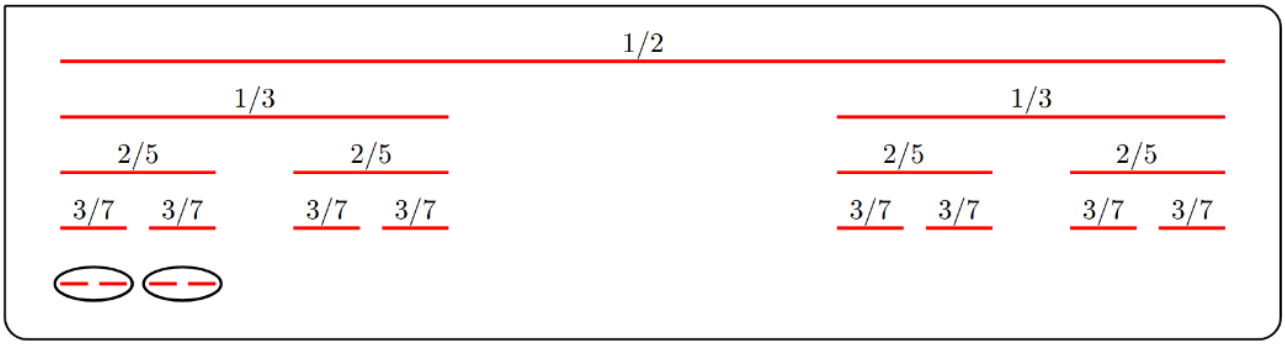
Fonction zêta de l'ensemble de la castafiore, géométrie des intervalles manquants, abscisse de convergence et comportement au bord
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia chatgpt, 12 novembre 2026

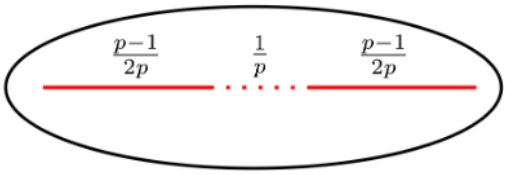
Je fournis à l'ia chatgpt les deux notes ci-dessous et lui demande de les amener plus loin.

[1]https://denisevellachemla.eu/castafiore.pdf
[2]https://denisevellachemla.eu/castafiore-Falconer-lumo-dvc-20260929.pdf

On peut se rappeler de l'idée de l'ensemble de la castafiore, qui est un ensemble de Cantor "multi-premiers".



À chaque niveau, on "évide" ou on "ajoure" une portion de l'intervalle qui est de longueur $\frac{1}{p}$ et on conserve deux portions de l'intervalle chacune de longueur $\frac{p-1}{2p}$.



L'intégralité de la suite de cette note a été rédigée par l'ia chatgpt.

1 Fonction zêta associée à l'ensemble de la castafiore

1.1 Résumé de la section 1

On reprend la construction réelle de l'ensemble de la castafiore et la série

$$Z_C(s) = \sum_{k\geq 2} 2^{k-2} g_k^s,$$

où g_k est la longueur de l'intervalle manquant créé au niveau du premier p_k. L'analyse conduit à quatre conclusions précises. Premièrement, Z_C est la fonction zêta géométrique de la chaîne fractale

formée par les intervalles complémentaires de la castafiore. Deuxièmement, son abscisse de convergence absolue est 1, mais la série converge absolument au point frontière $s = 1$. Troisièmement, sa valeur en ce point est exactement $Z_C(1) = \frac{1}{2}$. Quatrièmement, elle est continue à droite en 1, mais sa dérivée à droite vaut $-\infty$. En revanche, ces résultats ne fournissent pas encore de prolongement méromorphe : l'existence et la localisation de dimensions complexes restent des questions ouvertes.

1.2 Objet et conventions d'indexation

On note

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < p_4 = 7 < \cdots$$

la suite des nombres premiers. La construction commence par l'intervalle $[0, 1]$, puis le premier niveau élimine la moitié correspondant aux entiers pairs et laisse $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On numérote ce niveau par $k = 1$ et l'on pose

$$t_1 = \frac{1}{2}, \qquad M_1 = 1.$$

Au niveau $k \geq 2$, chaque intervalle conservé au niveau précédent donne naissance à deux intervalles de même longueur, situés de part et d'autre de l'intervalle manquant central associé au premier p_k. La longueur des intervalles conservés vérifie

$$t_k = t_{k-1} \frac{p_k - 1}{2p_k}, \qquad M_k = 2^{k-1}. \tag{1}$$

Ainsi

$$t_k = 2^{-k} \prod_{j=2}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right). \tag{2}$$

Les premiers exemples sont

$$t_1 = \frac{1}{2}, \qquad t_2 = \frac{1}{6}, \qquad t_3 = \frac{1}{15} = \frac{2}{30}, \qquad t_4 = \frac{1}{35} = \frac{6}{210}.$$

Ils concordent avec les longueurs indiquées dans la note originale.

L'intervalle manquant central créé au niveau k a pour longueur

$$g_k = t_{k-1} - 2t_k = \frac{t_{k-1}}{p_k}. \tag{3}$$

Il y a exactement $M_{k-1} = 2^{k-2}$ intervalles manquants de cette longueur au niveau k.

Remarque : les indices sont importants. Le premier intervalle manquant de la construction considérée ici correspond à $p_2 = 3$ et a longueur $g_2 = \frac{t_1}{3} = \frac{1}{6}$. L'intervalle manquant associé à $p_3 = 5$ a longueur $g_3 = \frac{t_2}{5} = \frac{1}{30}$ et apparaît en deux exemplaires. C'est pourquoi la multiplicité est 2^{k-2} et non 2^{k-1}.

1.3 La série zêta est la fonction zêta géométrique des intervalles manquants

On définit, pour $s \in \mathbb{C}$ dans le demi-plan où la série converge,

$$Z_C(s) = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} g_k^s. \tag{4}$$

Comme chaque niveau k crée 2^{k-2} intervalles manquants de longueur g_k, cette série s'écrit aussi

$$Z_C(s) = \sum_{\substack{\text{intervalles manquants } I \\ \text{de la construction}}} |I|^s,$$

les intervalles manquants étant comptés avec leur multiplicité. C'est exactement l'objet appelé *fonction zêta géométrique* (ou fonction zêta d'une chaîne fractale) dans la littérature sur les chaînes fractales.

Cette identification est plus qu'une analogie de vocabulaire : les termes de la série sont précisément les longueurs des composantes connexes bornées du complémentaire de l'ensemble limite, élevées à la puissance s. La note de Falconer traduite dans le dossier rappelle que, pour une chaîne fractale de longueurs complémentaires (ℓ_j), la série $\sum_j \ell_j^s$ a pour abscisse de convergence la dimension de boîte supérieure de l'ensemble frontière, et que son prolongement méromorphe, quand il existe, peut porter des informations géométriques fines.

1.4 Fonction asymptotique exacte des termes

À partir de (**??**) et (**??**), on obtient

$$2^{k-2} g_k = \frac{1}{2p_k} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right). \tag{5}$$

Le théorème de Mertens sur les produits eulériens affirme que

$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\, x},$$

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni. Le produit de (**??**) commence à 3 et s'arrête à p_{k-1} : il est donc asymptotiquement équivalent à $\dfrac{2e^{-\gamma}}{\log\, p_{k-1}}$. Il en résulte

$$2^{k-2} g_k \sim \frac{e^{-\gamma}}{p_k \log\, p_k}. \tag{6}$$

On utilise ici également $p_{k-1} \sim p_k$.

Par le théorème des nombres premiers, $p_k \sim k \log\, k$ et $\log\, p_k \sim \log\, k$. Ainsi

$$2^{k-2} g_k \sim \frac{e^{-\gamma}}{k(\log\, k)^2}. \tag{7}$$

Cette fonction asymptotique est le point de départ de l'étude de Z_C au voisinage de $s = 1$.

1.5 Abscisse de convergence

Posons $\sigma = \mathfrak{Re}(s)$. Puisque $g_k > 0$, la convergence absolue de (**??**) équivaut à la convergence de

$$\sum_{k\geq 2} 2^{k-2} g_k^{\sigma}.$$

D'après (**??**), le terme général s'écrit

$$2^{k-2} g_k^s = 2^{k-2-(k-1)s}\, p_k^{-s} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^s. \tag{8}$$

Pour s réel, le produit eulérien partiel est de taille comparable à $(\log\, p_k)^{-s}$ lorsque s reste fixé. Plus précisément, pour tout réel fixé σ, les estimations de Mertens donnent

$$2^{k-2} g_k^{\sigma} \asymp_{\sigma} \frac{2^{k(1-\sigma)}}{(p_k \log\, p_k)^{\sigma}},$$

à un facteur constant positif près.

Proposition 1 (abscisse de convergence)**.** *La série $Z_C(s)$ converge absolument pour $\mathfrak{Re}(s) \geq 1$ et diverge pour $\mathfrak{Re}(s) < 1$. Son abscisse de convergence absolue est donc*

$$\sigma_c = 1.$$

Démonstration. Si $\sigma > 1$, le facteur $2^{k(1-\sigma)}$ décroît exponentiellement, ce qui entraîne la convergence absolue. Si $\sigma = 1$, la fonction asymptotique (**??**) donne une série comparable à $\sum \dfrac{1}{k(\log\, k)^2}$, qui converge.

Si $\sigma < 1$, le facteur $2^{k(1-\sigma)}$ croît exponentiellement, tandis que le dénominateur $(p_k \log\, p_k)^{\sigma}$ n'a qu'une croissance polynomiale en k et en $\log\, k$. Le terme général ne tend donc pas vers zéro. La série diverge.

Pour s complexe, le module du terme est exactement $2^{k-2} g_k^{\mathfrak{Re}(s)}$, ce qui donne le même critère de convergence absolue.

□

Remarque [un point à ne pas confondre] : dire que l'abscisse de convergence vaut 1 ne signifie pas que la série diverge en 1. Ici, elle converge absolument au point frontière. C'est précisément ce que montre l'exposant $(\log\, k)^{-2}$ dans (**??**). Une série de référence est $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\log\, k)^2}$, convergente, alors que $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k \log\, k}$ diverge.

1.6 Valeur exacte au point $s = 1$

Il existe une démonstration plus géométrique de la valeur en 1, qui ne repose pas sur l'évaluation numérique de la série. Posons

$$L_k = M_k t_k = 2^{k-1} t_k,$$

la longueur totale des intervalles conservés au niveau k. La récurrence (**??**) donne

$$L_k = L_{k-1}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \tag{9}$$

Au niveau k, la longueur totale des intervalles manquants nouvellement retirés est

$$2^{k-2} g_k = M_{k-1}\frac{t_{k-1}}{p_k} = \frac{L_{k-1}}{p_k} = L_{k-1} - L_k.$$

La somme des longueurs des intervalles manquants jusqu'au niveau K est donc télescopique :

$$\sum_{k=2}^{K} 2^{k-2} g_k = \sum_{k=2}^{K} (L_{k-1} - L_k) = L_1 - L_K.$$

Or $L_1 = \dfrac{1}{2}$ et, par le produit de Mertens,

$$L_K = \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{K}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \longrightarrow 0.$$

On obtient le résultat exact suivant.

Proposition 2. *Avec la normalisation de la présente note,*

$$Z_C(1) = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{k-2} g_k = \frac{1}{2}.$$

Cette égalité exprime que la somme des longueurs de tous les intervalles manquants est égale à la longueur de l'intervalle initial $[0, \dfrac{1}{2}]$. Elle implique également que l'ensemble limite de la castafiore a une mesure de Lebesgue nulle.

Elle donne même une formule exacte pour l'erreur de troncature :

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{K} 2^{k-2} g_k = L_K = \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{K}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

Par Mertens,

$$L_K \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\, p_K} \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\, K}.$$

La convergence vers $\dfrac{1}{2}$ est donc particulièrement lente, de type $\dfrac{1}{\log\, K}$. Une somme partielle qui semble se stabiliser autour d'une valeur inférieure à $\dfrac{1}{2}$ ne permet pas de conclure que la limite est inférieure à $\dfrac{1}{2}$: le reste décroît logarithmiquement.

1.7 Comportement au bord : continuité, mais dérivée infinie

La convergence en $s = 1$ permet de définir $Z_C(1)$. Pour $h > 0$,

$$Z_C(1+h) = \sum_{k\geq 2} 2^{k-2} g_k \, g_k^h.$$

Comme $0 < g_k < 1$, les facteurs g_k^h sont inférieurs à 1 et tendent vers 1 lorsque $h \downarrow 0$. La convergence de $Z_C(1)$ et le théorème de convergence dominée pour les séries donnent

$$\lim_{h\downarrow 0} Z_C(1+h) = Z_C(1) = \frac{1}{2}.$$

La fonction est donc continue à droite au point 1.

La dérivée à droite présente toutefois un comportement singulier. Écrivons

$$b_k = 2^{k-2} g_k, \qquad \lambda_k = -\log\, g_k > 0.$$

Alors

$$\frac{Z_C(1+h) - Z_C(1)}{h} = -\sum_{k\geq 2} b_k \frac{1 - e^{-h\lambda_k}}{h}.$$

Pour chaque k, le quotient $\dfrac{1 - e^{-h\lambda_k}}{h}$ tend vers λ_k lorsque $h \downarrow 0$. De plus, il croît vers cette limite lorsque h décroît. Or

$$\lambda_k = -\log\, g_k = (k-1)\log\, 2 + \log\, p_k + \mathrm{O}(\log\, \log\, p_k),$$

et, avec (**??**),

$$b_k \lambda_k \asymp \frac{1}{(\log\, k)^2}.$$

La série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{(\log\, k)^2}$ diverge. Le théorème de convergence monotone appliqué aux termes positifs donne donc

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{Z_C(1+h) - Z_C(1)}{h} = -\infty. \tag{10}$$

Proposition 3. *La fonction Z_C est continue à droite en 1, mais n'admet pas de dérivée à droite finie en ce point ; son quotient différentiel à droite tend vers $-\infty$.*

Ce résultat est particulièrement intéressant : la convergence de la série au point frontière n'entraîne nullement une régularité différentiable à ce point. La série converge, mais la dérivation terme à terme y fait apparaître une série divergente.

1.8 Lien avec la dimension de la castafiore

La théorie des chaînes fractales fournit une interprétation géométrique de l'abscisse σ_c. Pour un compact $F \subset \mathbb{R}$ de mesure nulle, la série des longueurs des intervalles complémentaires

$$\zeta_F(s) = \sum_j \ell_j^s$$

a pour abscisse de convergence sa dimension de boîte supérieure (théorème classique présenté notamment dans Falconer, section 9.6). Dans notre cas, les intervalles complémentaires sont précisément les intervalles manquants créés aux niveaux successifs ; leur fonction zêta est $Z_C(s)$. L'abscisse 1 est ainsi cohérente avec la dimension de boîte supérieure égale à 1.

On peut aussi établir cette dimension par la construction de Moran. À chaque niveau, chaque intervalle donne deux descendants de rapport

$$c_k = \frac{p_k - 1}{2p_k},$$

et le nombre de descendants par intervalle est toujours 2. Les théorèmes de dimension pour les ensembles de Moran homogènes encadrent la dimension de Hausdorff entre deux quotients dont les dénominateurs diffèrent d'un seul facteur c_k et d'un facteur 2. Or

$$-\log \prod_{j=2}^{k} c_j = k \log\, 2 + \mathrm{O}(\log \log\, p_k),$$

si bien que les deux quotients tendent vers 1. Sous la convention cohérente d'indexation des niveaux, on obtient

$$\dim_H F = 1.$$

Puisque $F \subset \mathbb{R}$, toutes les dimensions de boîte sont au plus 1 ; l'inégalité générale $\dim_H F \leq \underline{\dim}_M F$ entraîne alors également

$$\underline{\dim}_M F = \overline{\dim}_M F = 1.$$

Il faut souligner le contraste :

$$\mathcal{L}^1(F) = 0, \qquad \dim_H(F) = 1.$$

La castafiore est donc un ensemble de mesure nulle, mais de dimension maximale dans la droite réelle. La valeur $Z_C(1) = \dfrac{1}{2}$ mesure la longueur totale des intervalles manquants dans l'intervalle initial ; elle ne mesure pas la taille de l'ensemble résiduel.

1.9 La question du prolongement analytique

Pour l'ensemble triadique de Cantor, les longueurs des intervalles manquants suivent une loi géométrique parfaite. La fonction zêta se réduit alors à une série géométrique et admet une expression rationnelle en 3^{-s} ; son prolongement méromorphe et ses pôles se calculent explicitement.

La castafiore est différente. Ses rapports de contraction sont

$$c_k = \frac{p_k - 1}{2p_k},$$

ils varient avec les nombres premiers et ne sont pas constants. La série peut être réécrite

$$Z_C(s) = 2^{s-2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k(1-s)}}{p_k^s} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)^s. \tag{11}$$

Cette formule est utile, mais elle ne se somme pas en une série géométrique ordinaire. Les théorèmes d'auto-similarité qui donnent immédiatement des équations de pôles ne s'appliquent donc pas tels quels.

À ce stade, il serait incorrect d'affirmer que Z_C possède un prolongement méromorphe à tout le plan, ou que ses singularités sont déjà connues. L'abscisse de convergence 1 et la singularité de régularité mise en évidence par (**??**) ne suffisent pas à établir l'existence d'un pôle, ni même celle d'une continuation analytique au-delà de la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$.

1.9.1 Questions analytiques concrètes

Les investigations suivantes paraissent naturelles :

1. Étudier la fonction sur l'axe réel $s > 1$, en particulier la fonction asymptotique de $Z_C(1+h) - \frac{1}{2}$ lorsque $h \downarrow 0$.
2. Chercher une représentation intégrale de type Mellin, en reliant la série à la fonction de comptage des intervalles manquants

   $$N(x) = \#\{\text{intervalles manquants } I : |I| \geq x\}.$$

   Pour les parties où l'intégrale converge, la formule générale est

   $$Z_C(s) = s \int_0^{g_2} N(x) x^{s-1}\, dx,$$

   avec une convention de comptage adaptée aux éventuels intervalles manquants de même taille.
3. Obtenir des estimations suffisamment précises de $N(x)$ pour étudier une éventuelle continuation, ou au contraire démontrer une obstruction.
4. Étudier les oscillations dues à la suite des nombres premiers dans les facteurs partiels de Mertens. Il faut distinguer les oscillations effectivement démontrées de celles seulement suggérées par les calculs.
5. Déterminer si une continuation, si elle existe, est méromorphe, holomorphe avec une singularité non isolée, ou limitée par une frontière naturelle. Aucune de ces possibilités ne doit être privilégiée sans preuve.

1.10 Ce que la fonction zêta de la castafiore dit - et ne dit pas - sur Goldbach

La fonction Z_C encode exactement la distribution des tailles des intervalles manquants dans la construction réelle de la castafiore. Elle donne donc un invariant analytique de cette chaîne fractale. Son abscisse de convergence restitue la dimension de boîte supérieure ; sa valeur en 1 restitue la

longueur totale retirée ; son défaut de différentiabilité au bord mesure une irrégularité quantitative de la distribution des intervalles manquants.

En revanche, aucun de ces faits ne fournit à ce jour une minoration du nombre de nombres premiers dans un intervalle, ni une information sur la corrélation entre la primalité de m et celle de $n-m$. La construction de la castafiore est fondée sur l'élimination des multiples d'un seul côté (les restes nuls). Le crible de Goldbach doit simultanément éviter les restes 0 et n modulo chaque premier. Il s'agit d'une contrainte supplémentaire, qui n'est pas encodée dans Z_C.

Il serait donc prématuré de présenter la fonction zêta de la castafiore comme un outil pour démontrer Goldbach. La piste possède un intérêt propre en géométrie fractale et en analyse complexe ; un lien avec Goldbach demanderait une construction supplémentaire et un théorème de transfert explicite.

1.11 Bilan de la section 1

Les résultats établis dans la première section ci-avant sont les suivants :

- la série $Z_C(s)$ est la fonction zêta géométrique des intervalles manquants de la castafiore ;
- son abscisse de convergence absolue vaut 1 ;
- elle converge absolument au point frontière $s = 1$;
- sa valeur exacte est $Z_C(1) = \dfrac{1}{2}$;
- elle est continue à droite en 1, mais son quotient différentiel à droite tend vers $-\infty$;
- la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite est 1, tandis que sa mesure de Lebesgue est nulle, sous la convention d'indexation explicitée.

Le principal problème restant est l'étude analytique de $Z_C(s)$ au-delà du demi-plan de convergence. En particulier, on ne dispose pas encore d'une formule de continuation méromorphe comparable à celle de l'ensemble de Cantor "classique".

C'est à cet endroit précis que commence, à mon sens, le véritable travail sur la fonction zêta de la castafiore.

2 Fonction asymptotique au bord, transformée de Laplace et fonction de comptage

2.1 Résumé de la section 2

Ce complément poursuit l'étude de la fonction zêta géométrique des intervalles manquants de la castafiore.

Le résultat principal est un équivalent précis de son approche vers la valeur frontière :

$$Z_C(1+h) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\gamma}}{\log\left(\dfrac{1}{h}\right)}\,(1+\mathrm{o}(1)), \qquad h \downarrow 0.$$

On reformule ensuite la fonction comme transformée de Laplace d'une mesure discrète finie, on décrit sa continuité sur la droite frontière et on introduit sa fonction de comptage des intervalles manquants. Ces résultats précisent la singularité au bord, sans prétendre établir un prolongement méromorphe.

2.2 Rappel des notations

On conserve les conventions de la note principale :

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \cdots, \qquad t_1 = \frac{1}{2}, \qquad t_k = t_{k-1}\,\frac{p_k - 1}{2p_k} \quad (k \geq 2),$$

et

$$g_k = \frac{t_{k-1}}{p_k}, \qquad Z_C(s) = \sum_{k\geq 2} 2^{k-2} g_k^s.$$

Le niveau k produit 2^{k-2} intervalles manquants de longueur g_k. Posons

$$b_k = 2^{k-2} g_k, \qquad \lambda_k = -\log\, g_k.$$

La note principale a établi $\displaystyle\sum_{k\geq 2} b_k = Z_C(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, pour $\mathfrak{Re}(z) \geq 0$,

$$F(z) := Z_C(1+z) = \sum_{k\geq 2} b_k e^{-z\lambda_k}. \tag{12}$$

2.3 Fonctions asymptotiques des poids et des longueurs logarithmiques

La formule exacte

$$b_k = \frac{1}{2p_k} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$

et le théorème de Mertens donnent $b_k \sim \dfrac{e^{-\gamma}}{p_k \log\, p_k}$. En utilisant $p_k \sim k \log\, k$, on obtient

$$b_k \sim \frac{e^{-\gamma}}{k(\log\, k)^2}. \tag{13}$$

D'autre part,

$$t_{k-1} = 2^{-(k-1)} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \sim 2^{2-k} \frac{e^{-\gamma}}{\log\, p_k},$$

d'où

$$g_k \sim 2^{2-k} \frac{e^{-\gamma}}{p_k \log\, p_k}$$

et

$$\lambda_k = -\log\, g_k = (k-2)\log\, 2 + \log\, p_k + \log\, \log\, p_k + \gamma + \mathrm{o}(1), \qquad \lambda_k \sim k \log\, 2. \tag{14}$$

2.3.1 Un équivalent précis au voisinage de $s = 1$

Théorème 4 (fonction asymptotique au bord)**.** *Lorsque $h > 0$ tend vers zéro,*

$$Z_C(1+h) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\gamma}}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}(1 + \mathrm{o}(1)). \tag{15}$$

Démonstration. Posons $S(h) = \frac{1}{2} - Z_C(1+h)$. Alors

$$S(h) = \sum_{k\geq 2} b_k(1 - e^{-h\lambda_k}).$$

Avec $X = \frac{1}{h}$, séparons $S = S_1 + S_2$ selon $k \leq X$ et $k > X$. Pour la première partie, $1 - e^{-u} \leq u$ donne

$$0 \leq S_1(h) \leq h \sum_{k\leq X} b_k\lambda_k.$$

Or $b_k\lambda_k \sim \dfrac{e^{-\gamma}\log 2}{(\log\, k)^2}$ et $\displaystyle\sum_{k\leq X} \frac{1}{(\log\, k)^2} = \mathrm{O}(\frac{X}{(\log\, X)^2}$. Donc

$$S_1(h) = \mathrm{O}((\log\, X)^{-2}) = \mathrm{o}((\log\, X)^{-1}). \tag{16}$$

Pour la seconde partie,

$$S_2(h) = \sum_{k>X} b_k - \sum_{k>X} b_k e^{-h\lambda_k}.$$

Par (**??**) et comparaison intégrale,

$$\sum_{k>X} b_k \sim e^{-\gamma} \sum_{k>X} \frac{1}{k(\log\, k)^2} \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\, X}.$$

Comme $\lambda_k \sim k\log 2$, il existe $c > 0$ tel que $\lambda_k \geq ck$ pour k assez grand. Par conséquent,

$$\sum_{k>X} b_k e^{-h\lambda_k} \ll \sum_{k>X} \frac{e^{-chk}}{k(\log\, k)^2} \ll \int_X^\infty \frac{e^{-chx}}{x(\log\, x)^2}\, dx.$$

Le changement de variable $u = hx$ montre que cette intégrale est

$$\int_1^\infty \frac{e^{-cu}}{u(\log\, X + \log\, u)^2}\, du = \mathrm{O}((\log\, X)^{-2}).$$

Ainsi $S_2(h) = \dfrac{e^{-\gamma}}{\log\, X} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\log\, X}\right)$. Avec (**??**) et $X = \dfrac{1}{h}$, on obtient le résultat.

□

Remarque : le coefficient principal $e^{-\gamma}$ provient du produit de Mertens. Le facteur 2^{k-2} qui compte les intervalles manquants est compensé, dans b_k, par le facteur 2^{-k} contenu dans leur longueur. Il subsiste la décroissance lente $\dfrac{1}{k(\log\, k)^2}$.

2.4 Conséquence : une divergence quantitative du quotient différentiel

Le théorème précédent donne

$$\frac{Z_C(1+h)-Z_C(1)}{h} \sim -\frac{e^{-\gamma}}{h\log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

En particulier, le quotient différentiel à droite tend vers $-\infty$. La fonction est continue à droite en 1, mais ne possède pas de dérivée à droite finie en ce point. Le nouvel équivalent précise l'ordre de grandeur de cette pente moyenne.

2.5 La transformée de Laplace d'une mesure discrète

La formule (**??**) montre que $F(z) = Z_C(1+z)$ est la transformée de Laplace de la mesure positive

$$\mu = \sum_{k\geq 2} b_k \delta_{\lambda_k}, \qquad \mu(\mathbb{R}_+) = \sum_{k\geq 2} b_k = \frac{1}{2}.$$

Proposition 5. *La fonction F est holomorphe dans $\mathfrak{Re}(z) > 0$, continue sur $\mathfrak{Re}(z) \geq 0$, et vérifie $|F(z)| \leq \frac{1}{2}$ sur ce demi-plan fermé. La série $F(it) = \sum b_k e^{-it\lambda_k}$ converge absolument et uniformément en $t \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour $\mathfrak{Re}(z) \geq 0$, $|b_k e^{-z\lambda_k}| \leq b_k$ et $\sum b_k = \frac{1}{2}$. Le critère de Weierstrass donne la convergence uniforme et la continuité. L'holomorphie dans le demi-plan ouvert résulte de la convergence uniforme sur les compacts d'une série de fonctions holomorphes.

□

Remarque [ce que cela ne prouve pas] : la convergence absolue sur la droite $\mathfrak{Re}(z) = 0$ ne signifie pas que F se prolonge analytiquement de l'autre côté. La série définit une fonction continue sur la frontière, mais la dérivée en $z = 0$ est singulière. Il faudrait étudier séparément chaque point it pour savoir si un prolongement local existe.

2.6 Fonction de comptage des intervalles manquants et représentation de Mellin

Les longueurs g_k sont strictement décroissantes, car

$$\frac{g_{k+1}}{g_k} = \frac{p_k - 1}{2p_{k+1}} < 1.$$

Définissons

$$N(x) = \#\{I : I \text{ est un intervalle manquant de la castafiore et } |I| \geq x\},$$

où les intervalles manquants sont comptés avec leur multiplicité. Si $g_{K+1} < x \leq g_K$, alors

$$N(x) = \sum_{k=2}^{K} 2^{k-2} = 2^{K-1} - 1.$$

Pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$, une sommation de Tonelli donne

$$Z_C(s) = s \int_0^{g_2} N(x) x^{s-1}\, dx. \tag{17}$$

En effet, chaque intervalle manquant de longueur ℓ contribue $\ell^s = s\int_0^\ell x^{s-1}\,dx$. La formule reste valable en $s = 1$ par convergence monotone et redonne $Z_C(1) = \dfrac{1}{2}$.

2.7 Ordre de grandeur de la fonction de comptage

La formule asymptotique de g_k donne

$$g_k \asymp \frac{2^{-k}}{k(\log\, k)^2}, \quad \log\left(\frac{1}{g_k}\right) \asymp k.$$

Comme $N(x) = 2^{K-1} - 1$ lorsque $g_{K+1} < x \le g_K$, on obtient

$$N(x) \asymp \frac{1}{x \log\left(\dfrac{1}{x}\right)\left[\log\,\log\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^2} \quad (x \downarrow 0). \tag{18}$$

Le symbole $\asymp$ signifie que le quotient reste entre deux constantes positives ; il ne signifie pas que ce quotient possède une limite. Les sauts de N et le fait que $\dfrac{g_{k+1}}{g_k} \to \dfrac{1}{2}$ produisent des oscillations multiplicatives qu'une équivalence plus fine devrait prendre en compte.

2.8 Ce que l'on peut et ce que l'on ne peut pas conclure sur les dimensions complexes

Dans la théorie des chaînes fractales, les pôles d'un prolongement méromorphe de la fonction zêta géométrique sont appelés *dimensions complexes*. Ils peuvent coder des oscillations dans les formules de voisinage tubulaire. L'ensemble triadique de Cantor, l'ensemble qu'on dit "classique", en fournit un exemple explicite : ses rapports de contraction constants permettent une expression méromorphe élémentaire.

La castafiore n'est pas autosimilaire au sens classique : ses rapports $c_k = \dfrac{p_k - 1}{2p_k}$ varient avec k. La représentation de Mellin et celle de Laplace sont des outils d'étude, mais ne produisent pas à elles seules un prolongement méromorphe. Il faut donc distinguer :

1. *établi* : Z_C est holomorphe pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ et continue sur $\mathfrak{Re}(s) = 1$.
2. *établi* : le point $s = 1$ est un point de non-différentiabilité dans la direction réelle, avec la fonction asymptotique (**??**).
3. *non établi* : l'existence d'un prolongement méromorphe au-delà de $\mathfrak{Re}(s) = 1$, et a fortiori l'existence de pôles interprétables comme dimensions complexes.

Question : la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$ est-elle une frontière naturelle pour Z_C, ou la fonction admet-elle des prolongements analytiques locaux en certains points de cette droite, voire un prolongement plus

large après soustraction d'un terme singulier convenable ?

Pour répondre, il faudrait obtenir des informations plus fines sur les oscillations des produits eulériens partiels et sur les fréquences $\lambda_k = -\log g_k$. Les seuls équivalents de Mertens et du théorème des nombres premiers ne suffisent pas à déterminer la nature des singularités complexes.

2.9 Bilan de la section 2

Les apports nouveaux sont :

- l'équivalent précis $Z_C(1+h) - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{-e^{-\gamma}}{\log\left(\dfrac{1}{h}\right)}$;
- l'interprétation de $Z_C(1+z)$ comme transformée de Laplace d'une mesure discrète positive de masse $\dfrac{1}{2}$;
- la continuité uniforme sur le demi-plan fermé $\mathfrak{Re}(s) \geq 1$;
- la représentation de Mellin par la fonction de comptage des intervalles manquants ;
- l'ordre de grandeur de cette fonction de comptage, en tenant compte de ses marches ;
- une formulation précise du problème restant : déterminer la possibilité d'un prolongement analytique au travers de la frontière $\mathfrak{Re}(s) = 1$.

Aucun de ces résultats ne constitue une preuve de Goldbach. Ils approfondissent en revanche l'objet fractal et analytique associé à la castafiore.

3 Régularité complète et obstruction à la continuation méromorphe en $s = 1$

3.1 Dérivées dans le demi-plan de convergence

On reprend

$$Z_C(1+h) = \sum_{k \geq 2} b_k e^{-h\lambda_k}, \qquad b_k = 2^{k-2} g_k, \quad \lambda_k = -\log\, g_k,$$

avec les fonctions asymptotiques déjà établies

$$b_k \sim \frac{e^{-\gamma}}{k(\log\, k)^2}, \qquad \lambda_k \sim k \log\, 2.$$

Pour tout $h > 0$, la décroissance exponentielle autorise la dérivation terme à terme à tout ordre :

$$\frac{d^m}{dh^m} Z_C(1+h) = (-1)^m \sum_{k \geq 2} b_k \lambda_k^m e^{-h\lambda_k}.$$

Théorème 6 (fonction asymptotique de toutes les dérivées)**.** *Pour tout entier fixé $m \geq 1$,*

$$(-1)^m \frac{d^m}{dh^m} Z_C(1+h) \sim \frac{e^{-\gamma}\, \Gamma(m)}{h^m \left[\log\left(\dfrac{1}{h}\right)\right]^2} \qquad (h \downarrow 0).$$

En particulier,

$$-\frac{d}{dh} Z_C(1+h) \sim \frac{e^{-\gamma}}{h\left[\log\left(\frac{1}{h}\right)\right]^2}.$$

