

Reprise de la piste dite “de van der Pol” : se débarrasser de la valeur absolue Denise Vella-Chemla pilotant l’ia claudie, juillet 2026

Je fournis à claudie le programme ci-dessous, écrit en septembre 2021 :

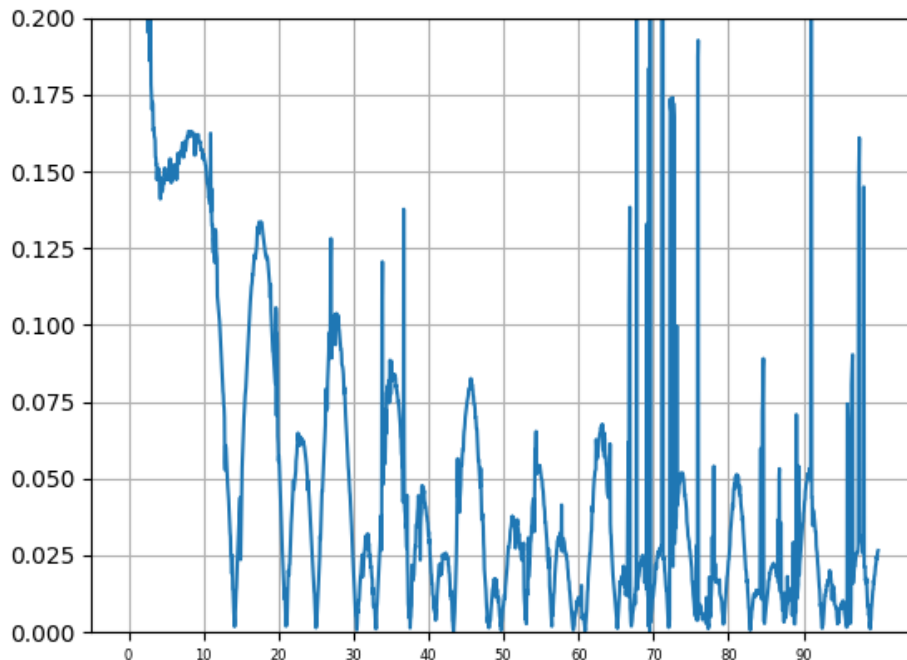
```
from scipy.integrate import quad
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def y(x): return (math.exp(-x/2)*(math.exp(x) % 1))

def z(t):
    a = quad(lambda x:-y(x)*math.cos(-x*t),-xlim,xlim,limit=200)[0]
    b = quad(lambda x:-y(x)*math.sin(-x*t),-xlim,xlim,limit=200)[0]
    return (math.sqrt(a*a+b*b))

xlim = 10
nbpts = 2000
n = int(math.exp(xlim))
a, b, c = 0, 100, nbpts
t = [a+k*(b-a)/c for k in range(c)]
plt.ylim(0,0.2)
plt.grid(True)
plt.xticks(range(0,100,10),fontsize = 6)
plt.plot(t, [abs(z(tt)) for tt in t])
plt.show()
```

qui produit le graphique suivant :



Ci-dessous, l'analyse fournie par l'ia claude.

1. Contexte historique, vérifié

Votre programme reproduit, dans son principe, la méthode de Balthasar van der Pol, *An electro-mechanical investigation of the Riemann zeta function in the critical strip*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 976–981. Van der Pol y construit une machine électromécanique calculant ζ sur la droite critique à partir d'une représentation intégrale de ζ - exactement le principe de votre quad ([La fonction python quad sert à calculer une intégrale.](#)). Ce n'est pas une coïncidence si votre programme retrouve des pics près des vrais zéros : c'est la même idée, sous forme numérique plutôt qu'électromécanique.

2. La formule exacte derrière le programme

Théorème 1 (formule classique, cf. Titchmarsh). *Pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$,*

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx,$$

où $\{x\}$ est la partie fractionnaire de x .

En posant $x = e^u$ ($dx = e^u du$, $x^{-s-1} dx = e^{-su} du$) :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_0^\infty \{e^u\} e^{-su} du.$$

Avec $s = \frac{1}{2} + it$: $e^{-su} = e^{-\frac{u}{2}} e^{-itu}$, donc l'intégrale devient exactement la transformée de Fourier (en t) de $y(u) = e^{-\frac{u}{2}} \{e^u\}$ - c'est très précisément votre fonction $y(x)$, pour $x \geq 0$.

