Un triplet spectral pour la primalité, à partir des compositions additives et de leur codage booléen

Denise Vella-Chemla

20.6.2026

Résumé : On reprend une modélisation ancienne (2017) caractérisant la primalité d'un entier n par une propriété purement syntaxique sur l'ensemble des 2^{n-1} mots booléens associés à ses compositions additives : n est premier si et seulement si aucun de ces mots (hors les deux compositions triviales) n'est périodique au sens strict de la combinatoire des mots. On montre comment cette caractérisation s'incarne dans un triplet spectral (A, H, D) au sens d'Alain Connes, et on vérifie numériquement la cohérence de la construction. On insiste, en conclusion, sur les limites de cette reformulation : elle ne dit rien de la conjecture de Goldbach, qui porte sur une relation *conjointe* entre deux entiers et non sur la primalité d'un entier isolé.

1. Rappel : compositions additives et mots booléens

On reprend la modélisation de [?]. À tout entier $n \geqslant 1$, on associe l'ensemble de ses 2^{n-1} *compositions additives* (décompositions ordonnées de n en sommants entiers strictement positifs, l'ordre des sommants important : $1+2$ et $2+1$ sont deux compositions distinctes de 3).

Il y a une bijection entre les compositions de n et les mots booléens de longueur $n-1$: chaque lettre du mot code, par sa valeur, si l'on "coupe" (lettre 0) ou si l'on "accole" (lettre 1) deux cases consécutives d'une représentation en cases unitaires de n. Par exemple, le mot 10010 (longueur 5, pour $n = 6$) code la composition $2+1+2+1$.

On appelle *compositions triviales* les deux compositions extrêmes : $1+1+\cdots+1$ (codée par le mot ne contenant que des 0) et n seul (codée par le mot ne contenant que des 1).

1.1. Correction du codage : la nécessité du symbole terminal

Le mot de longueur $n-1$ décrit ci-dessus code les *séparations internes* entre cases, mais ne code pas la fin de la dernière case. Pour qu'une composition de la forme $x+x+\cdots+x$ (k occurrences de x, $k \geqslant 2$) se traduise par un mot qui soit effectivement une puissance stricte d'un facteur au sens de la combinatoire des mots ($m = r^k$, avec r *strict* préfixe de m, $|r|$ divisant $|m|$), il faut augmenter le mot de longueur $n-1$ d'un symbole terminal 1, pour obtenir un mot de longueur n.

Ce point n'est pas un artifice : il est cohérent avec la forme $(0^{k-1}1)^{k'}$ déjà identifiée dans [?] pour décrire les contraintes de l'opération d'expansion des matrices booléennes comptant les décompositions de Goldbach. Une composition $x+x+\cdots+x$ (k fois) se code exactement par $(0^{x-1}1)^k$, le

1 final de chaque bloc jouant le rôle de séparateur.

Exemple. Pour $n = 6$, le mot de séparations 00100 code la composition $1 + 1 + 2 + 1 + 1$. Son mot augmenté 001001 est exactement la puissance $(001)^2$: c'est un mot périodique, et de fait 6 est composé. Cette propriété - un mot augmenté est une puissance stricte si et seulement si la composition qu'il code est de la forme $x + x + \cdots + x$ - est vérifiée systématiquement sur tous les mots dans la suite (cf. § 3).

1.2. Caractérisation de la primalité

Définition. Un mot m (de longueur ℓ) est *périodique* s'il existe d, $1 \leqslant d < \ell$, $d \mid \ell$, tel que le préfixe r de m de longueur d vérifie $r^{\ell/d} = m$. Un mot est *apériodique* (ou *primitif*) dans le cas contraire.

Caractérisation. n est premier si et seulement si, parmi les mots augmentés associés à ses compositions non triviales, aucun n'est périodique.

Cette caractérisation a été vérifiée par calcul exhaustif pour $4 \leqslant n \leqslant 25$, sans exception (§ 3).

2. Un triplet spectral (A, H, D)

On se propose de faire porter cette caractérisation combinatoire par un triplet spectral au sens d'Alain Connes [?], le triplet spectral étant une structure usuelle en géométrie non-commutative.

