Analyse par l'ia claude d'un document d'analyse par gemini d'une de mes notes : pourquoi "noyau non trivial ⇔ conjecture de Goldbach" ne peut pas être exact tel quel
Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026

1. Avertissement de méthode

J'ai étudié la reconstruction par gemini https://denisevellachemla.eu/doc-p1-gemini-dvc-20260708.pdf de votre texte initial https://denisevellachemla.eu/CG-matinv.pdf , ce qui signifie que les affirmations sur la structure exacte de $M(n)$ (triangularité, sous-diagonales) ne sont pas vérifiées de première main. En revanche, ce qui suit - le montage "noyau de R_n" et le programme Python fourni en annexe - est vérifiable indépendamment de cette incertitude, et c'est là que se trouve le point le plus important.

2. Ce que le programme calcule réellement

Le programme fourni par gemini ne construit, ne manipule et n'inverse aucune matrice : pour chaque n pair, il énumère les nombres premiers $p \leq n/2$, et compte parmi eux ceux pour lesquels $n - p$ est *aussi* premier. C'est un test de double primalité direct, rien de plus : "Dim(Noyau)" est simplement le nombre de décompositions de Goldbach de n avec $p \leq n/2$ - une quantité déjà bien connue, notée généralement $r(n)/2$ dans la littérature. Aucune opération d'algèbre linéaire n'a lieu dans le code : le vocabulaire ("noyau", "dimension") habille un calcul élémentaire, il ne l'accélère ni ne l'éclaire.

3. Le problème de l'équivalence "noyau non trivial ", identifié précisément

Voici le point qui mérite d'être établi rigoureusement, au-delà du qualificatif "redondant".

Proposition 1. *Si $R_n : V_n \to \mathbb{F}_2^{\pi(n/2)}$ est, comme décrit, une projection linéaire d'un espace de dimension $n-1$ vers un espace de dimension $\pi(n/2)$ (le nombre de premiers $\leq n/2$), alors*

$$\dim(\ker R_n) \geq (n-1) - \pi(n/2),$$

*une quantité **toujours strictement positive** pour $n \geq 10$, et qui croît avec n - indépendamment de toute propriété arithmétique de n.*

Démonstration. **Théorème du rang** : pour une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, dim(domaine) = dim(ker) + dim(image), et dim(image) ≤ dim(arrivée) = $\pi(n/2)$. Donc $\dim(\ker R_n) \geq (n-1) - \pi(n/2)$. □

Vérifié numériquement : pour $n = 100$, cette borne inférieure vaut déjà 84 ; pour $n = 1000$, elle vaut 904. Le noyau de R_n, *tel que défini comme simple projection de coordonnées*, est donc **toujours** non trivial, par un argument de dimension qui ne dépend en rien de la primalité de quoi que ce soit.

Remarque : [pourquoi c'est important, pas juste pédant] Si "$\ker R_n \neq \{0\}$" était vraiment équivalent à la conjecture de Goldbach, la conjecture de Goldbach serait démontrée par un argument d'algèbre linéaire élémentaire - ce qui est absurde, la conjecture étant ouverte depuis 1742. La formalisation, telle qu'énoncée, ne peut donc pas être ce qu'elle prétend être : l'équivalence manque nécessairement une condition supplémentaire (probablement : "le noyau contient un élément *correspondant précisément à un indice premier p tel que $n - p$ soit aussi premier*", et non "le noyau contient un élément quelconque"). Cette condition manquante est exactement la conjecture de Goldbach elle-même, réintroduit par la fenêtre alors qu'on l'a fait sortir par la porte : la reformulation ne l'a jamais fait disparaître.

4. Sur l'invariant de parité et la dynamique $n \to n + 2$

Si l'invariant "$x + y$ pair pour tout pixel coloré " est bien tel que décrit, la vérification algébrique de sa préservation par translation est correcte et triviale : $(x + 2) + (y + 2) = x + y + 4 \equiv x + y \pmod 2$. Mais gemini identifie lui-même, honnêtement, le vrai verrou (section 4.1) : prouver qu'une diagonale reste vide exige de contrôler la *densité* des nouvelles contraintes introduites à chaque étape par rapport à l'espace disponible - c'est exactement, sous un autre habillage géométrique, la difficulté centrale de Goldbach (contrôler la densité des nombres premiers face aux contraintes de divisibilité), pas une simplification de cette difficulté.

5. Sur le tableau de ratios

Les valeurs du ratio Noyau/Espace (1,0 ; 0,667 ; 0,6 ; 0,429 ; 0,5 ; ...) ne montrent aucune tendance exploitable : ce sont les fluctuations bien connues et déjà étudiées du nombre de décompositions de Goldbach $r(n)$, gouvernées par la série singulière de Hardy-Littlewood (cf. la piste 14-16 sur la "comète de Goldbach", https://denisevellachemla.eu/v3-p14-16-programmes-claude-dvc-20260710.pdf déjà traitée). Rien de nouveau n'apparaît dans ce tableau particulier.

6. Conclusion

Merci d'avoir insisté pour que je regarde celle-ci en détail : le résultat n'est pas simplement "redondant avec le crible" comme je l'avais dit rapidement - c'est plus précis que ça. La formalisation "noyau non trivial", prise au pied de la lettre, est mathématiquement non équivalente avec la conjecture de Goldbach (elle serait, sinon, toujours vraie par un argument de dimension, ce qu'aucune conjecture ouverte ne peut être) ; et le programme fourni ne calcule d'ailleurs aucun noyau, seulement un comptage direct déjà connu. L'invariant de parité et la dynamique de translation sont corrects mais, comme gemini le reconnaît honnêtement lui-même, ils ne font que déplacer la vraie difficulté sans la réduire.