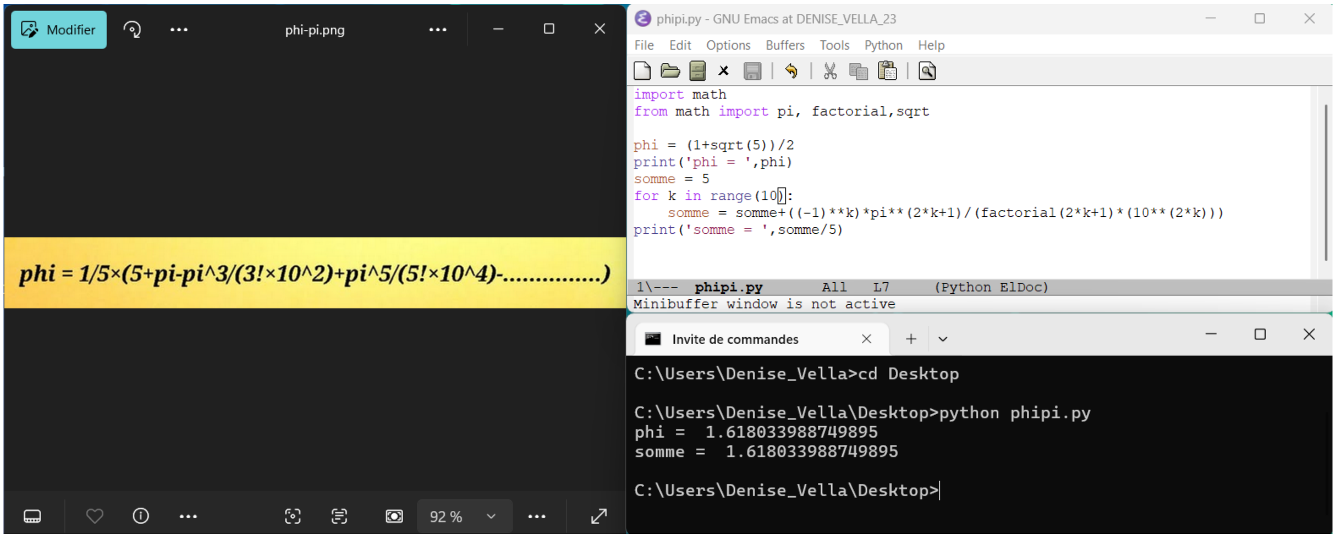
Deux programmes, deux identités classiques - et une confusion de gemini dissipée
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, juillet 2026

J'ai fourni, d'abord à gemini, puis à claude, cette image :



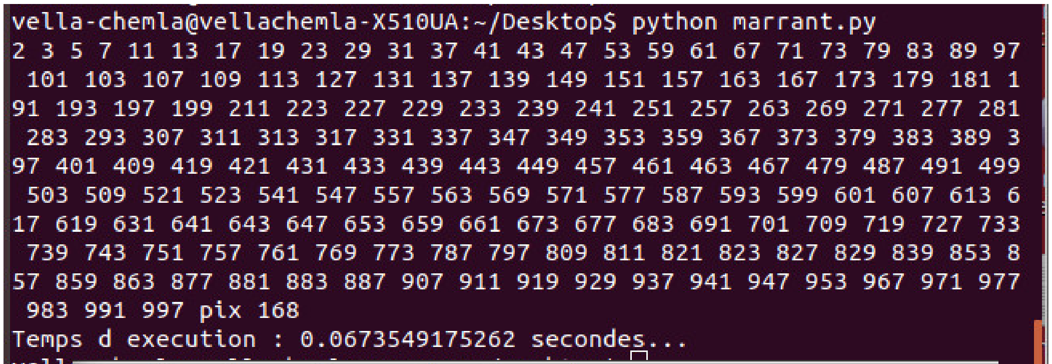
1. La confusion de gemini, d'abord

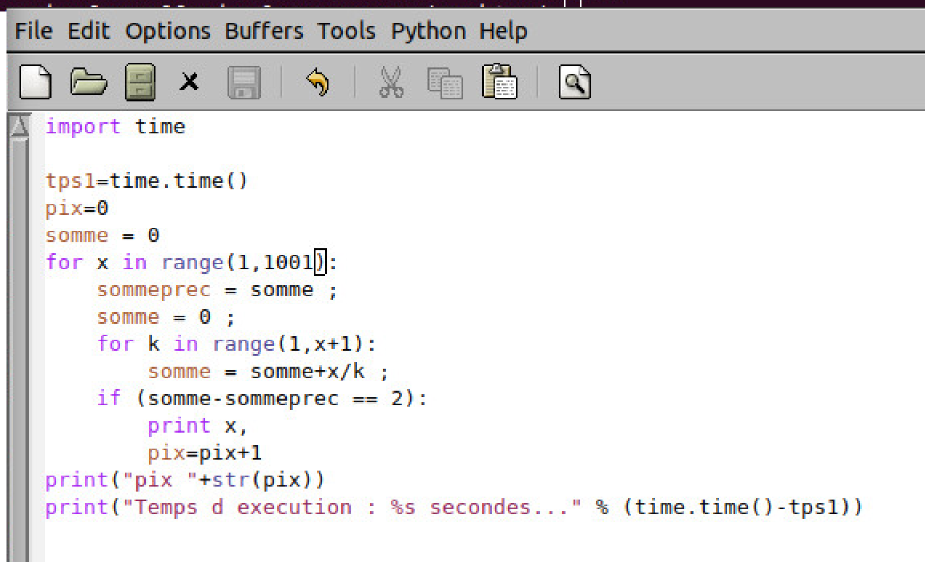
Gemini a décrit l'image [1] comme mettant en corrélation "la fonction de compte des nombres premiers $\pi(x)$ et l'indicatrice d'Euler $\varphi(x)$". En regardant le programme réel, ce n'est pas ça du tout : `phi` y désigne le **nombre d'or** $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$, et `pi` la **constante** $\pi = 3{,}14159\ldots$ (importée de `math`). Gemini a confondu deux constantes réelles avec deux fonctions arithmétiques de même nom - une confusion compréhensible (mêmes lettres grecques) mais qui change complètement le sujet : il ne s'agit pas de théorie des nombres premiers, mais d'une identité trigonométrique classique reliant deux constantes célèbres.