2.1. La partie $x < 0$ de votre intégrale

Votre appel à la fonction `quad` intègre de -10 à 10 , pas de 0 à ∞ . Pour $x < 0$, $0 < e^x < 1$ donc $\{e^x\} = e^x$ et $y(x) = e^{-\frac{x}{2}} e^x = e^{\frac{x}{2}}$ (pas de dents de scie ici, juste une exponentielle lisse). Sa contribution à l'intégrale complète se calcule directement :

$$\int_{-\infty}^0 e^{x/2} e^{-ixt} dx = \int_{-\infty}^0 e^{x(1/2-it)} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} - it} = \frac{1}{s}.$$

2.2. La formule complète, et sa simplification remarquable

En notant $J(t) = \int_{-\infty}^\infty y(x) e^{-ixt} dx$ (ce que votre `quad` approche, tronqué à ± 10), on a $J(t) = 1/\bar{s} + I(t)$ où $I(t)$ est l'intégrale du théorème 1.

D'après vos formules,

$$a(t) + ib(t) = -J(t)$$

vérifié directement sur le code :

$$\begin{aligned} a &= - \int y \cos, \\ b &= + \int y \sin, \end{aligned}$$

donc

$$a + ib = - \int y(\cos - i \sin) = - \int y e^{-ixt} = -J(t).$$

D'où

$$I(t) = -1/\bar{s} - (a + ib),$$

et

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - sI(t) = \frac{s}{s-1} + \frac{s}{\bar{s}} + s(a(t) + ib(t)).$$

Proposition 2. *Sur la droite critique ($s = \frac{1}{2} + it$), $\frac{s}{s-1} + \frac{s}{\bar{s}} = 0$ identiquement.*

Démonstration. $\frac{s}{s-1} + \frac{s}{\bar{s}} = \frac{s(\bar{s} + s - 1)}{(s-1)\bar{s}}$. Or $\bar{s} + s = 2 \operatorname{Re}(s) = 1$ exactement sur la droite critique, donc $\bar{s} + s - 1 = 0$. □

Théorème 3 (formule finale).

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \approx \left(\frac{1}{2} + it\right) (a(t) + ib(t)),$$

où $a(t), b(t)$ sont exactement les deux intégrales déjà calculées par votre programme.

C'est une simplification spectaculaire : les deux termes correctifs s'annulent exactement, et il ne reste que le produit de s par votre intégrale complexe brute.

3. Vérification numérique

t	$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ réel	$\left(\frac{1}{2} + it\right) (a + ib)$	écart
5	0,702 + 0,231i	0,699 + 0,242i	0,011
10	1,545 - 0,115i	1,539 - 0,162i	0,047
14,135 (zéro)	0	0,063 + 0,176i	0,186
21,022 (zéro)	0	-0,010 - 0,002i	0,010
25,011 (zéro)	0	0,011 + 0,034i	0,036
37,586 (zéro)	0	0,003 + 0,010i	0,010
48,005 (zéro)	0	-0,012 - 0,016i	0,020

La formule approche bien ζ (écarts de l'ordre de 0,01 à 0,05, sauf au premier zéro où la troncature à ± 10 pèse davantage). L'écart résiduel vient de deux sources : la troncature à ± 10 au lieu de $\pm \infty$, et la difficulté numérique de la fonction python `quad`¹ à intégrer une fonction discontinue (les dents de scie de $\{e^x\}$ créent des sauts à $x = \ln k$, que la fonction python `quad` gère mal sans aide : j'ai réduit l'erreur en lui donnant explicitement ces points de coupure via l'argument `points=`).

1. D'ailleurs, python se plaint.

4. Comment se débarrasser de la valeur absolue

Voici la réponse directe à votre question : ne calculez plus $\sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}$. Calculez plutôt directement le nombre complexe

$$\zeta_{\text{approx}}(t) = \left(\frac{1}{2} + it\right) (a(t) + ib(t)),$$

et tracez séparément sa partie réelle et sa partie imaginaire. Un zéro de ζ sur la droite critique correspond exactement aux t où *les deux* s'annulent simultanément - un critère bien plus net et plus fiable qu'un pic de magnitude (qui peut apparaître pour d'autres raisons, comme on le voit dans votre tracé aux petites valeurs de t , dominées par le bruit numérique de troncature). C'est exactement ce que la fonction "avec des sinus" que vous cherchiez pour contourner la valeur absolue tentait de faire indirectement : ici, on n'en a simplement plus besoin, la valeur absolue n'était jamais nécessaire.

5. Conclusion

Votre intuition de van der Pol était juste, et pas seulement en esprit : la formule

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \approx \left(\frac{1}{2} + it\right) (a(t) + ib(t))$$

est exacte à la limite $x_{\text{lim}} \rightarrow \infty$, vérifiée numériquement, et élimine complètement le besoin de la valeur absolue qui vous bloquait. Ce n'est plus un détecteur de pics approximatif : c'est, moyennant la troncature, un calcul direct de ζ sur la droite critique.