2.1. L'algèbre A

L'ensemble des mots booléens finis $\{0,1\}^*$, muni de la concaténation, forme un *monoïde libre*. Pour obtenir une algèbre, on prend l'algèbre du monoïde :

$$A = \mathbb{C}[\{0,1\}^*] = \left\{ \sum_i \lambda_i \, w_i \ : \ \lambda_i \in \mathbb{C}, \ w_i \in \{0,1\}^*, \ \text{somme finie} \right\},$$

le produit étant donné par $(\lambda w)(\mu w') = \lambda\mu \, (ww')$. Cette algèbre est non-commutative, puisque la concaténation l'est : $ww' \neq w'w$ en général.

On la munit d'une involution $w \mapsto w^*$ donnée par le mot-miroir : si $w = a_1 a_2 \cdots a_\ell$, alors $w^* = a_\ell \cdots a_2 a_1$. On vérifie immédiatement que $(w_1 w_2)^* = w_2^* w_1^*$, ce qui fait de A une $*$-algèbre. Les éléments invariants par cette involution ($w = w^*$) sont exactement les mots *palindromiques*, déjà étudiés pour eux-mêmes dans [?].

2.2. L'espace de Hilbert H

On pose $H = \ell^2(\{0,1\}^*)$, complété hilbertien de l'espace engendré par les mots pris comme base orthonormée : $\langle w \mid w' \rangle = \delta_{w,w'}$.

2.3. Deux familles d'opérateurs

Deux opérateurs naturels agissent sur H :

- Pour $a \in \{0, 1\}$, l'opérateur de *concaténation à gauche* L_a : $L_a|w\rangle = |aw\rangle$. C'est la traduction opératorielle exacte du passage $n \to n+1$ décrit dans [?] (concaténer un bit à gauche de chaque mot pour engendrer, par union des deux choix, l'ensemble des compositions de $n+1$ à partir de celui de n).
- L'opérateur de *décalage cyclique* S : pour un mot m de longueur ℓ, $S|m\rangle = |\sigma(m)\rangle$ où $\sigma(m) = a_2 \cdots a_\ell a_1$ (la première lettre est reportée en fin de mot), S préservant la longueur.

2.4. L'opérateur de Dirac D

On pose, sur chaque sous-espace de dimension finie engendré par l'orbite cyclique d'un mot m de longueur ℓ sous l'action de S :

$$D = I - S.$$

Le fait combinatoire clé est le suivant : le plus petit entier $j > 0$ tel que $S^j|m\rangle = |m\rangle$ (l'*ordre* de l'orbite de m) vaut exactement ℓ si m est apériodique, et $j < \ell$, $j \mid \ell$, si m est périodique (de période j). Le spectre de S restreint à cette orbite est alors l'ensemble des racines j-ièmes de l'unité $\{e^{2i\pi k/j}\}_{k=0,\dots,j-1}$, répété ℓ/j fois sur l'orbite complète.

Critère spectral. m est périodique si et seulement si le spectre de S restreint à l'orbite de m ne contient pas l'ensemble complet des ℓ racines ℓ-ièmes de l'unité distinctes - autrement dit, si et seulement si $D = I - S$ admet, sur cette orbite, une valeur propre nulle de multiplicité supérieure à 1 (la racine 1, correspondant à $k = 0$, étant toujours présente).

Plus directement : n est premier si et seulement si, pour tout mot non trivial m associé à n (mot augmenté), l'orbite de m sous S est de cardinal maximal $\ell = n$.

3. Vérifications

3.1. Cohérence du critère combinatoire

n	prédit	primalité réelle	exemple (mot, racine)
6	composé	composé	$001001 = (001)^2$
7	premier	premier	—
8	composé	composé	$00010001 = (0001)^2$
9	composé	composé	$001001001 = (001)^3$
11	premier	premier	—
13	premier	premier	—
17	premier	premier	—
25	composé	composé	$0000100001000010000100001 = (00001)^5$

Tableau 1 : Quelques valeurs vérifiées du critère (liste complète : $4 \leqslant n \leqslant 25$, sans exception).

