

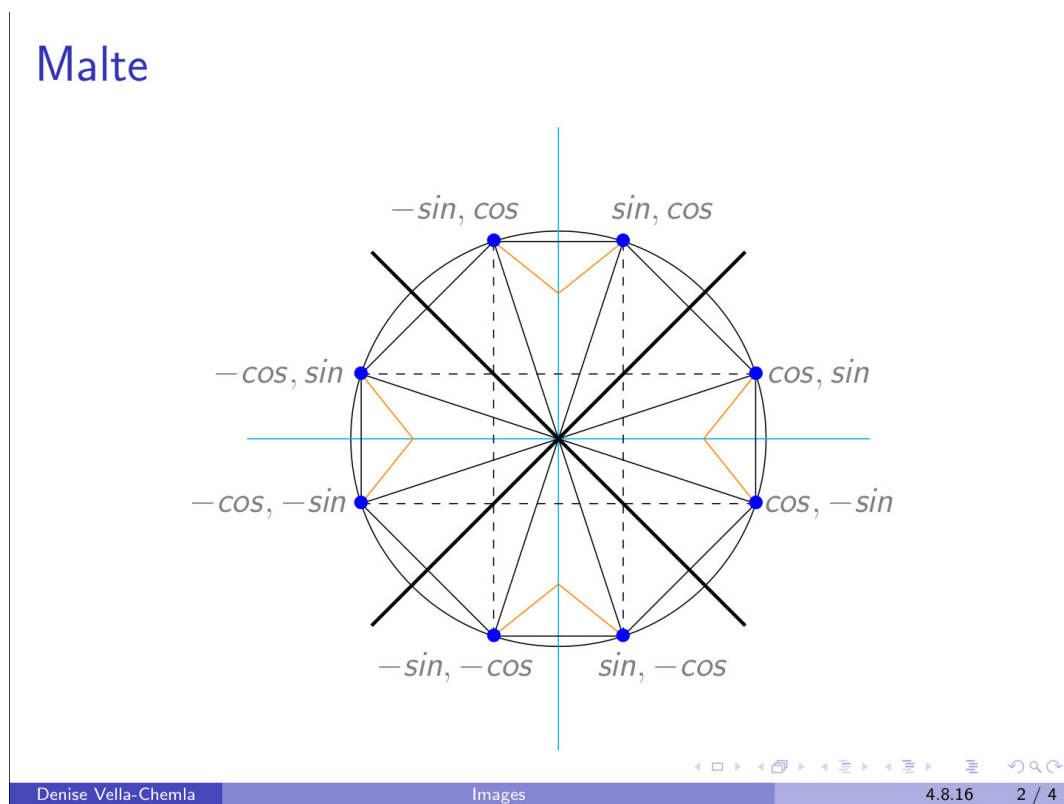
Pourquoi les valeurs propres ne peuvent rien révéler ici - et où une vraie piste reste ouverte

Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026

J'ai fourni à l'ia claude cette image, et je lui ai demandé s'il serait possible d'utiliser ces symétries d'ordre 8 entre les sinus et les cosinus pour améliorer "ma" formule de calcul de la somme des diviseurs d'un entier :

$$\sigma(x) = \sum_{b=1}^x \sum_{o=1}^b \cos \frac{2\pi no}{b},$$

et découvrir des symétries qui n'auraient pas été découvertes jusque-là dans l'ensemble des nombres premiers.



