623	17^8	6975757441	6972350256.91798
13^9	10604499373	10625393957.1387	17^9	118587876497	118773726755.062
13^{10}	137858491849	137927288531.251	17^{10}	2015993900449	2016130632947.47
13^{11}	1792160394037	1792181268163.27	17^{11}	34271896307633	34271018666148.3

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
19^1	19	70244.6576283392	23^1	23	74795.6836331307
19^2	361	70626.4147101706	23^2	529	74556.3563989949
19^3	6859	71558.4933286857	23^3	12167	61902.2398292989
19^4	130321	120687.966682127	23^4	279841	90297.7769623467
19^5	2476099	3108778.96872056	23^5	6436343	5808412.75514133
19^6	47045881	41647361.006971	23^6	148035889	145563305.665317
19^7	893871739	888579108.932336	23^7	3404825447	3382857937.92773
19^8	16983563041	17062763333.8805	23^8	78310985281	78448993931.1218
19^9	322687697779	322562612953.024	23^9	1801152661463	1801519334170.95
19^{10}	6131066257801	6129947084940.08	23^{10}	41426511213649	41426393227455.9
19^{11}	116490258898219	116488446544531.0	23^{11}	952809757913927	952800960795587.0

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
29^1	29	80323.6441199599	31^1	31	81900.3203876187
29^2	841	80751.8276029748	31^2	961	81705.2330983772
29^3	24389	51337.2372113353	31^3	29791	33791.6242719332
29^4	707281	890987.725034893	31^4	923521	982442.746257106
29^5	20511149	17317106.4403853	31^5	28629151	27728902.3587587
29^6	594823321	605265022.769502	31^6	887503681	896751867.654895
29^7	17249876309	17185843641.7054	31^7	27512614111	27517818436.106
29^8	500246412961	500492898863.202	31^8	852891037441	853222584696.395
29^9	14507145975869	14510068897520.6	31^9	26439622160671	26437295777642.8
29^{10}	420707233300201	420710600489541.0	31^{10}	819628286980801	819638888298087.0
29^{11}	12200509765705829	$1.22006051245098e + 16$	31^{11}	25408476896404831	$2.5408429837307e + 16$

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
37^1	37	86115.7665596133	41^1	41	88557.9701305219
37^2	1369	85426.9937307177	41^2	1681	89285.021388377
37^3	50653	118992.562151978	41^3	68921	67825.0760413148
37^4	1874161	1924935.75138671	41^4	2825761	3290709.52789768
37^5	69343957	67824350.7908732	41^5	115856201	112903420.619561
37^6	2565726409	2610041137.45719	41^6	4750104241	4739603369.24744
37^7	94931877133	95041507191.6032	41^7	194754273881	194660225230.829
37^8	3512479453921	3512577903295.74	41^8	7984925229121	7986619198004.87
37^9	129961739795077	129952955798711.0	41^9	327381934393961	327384739370054.0
37^{10}	4808584372417849	$4.8085634376082e + 15$	41^{10}	13422659310152401	$1.34226913543118e + 16$
37^{11}	177917621779460413	$1.7791766795618e + 17$	41^{11}	550329031716248441	$5.50329233007557e + 17$

p^l	q	$N(q)$	p^l	q	$N(q)$
43^1	43	89681.4528919395	47^1	47	91791.6074703618
43^2	1849	88460.612053587	47^2	2209	88865.4662431519
43^3	79507	108705.324306434	47^3	103823	174505.824660669
43^4	3418801	4147830.65155219	47^4	4879681	6082031.07152182
43^5	147008443	144403785.698815	47^5	229345007	237611519.978432
43^6	6321363049	6349617605.81833	47^6	10779215329	10716283351.5966
43^7	271818611107	272082250666.8	47^7	506623120463	506835012007.946
43^8	11688200277601	11687472448563.0	47^8	23811286661761	23810227304479.1
43^9	502592611936843	502593505096544.0	47^9	1119130473102767	$1.11911124064231e + 15$
43^{10}	21611482313284249	$2.16114155590442e + 16$	47^{10}	52599132235830049	$5.25990765071702e + 16$
43^{11}	929293739471222707	$9.29293155038425e + 17$	47^{11}	2472159215084012303	$2.47215916414308e + 18$