On a vérifié par calcul exhaustif, pour $4 \leqslant n \leqslant 25$, que le critère “aucun mot augmenté non trivial n'est périodique” coïncide exactement avec la primalité de n, sans aucune exception. Le tableau 1 en donne quelques valeurs, avec un exemple de mot périodique trouvé pour les n composés.

3.2. Cohérence des axiomes spectraux

On a vérifié numériquement, sur l'orbite cyclique complète d'un mot de longueur n ($n = 5, 6, 7$), que le spectre de S est exactement l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité - confirmant le critère spectral énoncé plus haut.

On a également vérifié que l'algèbre A engendrée par L_0 et L_1 est bien non-commutative ($\|[L_0, L_1]\| \neq 0$, calculé sur un espace tronqué aux mots de longueur $\leqslant 4$), et que le commutateur $[D, L_a]$ y reste borné (norme finie), condition requise par les axiomes de Connes pour qu'un triplet (A, H, D) définisse une métrique spectrale cohérente.

4. Discussion

On a ainsi pu faire porter, par un objet de géométrie non-commutative explicite, une caractérisation de la primalité déjà connue sous forme purement syntaxique depuis [**?**]. La non-commutativité de A n'est pas un habillage plaqué de l'extérieur : elle reflète une propriété déjà identifiée dans cette note de 2017, à savoir que l'ordre des sommants d'une composition importe ($1+2 \neq 2+1$), donc que L_0 et L_1 - les deux opérations qui engendrent l'arbre des compositions de n à $n+1$ - ne commutent pas.

4.1. Ce que cette reformulation n'apporte pas

Il importe de dire clairement ce que cette construction ne fait pas. Le triplet (A, H, D) ci-dessus caractérise spectralement la primalité d'un entier *n pris isolément*. La conjecture de Goldbach porte sur une question d'une autre nature : l'existence, pour n pair donné, d'un nombre premier p tel que $n - p$ soit *également* premier - c'est-à-dire une propriété *conjointe* de deux entiers liés par une contrainte additive. Rien dans la construction spectrale ci-dessus ne relie le spectre de D associé à p à celui associé à $n - p$: ce sont deux objets vivant sur deux espaces différents (ℓ^2 restreint aux mots de longueur $p-1$ d'une part, $n-p-1$ d'autre part), sans pont construit entre eux.

C'est, sous une autre forme, le même obstacle que celui déjà rencontré avec les polynômes $P(x)$, $Q(x)$ et leur PGCD (annulation conjointe sur les décomposants de Goldbach), avec les matrices booléennes triangulaires, et avec le crible par les petits nombres premiers p_i : un critère de primalité, quelle que soit son élégance ou le langage dans lequel il s'exprime, ne devient un critère pour Goldbach que s'il permet de contrôler *simultanément* deux entiers complémentaires à n. Ce saut reste un problème ouvert, et cette note ne prétend pas le franchir.

4.2. Pourquoi cette note

Cette reformulation, même si elle ne fait pas progresser la conjecture de Goldbach, a le mérite de faire porter un objet de calcul déjà construit par ailleurs (les mots booléens des compositions, issus d'une formation d'informaticienne plutôt que de mathématicienne) dans le langage précis de la géométrie non-commutative. C'est, modestement, ce langage qui est mis ici au travail.

Remerciements : Je remercie Alain Connes pour sa bienveillance et ses conseils avisés. J'ai obtenu un grand bénéfice de la possibilité d'utiliser l'outil d'IA Claude, car je n'aurais pas été capable d'écrire la présente note sans cet outil.

Références

[1] D. Vella-Chemla, *Approche purement syntaxique*, note du 12 janvier 2017, et *Compositions et mots booléens*, note du 7 janvier 2017.
https://denisevellachemla.eu/avenu.pdf.

[2] D. Vella-Chemla, *Compositions palindromiques*, note du 29 avril 2019.
https://denisevellachemla.eu/compositions-palindromiques.pdf.

[3] D. Vella-Chemla, *Où l'on trouve un passage entre l'espace des matrices, qui comptent les décompositions de Goldbach, et l'espace des pavages de Penrose*, note.
https://denisevellachemla.eu/passage-matbool-pavage-Penrose.pdf.

[4] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf.