Drôle de constat !, Denise Vella-Chemla, octobre 2024.

On sait que la somme des racines carrées des entiers successifs diverge. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Mais si on calcule $1+\displaystyle\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}}$ jusqu'à 10^9, le résultat semble tendre vers $2\sqrt{N}+\mathrm{C}$ avec $\mathrm{C} \simeq 1.460346$.

Essayons de le démontrer.

On sait que

$$n^2 = \sum_{p=1}^{n} (2p-1).$$

Posons

$$A = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \cdots \tag{1}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=p^2-2p+2}^{p^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \right). \tag{2}$$

On utilise pour minorer / majorer un regroupement des termes de la somme en “gnomons” de carré en carré, on minore chaque parenthèse par son nombre de termes (un impair de la liste des impairs successifs) multiplié par le plus petit terme contenu dans cette parenthèse, et on majore chaque parenthèse par son nombre de termes multiplié par le plus grand terme contenu dans cette parenthèse). (rappel pour se repérer : le plus grand et le plus terme de chaque parenthèse sont aux deux extrémités de la parenthèse).

(rappel : $\gamma = 0.577215...$)

$$1 + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{5}{\sqrt{9}} + \frac{7}{\sqrt{16}} + \cdots \quad < \quad \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p^2-2p+2}^{p^2} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad < \quad 1 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{10}} + \cdots$$

$$\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{2k+1}{\sqrt{(k+1)^2}} \quad < \quad A \quad < \quad \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{2k+1}{\sqrt{k^2-4k+5}}$$

On essaie d'abord du côté de la minoration :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{2k+1}{k+1} &< A \\
\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{2k}{k+1} + \left(\sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k+1} + 1 \right) - 1 &< A \\
-1 + \left(1 + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}+1} \frac{2(k-1)}{k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k} \right) - 1 &< A \\
-1 + \left(1 + \sum_{k=2}^{\sqrt{n}+1} \frac{2k-2}{k} \right) + (\ln n + \gamma) - 1 &< A \\
2\sqrt{n} - 2(\ln n + \gamma) + (\ln n + \gamma) - 2 &< A \\
2\sqrt{n} - \ln n - \gamma - 2 &< A
\end{aligned}$$

Du côté majoration, c'est trop complexe, on regroupe les "gnomons" différemment (i.e. en mettant 3 termes de la somme à l'intérieur de la première parenthèse, 5 à l'intérieur de la seconde, etc.), on a :

$$\begin{aligned}
A &< \frac{3}{\sqrt{1}} + \frac{5}{\sqrt{4}} + \frac{7}{\sqrt{9}} + \cdots \\
A &< \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{2k+1}{k} \\
A &< 2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{\sqrt{n}} \frac{1}{k} \\
A &< 2\sqrt{n} + (\ln \sqrt{n} + \gamma)
\end{aligned}$$

On vérifie le résultat par le programme ci-après :

```
import math
from math import sqrt,log,floor

somme = 1
nmax = 10002
gammadEuler = 0.5772156649
for n in range(2,nmax):
somme = somme+1/sqrt(n)
print('= ', n)
print('somme des inverses des racines des entiers jusqu a n = ',somme)
print('2*sqrt(n) = ', 2*sqrt(n))
res1 = 2*sqrt(n)-log(n)-gammadEuler-2
print('mino = 2*sqrt(n) = -log(n)-gamma d Euler-2 = ',res1)
res2 = 2*sqrt(n)+log(sqrt(n))+gammadEuler
print('mino = 2*sqrt(n)+ln(sqrt(n))+gamma d Euler = ',res2)
```

dont le résultat a été déposé ici https://denisevellachemla.eu/ressuminvrac.pdf.

Pour $n = 10^7$ et $n = 10^8$, le programme renvoie :

```
n = 10000001
somme des inverses des racines des entiers jusqu a n = 6323.095440167951
2*sqrt(n) = 6324.555636564517
mino = 2*sqrt(n) = -log(n)-gamma d Euler-2 = 6305.860325148658
mino = 2*sqrt(n)+ln(sqrt(n))+gamma d Euler = 6333.191900104896

n = 100000001
somme des inverses des racines des entiers jusqu a n = 19998.53979549304
2*sqrt(n) = 20000.0001
mino = 2*sqrt(n) = -log(n)-gamma d Euler-2 = 19979.00220358115
mino = 2*sqrt(n)+ln(sqrt(n))+gamma d Euler = 20009.787656041877
```

Identiquement, en calculant par programme la somme des inverses des racines cubiques, on trouve les valeurs suivantes :

$$\sum_{k=1}^{900\,000} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 13981 \qquad \sum_{k=1}^{1\,000\,000} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 15000 \qquad \sum_{k=1}^{1\,900\,000} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 23009 \qquad \sum_{k=1}^{2\,000\,000} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 23810$$

qui oriente vers la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \frac{3}{2}\sqrt{n}\sqrt[6]{n}$$

qu'il faudrait démontrer d'une manière similaire.