Modélisation vectorielle de CG (D.Chemla, 6/11/2013)

L'espace $G7$ (G pour Goldbach, on imagine aisément la généralisation G_{p_k}) est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ muni du produit scalaire dg défini ainsi :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} dg \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \iff min(|x2 - x1|, |y2 - y1|, |z2 - z1|) > 0.$$

L'espace vectoriel G_7 contient 210 points ($210 = 2.3.5.7$). Les nombres premiers supérieurs à 7 sont représentés dans cet espace par des points qui n'appartiennent pas aux quatre plans passant par l'origine (le plan $x = 0$ contient les points associés aux nombres pairs, le plan $y = 0$ contient les points associés aux multiples de 3, etc). Chaque nombre de 0 à 210 est représenté par un point qui est l'intersection de 4 plans. Les vecteurs des décomposants de Goldbach d'un nombre pair sont "orthogonaux" au vecteur de ce nombre, i.e. ils ne partagent aucune de leurs coordonnées avec lui.

Si on considère de tels espaces vectoriels (qui "gonflent vers la droite" à chaque ajout d'un nouveau nombre premier), est-on sûr qu'il y ait dans chacun d'eux un point représentant un double de nombre premier ? Est-on assuré qu'il y a un double de premier entre deux primorielles successives ?

L'idée serait de trouver une bijection qui "passerait" du décomposant trivial d'un nombre pair double d'un nombre premier à un décomposant non trivial pour tous les pairs du même espace, une telle bijection devant mettre les points éliminés en bijection avec les points éliminés et les points conservés en bijection avec les points conservés (on pourrait sûrement trouver une telle bijection - dans le cas où on serait assuré d'avoir un point représentant un double de premier dans chacun des espaces vectoriels emboîtés - parce qu'il y a davantage de nombres orthogonaux à un double de premier qu'à un double de composé : 6 plans d'élimination (i.e. $2k$ plans dans le cas de l'espace vectoriel G_{p_k}) puisque le vecteur d'un nombre double de nombre premier n'a aucune coordonnée nulle alors que pour les doubles de composés, l'un des plans d'élimination s'avère confondu avec le plan passant par l'origine correspondant.

On peut aussi définir la notion de *"ligne"* passant par différents points.
La ligne associée aux nombres $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ est toute bizarre (brisée et se poursuivant dans un peu toutes les directions) : elle passe par les points $\{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 2, 2, 2), (1, 0, 3, 3), (0, 1, 4, 4), (1, 2, 0, 5)\}$.
On se focalisera sur les lignes qui relient les points correspondant à des nombres impairs.
Quand l'espace vectoriel courant (de dimension i) est "emboîté" dans un espace vectoriel plus grand (de dimension $i + 1$, à l'ajout d'un nouveau nombre premier, lorsqu'on étudie l'existence de décomposants de Goldbach pour des nombres supérieurs à p_{i+1}^2), toutes les lignes sont "prolongées", on ajoute un point à leur extrémité. De l'existence d'un dg dans la ligne courte l associée à un certain nombre pair doit découler l'existence de dg pour les nombres pairs dont les lignes prolongent l.

C'est le théorème des restes chinois (*trc*) qui permet de passer d'un n-uplet au nombre correspondant.
C'est le produit vectoriel qui permet de trouver des décomposants de Goldbach d'un nombre donné.

Par exemple, à la recherche des dg de 98, on cherche tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ qui, multipliés par le vecteur $\begin{pmatrix} 105 \\ 70 \\ 126 \\ 120 \end{pmatrix}$, permettent d'obtenir un scalaire $(105x_1 + 70x_2 + 126x_3 + 120x_4)$ dont le reste dans une division par 210 est un impair compris entre 3 et 49.

C'est ainsi qu'on trouve $19 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ou bien $31 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ou encore $37 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En effet,

$$105 \times 1 + 70 \times 1 + 126 \times 4 + 120 \times 5 = 1279 \ \% \ 210 = 19$$
$$105 \times 1 + 70 \times 1 + 126 \times 1 + 120 \times 3 = 661 \ \% \ 210 = 31$$
$$105 \times 1 + 70 \times 1 + 126 \times 2 + 120 \times 2 = 667 \ \% \ 210 = 37.$$

Démontrer la conjecture de Goldbach consiste à vérifier que l'intersection de l'ensemble de points obtenus par résolution de multiples systèmes de congruences (élimination des points appartenant à différents hyperplans) grâce à l'application du trc et de l'ensemble des points de la ligne des impairs compris entre 3 et $n/2$ (à la recherche des décomposants de Goldbach de n) n'est jamais vide.