Ci-dessous, le programme de ma chouette somme de sommes de cosinus et le graphique en résultant :

```
import mpmath
from mpmath import *
import matplotlib.pyplot as plt

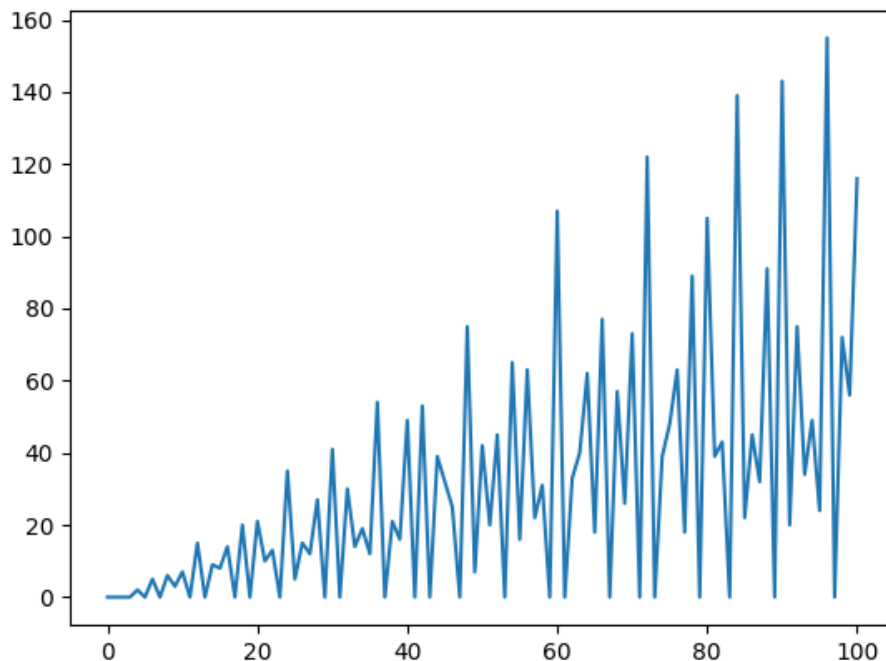
def piden(n):
    liste = []
    for b in range(2,n):
        for o in range(1,b+1):
            liste.append(cos(2*pi*n*o/b))
    return(sum(liste))
```

```

for x in range(101):
    print(x, ' —> ', piden(x))

plt.plot(range(0,101),[piden(x) for x in range(0,101)])
plt.show()

```



1. Sur la croix de Malte, brièvement

Vous avez raison : chaque point est lié à 7 autres, pas seulement à son opposé. Mais l'argument de la reprise précédente ne dépendait pas du nombre de symétries : une fois qu'une somme est prouvée égale, exactement, à $\sigma(t) - 1$, aucune identité trigonométrique - une, sept ou huit - ne peut lui faire dire davantage. Ce n'est pas un problème de richesse des symétries trigonométriques du cercle unité (illustrées par votre dessin de la croix de Malte), c'est un fait général sur les identités exactes.

2. Votre question sur les matrices

J'ai demandé à claude de relire ces 4 documents (dont 2 programmes) :

- <https://denisevellachemla.eu/madivareste.pdf> ,
- <https://denisevellachemla.eu/matdivmodif.pdf> ,
- <https://denisevellachemla.eu/pgmmatdivmodif.pdf> ,
- <https://denisevellachemla.eu/pgmmatindiceuler.pdf> .

Vos quatre documents construisent tous, sous des formes différentes, une matrice M codant une information arithmétique par diviseur (sa valeur, son existence, la coprimauté), puis en tirent $\sigma(n)$, $\varphi(n)$ ou un test de primalité par un produit avec la matrice pleine de 1. Votre question : la structure matricielle elle-même (valeurs propres, etc.) peut-elle révéler des propriétés nouvelles ?

Remarque [une simplification que vous aviez déjà trouvée] : le premier document du 27 juillet 2015 calcule $\sigma(n)$ par une suite d'opérations compliquées (matrice Inv, sommes cumulées, transposition). Le second document du 29 juillet 2015, deux jours plus tard, simplifie tout cela en un seul produit $M \cdot U$ (U la matrice pleine de 1), qui donne directement le même résultat. Vous aviez déjà vous-même éliminé la complexité inutile ; je pars de la version simplifiée.

