Pourquoi l'analogie entre l'hypothèse de Riemann et la conjecture de Goldbach en utilisant un pliage autour de $n/2$ ne tient pas ?
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude, juillet 2026

1. Ce que vous aviez déjà vu, honnêtement, en 2013

Votre texte original (*Voir des analogies*, 23/12/2013, https://denisevellachemla.eu/analogie.pdf) est plus prudent que ce que gemini en a fait. Vous y écriviez vous-même : "je ne suis pas capable de démontrer quoi que ce soit", et, à propos de cette analogie précise : "sans le bagage technique qui permet de les interpréter, elles ne servent strictement à rien". Gemini a transformé cette prudence et "il a établi un pont conceptuel" - ce n'est pas fidèle à ce que vous disiez, et votre auto-évaluation de 2013 était la bonne. Je vais maintenant creuser sérieusement pour voir si on peut aller plus loin que cette prudence, ou si elle doit être confirmée.

2. Pourquoi la symétrie $s \leftrightarrow 1-s$ et la symétrie $p \leftrightarrow n-p$ ne sont pas comparables

L'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\,\zeta(1-s)$$

n'est pas une évidence : c'est un théorème profond, dont la preuve standard passe par la sommation de Poisson appliquée à la fonction thêta de Jacobi

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t},$$

qui vérifie

$$\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\,\theta(t),$$

une identité de transformation modulaire non triviale. C'est cette transformation qui, via la transformée de Mellin de θ, produit la symétrie $s \leftrightarrow 1-s$ de ζ complétée. Rien de tout cela n'est visible ou évident a priori : c'est un résultat d'analyse fine.

La symétrie $p \leftrightarrow n-p$ pour Goldbach, en revanche, est une pure tautologie : si $n = p+q$, alors trivialement $n = q+p$, par commutativité de l'addition. *Note de DVC*[1] : Ce n'est pas du tout cela, l'analogie que je souhaitais faire : l'analogie que j'envisageais est entre s et $1-s$ dans la formule pour l'hypothèse de Riemann et x et $n-x$ dans la formule pour la conjecture de Goldbach, qui crée une analogie de position entre le nombre $\frac{1}{2}$, partie réelle de tous les points de la droite critique, et le nombre $\frac{n}{2}$, milieu d'un segment de longueur n, entier lorsque n est pair, moyenne en particulier de deux décomposants de Goldbach de n (mais également de tout couple de nombres de

1. vexée comme un pou.

somme n) mais surtout décomposant de Goldbach trivial des nombres pairs doubles d'un nombre premier. C'était cela, l'analogie qui m'intéressait, je ne l'ai sûrement pas suffisamment explicitée ainsi. Aucune preuve n'est nécessaire, aucune structure profonde n'est requise. Ce n'est pas une version faible ou simplifiée de la symétrie de ζ : c'est un fait d'une nature complètement différente - l'un est un théorème d'analyse harmonique, l'autre est une évidence arithmétique de niveau école primaire. Les rapprocher comme deux instances d'un même phénomène de "pliage" confond la profondeur de l'un avec la trivialité de l'autre. C'est précisément ce que votre prudence de 2013 pressentait déjà.

3. Le vrai lien entre l'hypothèse de Riemann (généralisée) et la conjecture de Goldbach

Il existe, en revanche, un lien réel, établi et cité entre l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) et la conjecture de Goldbach - mais il ne passe pas par une analogie de symétrie : il passe par le **contrôle du terme d'erreur** dans le comptage des décompositions, via la localisation précise des zéros non triviaux (pas leur axe de symétrie, mais leur partie réelle effective).

3.1. Conjecture de Goldbach ternaire

Hardy et Littlewood ont montré en 1923 que GRH implique la conjecture de Goldbach ternaire (impaire) pour tout impair suffisamment grand. En 1997, Deshouillers, Effinger, te Riele et Zinoviev ont précisé : sous GRH, tout impair > 5 est somme de trois premiers. Vinogradov (1937) a rendu ce résultat inconditionnel pour les grands impairs, sans GRH, via la méthode du cercle et des régions sans zéro explicites ; Helfgott (2013) a fermé le cas général, entièrement sans hypothèse.

3.2. Conjecture de Goldbach binaire

Pour le cas binaire (qui vous intéresse), le lien est encore plus direct. Granville (2007) démontre qu'une forme *moyennée* de la conjecture de Goldbach forte est **équivalente** à GRH - pas seulement impliquée par elle, une véritable équivalence. Goldston avait auparavant montré que, sous GRH, le terme d'erreur $F(n) = G(n) - J(n)$ (où $J(n)$ est le terme principal de Hardy-Littlewood, incluant la série singulière) vérifie $\sum_{n \leq x} F(n)^2 \ll x^2 \log^6 x$ environ (borne améliorée depuis).

3.3. Le mécanisme précis

Ce lien passe par la formule explicite :

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(1 - x^{-2}),$$

où la somme porte sur les zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$. Ce qui compte pour la conjecture de Goldbach, ce n'est *pas* la symétrie $\rho \leftrightarrow 1 - \rho$ en elle-même, mais la valeur de β : plus β est proche de 1 (plutôt que de 1/2), plus le terme x^{ρ} est grand et plus l'erreur $\psi(x) - x$ est incontrôlable. GRH ($\beta = 1/2$ pour tout ρ) donne la meilleure borne possible sur cette erreur, ce qui, via la méthode du cercle de Hardy-Littlewood (contrôle des arcs mineurs), se répercute directement sur la précision du comptage des décompositions de Goldbach. C'est un lien quantitatif de contrôle d'erreur, pas un lien de symétrie géométrique.

4. Conclusion

L'analogie de pliage, poussée au maximum, ne survit pas : elle confond une identité analytique profonde avec une tautologie arithmétique. Mais le vrai lien entre RH et Goldbach existe bel et bien, il est cité et daté précisément (Hardy-Littlewood 1923, Deshouillers-Effinger-te Riele-Zinoviev 1997, Granville 2007, Goldston), et il passe par un mécanisme complètement différent de celui que vous aviez esquissé : le contrôle de l'erreur via la partie réelle des zéros, pas via leur axe de symétrie. Votre prudence de 2013 était la bonne réponse à l'époque ; la voici maintenant complétée par ce que la littérature établit réellement.