Démonstration. Posons $a = \log 2$ et $C = e^{-\gamma}$. Les équivalents de départ donnent

$$b_k \lambda_k^m \sim \frac{C a^m k^{m-1}}{(\log\, k)^2}.$$

Dans la somme pondérée par $e^{-h\lambda_k}$, les indices dominants sont de l'ordre de $\dfrac{1}{h}$. Pour ces indices,

$$\lambda_k = ak + \mathrm{O}(\log\, k),$$

et donc $e^{-h\lambda_k} = e^{-ahk}(1 + \mathrm{o}(1))$ uniformément sur les fenêtres où hk reste dans un compact de $(0, \infty)$. Une comparaison intégrale, ou le changement d'échelle $u = ahk$, donne

$$\sum_{k\geq 2} \frac{k^{m-1} e^{-ahk}}{(\log\, k)^2} \sim \frac{1}{(ah)^m \left[\log\left(\frac{1}{h}\right)\right]^2} \int_0^\infty u^{m-1} e^{-u}\, du.$$

L'intégrale vaut $\Gamma(m)$. En multipliant par Ca^m, on obtient l'équivalent annoncé. □

Proposition 7 (monotonie complète)**.** *La fonction réelle $h \mapsto Z_C(1+h)$ est complètement monotone sur $(0, \infty)$:*

$$(-1)^m \frac{d^m}{dh^m} Z_C(1+h) > 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Démonstration. Chaque terme de la série dérivée est positif après multiplication par $(-1)^m$, et la série converge pour $h > 0$.

□

Remarque : la monotonie complète est une conséquence structurelle de la représentation de Laplace par une mesure positive. Elle ne dépend pas d'une approximation numérique. Elle signifie que la fonction décroît, est convexe, puis possède des dérivées successives dont les signes alternent.

3.2 Une conséquence importante : pas de continuation méromorphe au point $s = 1$

Le résultat précédent permet de répondre à une question qui était restée ouverte dans la première version de la note. Il ne s'agit pas de savoir si une continuation méromorphe a été trouée : on peut démontrer qu'une telle continuation est impossible dans un voisinage de $s = 1$.

Théorème 8 (obstruction méromorphe en $s = 1$)**.** *La fonction $Z_C(s)$ ne possède aucun prolongement méromorphe dans un voisinage ouvert du point $s = 1$ qui coïncide avec elle pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$.*

Démonstration. Supposons qu'un tel prolongement méromorphe existe dans un disque centré en $s = 1$. Sur l'axe réel, lorsque $s \downarrow 1$ avec $s > 1$, la note principale et le complément précédent donnent

$$Z_C(s) \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Le prolongement méromorphe est donc borné le long de ce segment réel. Il ne peut pas avoir un pôle en $s = 1$: un pôle entraîne une divergence en module dans toutes les directions d'approche. La singularité serait donc amovible, et le prolongement serait holomorphe en $s = 1$.
Mais une fonction holomorphe en $s = 1$ possède une dérivée finie en ce point. En particulier,

$$\frac{Z_C(1+h) - Z_C(1)}{h}$$

devrait tendre vers cette dérivée lorsque $h \downarrow 0$. Or la fonction asymptotique établie précédemment donne

$$\frac{Z_C(1+h) - Z_C(1)}{h} \sim -\frac{e^{-\gamma}}{h \log\left(\frac{1}{h}\right)} \longrightarrow -\infty.$$

Contradiction.

□

Remarque [portée exacte du résultat] : cette proposition exclut un prolongement méromorphe à travers le point $s = 1$, et donc en particulier un prolongement méromorphe global à tout le plan complexe. Elle n'exclut pas :

- un prolongement analytique local au voisinage de certains autres points de la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$;
- un prolongement dans un domaine fendu où le point $s = 1$ serait retiré ;
- une description asymptotique ou une représentation intégrale plus fine dans un voisinage épointé de $s = 1$.

Il serait excessif d'appeler dès maintenant $s = 1$ un "point de branchement" au sens strict : la fonction asymptotique réelle est compatible avec une singularité de type logarithmique, mais elle ne construit pas à elle seule une branche holomorphe dans un domaine fendu.

3.3 Une comparaison avec l'ensemble triadique de Cantor

Pour l'ensemble triadique de Cantor, la fonction zêta géométrique est

$$\zeta_{\text{Cantor}}(s) = \frac{3^{-s}}{1 - 2\,3^{-s}}.$$

Elle possède un prolongement méromorphe global, avec des pôles sur une famille de droites verticales. La raison en est la répétition exacte des mêmes rapports de contraction à chaque étape.

La castafiore présente une situation différente. La série converge au point frontière $s = 1$, mais son approche de cette valeur est

$$Z_C(1+h) - Z_C(1) \sim -\frac{e^{-\gamma}}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

Cette variation est beaucoup plus lente qu'une variation linéaire. Elle interdit donc une continuation méromorphe au point frontière. Le contraste avec l'ensemble classique de Cantor n'est pas seulement que les rapports de contraction varient : la singularité au bord est ici d'une nature analytique différente.

3.4 Questions qui restent ouvertes

Les résultats précédents déplacent la question de recherche. Il ne faut plus chercher un prolongement méromorphe global qui traverserait $s = 1$: cela est désormais exclu. Les questions pertinentes deviennent :

1. Peut-on construire une continuation holomorphe dans un domaine fendu ayant $s = 1$ comme point singulier ?
2. Peut-on isoler explicitement un terme singulier de type $\dfrac{1}{\log\left(\dfrac{1}{s-1}\right)}$ et montrer que le reste possède une meilleure régularité dans un secteur ?
3. Existe-t-il des prolongements locaux autour de points $1 + it$ avec $t \neq 0$?
4. Les oscillations des nombres premiers dans les produits de Mertens apparaissent-elles dans des termes secondaires de la fonction asymptotique ?
5. Peut-on relier ces termes secondaires à la fonction de comptage des intervalles manquants et à des oscillations géométriques mesurables ?

3.5 Bilan de la section 3

Deux résultats nouveaux sont établis :

- pour tout entier fixé $m \geq 1$, la dérivée d'ordre m possède un équivalent explicite lorsque $s \downarrow 1$;
- la fonction Z_C ne peut pas avoir de prolongement méromorphe dans un voisinage de $s = 1$.

La deuxième conclusion est particulièrement nette : contrairement à l'ensemble triadique de Cantor, la fonction zêta de la castafiore ne peut pas avoir une théorie des dimensions complexes fondée sur un prolongement méromorphe global de sa fonction zêta géométrique. Il reste cependant possible d'étudier des prolongements dans des domaines fendus et les singularités situées ailleurs sur la droite de convergence.