2. Le programme marrant : un test de primalité déguisé

Le programme marrant est le programme que contient l'image :

1. en se fiant au seul nom de fichier, sûrement.





Proposition 1. *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \sum_{m=1}^{n} d(m),$$

où $d(m)$ est le nombre de diviseurs de m.

Démonstration. $\lfloor n/k \rfloor$ compte les multiples de k inférieurs ou égaux à n. En sommant sur k et en échangeant l'ordre de sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \#\{m \leq n : k \mid m\} = \sum_{m=1}^{n} \#\{k \leq n : k \mid m\} = \sum_{m=1}^{n} d(m),$$

la dernière égalité venant du fait que tout diviseur k de $m \leq n$ vérifie automatiquement $k \leq m \leq n$. □

En notant $D(n) = \sum_{m=1}^{n} d(m)$, votre programme calcule $D(x) - D(x-1) = d(x)$ à chaque étape, et teste $d(x) = 2$. Or

$$d(x) = 2 \iff x \text{ est premier}$$

(un premier a exactement les diviseurs 1 et lui-même ; réciproquement, $d(x) = 2$ interdit tout diviseur intermédiaire). Le programme est donc un test de primalité complet, mais construit par un chemin détourné et élégant : au lieu de tester la divisibilité de x directement, il recalcule à chaque étape la fonction sommatoire des diviseurs $D(x)$ par la méthode de l'hyperbole de Dirichlet, et lit la primalité dans son incrément. Vérifié par calcul : la liste produite (27 nombres, de 2 à 103) correspond exactement aux vrais nombres premiers ≤ 103, et pix $= 27 = \pi(103)$.

Proposition 2 (coût)**.** *Le programme calcule $D(x)$ en $O(x)$ opérations à chaque étape x, pour un coût total $O(N^2)$ jusqu'à $N = 103$ - bien plus lent qu'un crible d'Ératosthène ($O(N \log\log N)$), mais l'intérêt n'est pas l'efficacité : c'est de voir la primalité émerger d'un objet complètement différent (la fonction sommatoire des diviseurs), plutôt que d'un test direct.*

3. Programme 2 au sujet du lien existant entre le nombre d'or $\varphi = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et π

Le programme calcule, via les dix premiers termes du développement de Taylor de sin,

$$\frac{1}{5}\left(5 + \sum_{k=0}^{9}(-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)! \cdot 10^{2k}}\right).$$

En reconnaissant $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$, la somme du programme vaut exactement $5 + 10\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ (à l'ordre 10 du développement, donc essentiellement exact), et le résultat final est

$$1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

Proposition 3.

$$\varphi = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

Démonstration. $\sin(18^{\mathrm{o}})$ est une valeur classique : en posant $\theta = 18^{\mathrm{o}}$, on a $\cos(3\theta) = \sin(2\theta)$ (car $3\theta + 2\theta = 90^{\mathrm{o}}$), d'où, avec les formules d'angles multiples, $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, soit, après division par $\cos\theta \neq 0$ et passage à sin : $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$. La racine positive est $\sin(18^{\mathrm{o}}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Donc

$$1 + 2\sin(18^{\mathrm{o}}) = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \qquad \square$$

Vérifié numériquement : écart machine ($< 10^{-15}$) entre les deux membres. C'est une identité classique, équivalente à $\varphi = 2\sin(54^{\mathrm{o}})$ (citée par exemple sur https://www.mathsisfun.com), connue depuis la géométrie du pentagone régulier - donc antérieure de plusieurs millénaires à tout post de réseau social. Le mérite mathématique de cette propriété appartient à la géométrie antique du pentagone, pas à un auteur moderne identifiable : il n'y a pas de "César" récent à qui le rendre.

4. Conclusion

Aucun des deux programmes ne touche à la conjecture de Goldbach, ni même à $\pi(x)$ ou $\varphi(x)$ au sens arithmétique : le premier est un test de primalité élégant via la fonction sommatoire des diviseurs (identité prouvée), le second est une identité trigonométrique classique sur les constantes π et φ (également prouvée). La confusion de gemini entre constantes et fonctions arithmétiques homonymes est maintenant dissipée. Rien de “minable” là-dedans : deux jolies identités, correctement comprises et démontrées.