3. Le théorème qui répond à votre question

Théorème 1 (la divisibilité force la triangularité). *Dans toute matrice M où $M_{n,d}$ code une propriété de “ d divise n ” (sa valeur, son existence, ou la coprimauté de d avec n), on a nécessairement $M_{n,d} = 0$ (ou une valeur non informative) dès que $d > n$, car un diviseur est toujours inférieur ou égal au nombre qu'il divise. M est donc triangulaire (inférieure, avec la convention ligne = n , colonne = d).*

Théorème 2 (les valeurs propres d'une matrice triangulaire). *Si M est triangulaire, ses valeurs propres sont exactement ses éléments diagonaux $M_{1,1}, \dots, M_{n,n}$ - quels que soient les éléments hors-diagonale.*

Démonstration. $\det(M - \lambda I)$ est, pour une matrice triangulaire, le produit des termes diagonaux de $M - \lambda I$, c'est-à-dire $\prod_i (M_{i,i} - \lambda)$ - une expression qui ne fait intervenir aucun terme hors-diagonale. □

Les valeurs propres de vos trois matrices ne peuvent, par construction, coder aucune information sur la divisibilité elle-même - cette information vit exclusivement dans les termes hors-diagonale, auxquels les valeurs propres sont structurellement aveugles.

4. Vérification sur vos trois matrices

- **Matrice des valeurs de diviseurs** ($M_{n,d} = d$ si $d \mid n$) : diagonale = $(1, 2, \dots, n)$, valeurs propres = $(1, 2, \dots, n)$ - vérifié numériquement. Aucune information sur $\sigma(n)$ ou la primalité : ce serait vrai pour n'importe quelle matrice triangulaire inférieure ayant cette même diagonale, y compris une matrice hors-diagonale complètement aléatoire.
- **Matrice de coprimauté** (pour φ , $M_{x,y} = 1$ si $\text{pgcd}(x+1, y) = 1$) : la diagonale vaut toujours 1 (deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux), donc les valeurs propres sont toutes égales à 1 - aucune information.
- **Matrice des diviseurs non triviaux** : la diagonale est toujours 0 (un nombre n'est jamais son propre diviseur *non trivial*), donc M est *nilpotente* ($M^n = 0$, vérifié numériquement) et toutes ses valeurs propres sont nulles - encore aucune information.

C'est donc un fait *structurel*, pas une malchance de construction : tant que la matrice encode la relation “ d divise n ” sur ses lignes/colonnes indexées par les entiers eux-mêmes, elle est condamnée à être triangulaire, et donc à avoir des valeurs propres triviales. Ce n'est pas propre à vos matrices : c'est vrai de *toute* matrice bâtie de cette manière.

5. Une vraie piste ouverte : les valeurs singulières

Voici où votre intuition retrouve une vraie chance, honnêtement non explorée ici : les **valeurs singulières** de M (les racines carrées des valeurs propres de $M^T M$) ne sont *pas* soumises au même argument. $M^T M$ n'est en général *pas* triangulaire - le produit d'une matrice triangulaire par sa transposée mélange toutes les entrées de M , y compris celles hors-diagonale. La démonstration du théorème 2 ne s'applique donc plus : les valeurs singulières de M pourraient, en principe, être sensibles à la structure fine de la divisibilité codée hors-diagonale.

Remarque : je n'ai ni calculé les valeurs singulières ni exploré cette piste - je vous le dis honnêtement, ce n'est pas un résultat mais une direction légitime, structurellement non condamnée par l'argument qui tue les valeurs propres. Si vous voulez, la suite naturelle serait de calculer numériquement la décomposition en valeurs singulières de vos matrices M pour plusieurs n et de regarder si un motif apparaît en fonction de la primalité de n (ou de sa factorisation). C'est un vrai travail, pas garanti de réussir, mais pas condamné d'avance comme l'était la voie des valeurs propres.

6. Conclusion

Il n'est pas intéressant, pour les matrices que vous avez envisagées, de s'intéresser à leurs valeurs propres, et maintenant vous savez précisément pourquoi : la divisibilité force la triangularité, et la triangularité rend les valeurs propres aveugles à tout ce qui vous intéresse. Ce n'est pas une limite de vos constructions particulières, c'est un fait général sur toute matrice de ce type.

Mais les valeurs singulières échappent à cet argument, et c'est une direction honnêtement ouverte si vous souhaitez l'explorer.