4 Queue de la mesure associée à la fonction zêta de la castafiore

4.1 Rappel des notations

On note p_k le k-ième nombre premier, avec $p_1 = 2$, et

$$t_1 = \frac{1}{2}, \qquad t_k = t_{k-1}\frac{p_k - 1}{2p_k}, \qquad g_k = \frac{t_{k-1}}{p_k}.$$

À l'étape k, il y a 2^{k-2} intervalles manquants de longueur g_k. On pose

$$b_k = 2^{k-2} g_k = \frac{1}{2p_k} \prod_{j=2}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right), \qquad \lambda_k = -\log\, g_k.$$

La fonction zêta géométrique est

$$Z_C(s) = \sum_{k\geq 2} 2^{k-2} g_k^s, \qquad F(z) = Z_C(1+z) = \sum_{k\geq 2} b_k e^{-z\lambda_k}.$$

Les résultats asymptotiques établis précédemment donnent, avec $C = e^{-\gamma}$ et $a = \log\, 2$,

$$b_k \sim \frac{C}{k(\log\, k)^2}, \qquad \lambda_k \sim ak, \qquad \sum_{k\geq 2} b_k = \frac{1}{2}.$$

4.2 La mesure discrète et sa queue

Considérons la mesure positive finie

$$\mu = \sum_{k\geq 2} b_k\, \delta_{\lambda_k}.$$

Sa masse totale vaut $\mu([0,+\infty)) = \dfrac{1}{2}$, et F est sa transformée de Laplace. Définissons sa fonction de queue par

$$U(T) = \mu((T,+\infty)) = \sum_{\lambda_k > T} b_k.$$

Théorème 9 (fonction asymptotique de la queue)**.** *Lorsque $T \to +\infty$,*

$$U(T) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\, T}.$$

Démonstration. Comme $\lambda_k \sim ak$, l'indice-seuil

$$K(T) = \min\{k \geq 2 : \lambda_k > T\}$$

vérifie $K(T) \sim \dfrac{T}{a}$. La suite λ_k est strictement croissante, puisque

$$\frac{g_{k+1}}{g_k} = \frac{p_k - 1}{2p_{k+1}} < 1.$$

Par conséquent, à un éventuel terme de seuil près,

$$U(T) = \sum_{k\geq K(T)} b_k.$$

Or $b_k \sim \dfrac{C}{k(\log\, k)^2}$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs et l'intégrale de référence donnent

$$\sum_{k\geq K} \frac{C}{k(\log\, k)^2} \sim C \int_K^{+\infty} \frac{dx}{x(\log\, x)^2} = \frac{C}{\log\, K}.$$

Ainsi $U(T) \sim \dfrac{C}{\log\, K(T)}$. Comme $K(T) \sim \dfrac{T}{a}$, on a $\log\, K(T) = \log\, T - \log\, a + \mathrm{o}(1)$, donc $\log\, K(T) \sim \log\, T$. D'où le résultat.

□

Remarque : cette formule dit que la masse située au-delà de l'échelle logarithmique T décroît extrêmement lentement : elle est de l'ordre de $\dfrac{1}{\log T}$. La mesure est pourtant finie, puisque cette queue tend vers zéro. Il n'y a aucune contradiction : une décroissance en $\dfrac{1}{\log T}$ est lente, mais tend bien vers zéro.

4.3 Une identité intégrale exacte

Pour tout réel $h > 0$, l'identité

$$1 - e^{-h\lambda} = h \int_0^{\lambda} e^{-ht}\, dt$$

et le théorème de Tonelli, applicable aux termes positifs, donnent

$$\begin{aligned} F(0) - F(h) &= \sum_{k \geq 2} b_k (1 - e^{-h\lambda_k}) \\ &= h \int_0^{+\infty} e^{-ht} \left(\sum_{\lambda_k > t} b_k \right) dt. \end{aligned}$$

On obtient donc l'identité exacte

$$\frac{1}{2} - F(h) = h \int_0^{+\infty} e^{-ht} U(t)\, dt.$$

Elle exprime l'écart à la valeur limite $\dfrac{1}{2}$ comme une moyenne exponentiellement pondérée de la queue de la mesure.

4.4 Nouvelle démonstration de la fonction asymptotique au bord

Théorème 10 (fonction asymptotique de Laplace de la queue)**.** *Lorsque $h \downarrow 0$,*

$$\frac{1}{2} - Z_C(1 + h) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\left(\dfrac{1}{h}\right)}.$$

Démonstration. Posons $L = \log\left(\dfrac{1}{h}\right)$. L'identité précédente donne

$$\frac{1}{2} - F(h) = \int_0^{+\infty} e^{-u} U(\frac{u}{h})\, du,$$

par le changement de variable $u = ht$.

Posons $\beta = 2 \log L$ et $\varepsilon_h = e^{-\sqrt{L}}$. Sur l'intervalle $[\varepsilon_h, \beta]$, on a

$$\log\left(\frac{u}{h}\right) = L + \log u = L + \mathrm{O}(\sqrt{L} + \log\log L),$$

uniformément en u. En particulier, $\dfrac{\log\left(\dfrac{u}{h}\right)}{L} \to 1$ uniformément. Comme $\dfrac{u}{h} \geq e^{L-\sqrt{L}} \to +\infty$, l'équivalent $U(x) \sim \dfrac{C}{\log\, x}$ donne aussi, uniformément sur cet intervalle,

$$U(\frac{u}{h}) \sim \frac{C}{\log\left(\dfrac{u}{h}\right)} \sim \frac{C}{L}.$$

Par conséquent,

$$L\int_{\varepsilon_h}^{\beta} e^{-u}U(\frac{u}{h})\,du \longrightarrow C\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = C.$$

Les deux morceaux omis sont négligeables. En effet, puisque $U \leq \dfrac{1}{2}$,

$$L\int_0^{\varepsilon_h} e^{-u}U(\frac{u}{h})\,du \leq \frac{L}{2}e^{-\sqrt{L}} \longrightarrow 0,$$

et

$$L\int_{\beta}^{+\infty} e^{-u}U(\frac{u}{h})\,du \leq \frac{L}{2}e^{-\beta} = \frac{1}{2L} \longrightarrow 0.$$

Cela achève la démonstration. □

4.5 Ce que cette reformulation apporte

La démonstration précédente ne repose pas sur une estimation directe compliquée des termes $b_k(1-e^{-h\lambda_k})$. Elle passe par une propriété globale de la mesure : la décroissance de sa queue.

Elle met en évidence la chaîne logique suivante :

$$b_k \sim \frac{C}{k(\log\, k)^2} \quad\Longrightarrow\quad U(T) \sim \frac{C}{\log\, T} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2} - F(h) \sim \frac{C}{\log\left(\dfrac{1}{h}\right)}.$$

Le coefficient $e^{-\gamma}$ provient donc directement du produit de Mertens présent dans les poids b_k. Il ne s'agit pas d'un coefficient ajouté artificiellement lors de l'analyse de la transformée de Laplace.

Remarque [portée et limites] : ce complément renforce l'interprétation de Z_C comme transformée de Laplace d'une mesure discrète positive dont la queue est explicitement contrôlée. Il ne démontre pas, à lui seul, l'existence d'un prolongement analytique dans un domaine situé au-delà de la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$. En particulier, il ne permet pas de conclure que cette droite est une frontière naturelle. Ces questions demandent une étude supplémentaire des oscillations de la série sur la droite de convergence.

5 Fonction asymptotique complexe sectorielle au voisinage de $s = 1$

5.1 But

Le complément précédent établit, pour $h > 0$ réel,

$$\frac{1}{2} - Z_C(1+h) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log\left(\frac{1}{h}\right)}.$$

On cherche ici à savoir si cette loi reste valable lorsque h est remplacé par un nombre complexe z tendant vers zéro à l'intérieur du demi-plan $\mathfrak{Re}(z) > 0$. Le résultat ci-dessous est sectoriel : il est uniforme dès que l'on reste à un angle strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$ par rapport à l'axe réel positif.

On conserve les notations

$$F(z) = Z_C(1+z) = \sum_{k\geq 2} b_k e^{-z\lambda_k}, \qquad U(t) = \sum_{\lambda_k > t} b_k, \qquad C = e^{-\gamma}.$$

Nous avons déjà établi

$$F(0) = \frac{1}{2}, \qquad U(t) \sim \frac{C}{\log t}.$$

5.2 Identité intégrale dans le demi-plan droit

Pour $\mathfrak{Re}(z) > 0$, l'identité

$$1 - e^{-z\lambda} = z \int_0^\lambda e^{-zt}\, dt$$

implique

$$\frac{1}{2} - F(z) = z \int_0^{+\infty} e^{-zt} U(t)\, dt.$$

L'échange entre somme et intégrale est justifié par convergence absolue :

$$\sum_{k\geq 2} b_k \int_0^{\lambda_k} |z| e^{-t\mathfrak{Re}(z)}\, dt \leq \frac{|z|}{\mathfrak{Re}(z)} \sum_{k\geq 2} b_k < +\infty.$$

5.3 Théorème sectoriel

Théorème 11 (fonction asymptotique uniforme dans les secteurs droits)**.** *Pour tout $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$, lorsque $z \to 0$ dans le secteur*

$$0 < |z|, \qquad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta,$$

on a uniformément

$$\frac{1}{2} - F(z) \sim \frac{C}{\log\left(\frac{1}{|z|}\right)}.$$

En particulier, puisque $\arg z$ *reste borné dans ce secteur, on peut aussi écrire*

$$\frac{1}{2} - F(z) \sim \frac{C}{\log\left(\dfrac{1}{z}\right)},$$

où $\log\left(\dfrac{1}{z}\right)$ *désigne la branche principale du logarithme. Ces équivalents sont des équivalents complexes : le quotient du membre de gauche par celui de droite tend vers* 1*.*

Démonstration. Écrivons $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et $|\theta| \leq \dfrac{\pi}{2} - \delta$, et posons $L = \log\left(\dfrac{1}{r}\right)$. Dans l'identité intégrale, le changement de variable $v = rt$ donne

$$\frac{1}{2} - F(z) = e^{i\theta} \int_0^{+\infty} e^{-e^{i\theta}v} U(\frac{v}{r})\, dv.$$

Sur le secteur considéré,

$$|e^{-e^{i\theta}v}| = e^{-v\cos\theta} \leq e^{-v\sin\delta}.$$

Posons $\varepsilon_r = e^{-\sqrt{L}}$ et $B_L = (\dfrac{3}{\sin\delta} \log L$. Pour $\varepsilon_r \leq v \leq B_L$, on a uniformément

$$\log\left(\frac{v}{r}\right) = L + \log v = L + \mathrm{O}(\sqrt{L} + \log\log L),$$

donc $\dfrac{\log\left(\dfrac{v}{r}\right)}{L} \to 1$. De plus $\dfrac{v}{r} \geq e^{L-\sqrt{L}} \to +\infty$. L'équivalent de la queue donne ainsi, uniformément sur cet intervalle et sur l'angle θ,

$$U(\frac{v}{r}) = \frac{C}{L}(1 + \mathrm{o}(1)).$$

La contribution de cet intervalle vaut donc

$$\frac{C}{L}(1 + \mathrm{o}(1))e^{i\theta} \int_{\varepsilon_r}^{B_L} e^{-e^{i\theta}v}\, dv.$$

Or, uniformément pour $|\theta| \leq \dfrac{\pi}{2} - \delta$,

$$e^{i\theta} \int_0^{+\infty} e^{-e^{i\theta}v}\, dv = 1,$$

et les intégrales omises aux deux extrémités tendent uniformément vers zéro. La contribution centrale est donc $\dfrac{C}{L}\,(1 + \mathrm{o}(1))$.

Enfin, comme $0 \leq U \leq \dfrac{1}{2}$, les deux contributions extérieures sont majorées en module par

$$\frac{1}{2}\varepsilon_r \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_{B_L}^{+\infty} e^{-v\sin\delta}\, dv = \frac{e^{-B_L\sin\delta}}{2\sin\delta}.$$

Après multiplication par L, ces deux quantités tendent vers zéro : la première parce que $Le^{-\sqrt{L}} \to 0$, la seconde parce que $Le^{-B_L \sin\delta} = L^{-2}$. On conclut que

$$\frac{1}{2} - F(z) = \frac{C}{L}(1 + \mathrm{o}(1)),$$

uniformément dans le secteur.

Enfin $\log\left(\dfrac{1}{z}\right) = L - i\theta$, et θ est borné ; ainsi $\dfrac{\log\left(\dfrac{1}{z}\right)}{L} \to 1$ uniformément, ce qui donne la seconde écriture. □

5.4 Interprétation et précautions

Le comportement singulier observé sur l'axe réel positif n'est donc pas un phénomène limité à cet axe : la même échelle logarithmique gouverne l'approche de $s = 1$ dans tout secteur fermé strictement contenu dans le demi-plan $\mathfrak{Re}(s-1) > 0$.

Ce résultat précise la forme de l'approche vers le point $s = 1$, mais il ne constitue pas un prolongement analytique à travers la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$. Le théorème porte uniquement sur des points $s = 1 + z$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$. Il ne permet pas non plus d'affirmer que la droite $\mathfrak{Re}(s) = 1$ est une frontière naturelle. L'étude des singularités éventuelles aux points $1 + i\tau$, avec $\tau \neq 0$, reste ouverte.

Références

[1] K. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, 3e édition, Wiley, 2014, section 9.6, "Zeta functions and complex dimensions".

[2] D. Feng, Z. Wen et J. Wu, "Some dimensional results for homogeneous Moran sets", *Science in China Series A : Mathematics*, 40 (1997), 475-482.

[3] M. L. Lapidus et M. van Frankenhuijsen, *Fractal Geometry, Complex Dimensions and Zeta Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer.

[4] F. Mertens, résultats classiques sur les produits eulériens partiels, notamment

$$\prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$