ZÉROS DE ZÊTA ET OPÉRATEURS D'ONDES PROLATE

Opérateurs adéliques semi-locaux

Alain Connes, Caterina Consani, Henri Moscovici

Résumé : Nous intégrons dans le cadre de la formule de trace semi-locale deux découvertes récentes sur la réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann en introduisant un analogue semi-local de l'opérateur d'onde ellipsoïdal. Ce dernier joue un rôle clé à la fois dans la réalisation spectrale des premiers zéros de la fonction zêta - en utilisant la partie positive de son spectre - et de leur comportement ultraviolet - en utilisant l'espace de Sonin qui correspond à la partie négative du spectre. Dans le cas archimédien, l'opérateur d'onde ellipsoïdal est la somme du carré de l'opérateur de calibrage avec la graduation des polynômes orthogonaux, et nous montrons que cette formulation s'étend au cas semi-local. Nous prouvons la stabilité de l'espace de Sonin semi-local et décrivons sa relation avec les espaces de Hilbert de fonctions entières. Enfin, nous relions l'opérateur d'onde ellipsoïdal à la représentation métaplectique de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2,\mathbb{R})$ dans le but d'obtenir un second candidat pour l'opérateur d'onde ellipsoïdal semi-local.

1. Introduction

La difficulté à résoudre l'hypothèse de Riemann est (HR) est souvent principalement attribuée au nombre infini de termes du produit eulérien.

$$ta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \tag{1}$$

Pourtant, contrairement à cette croyance initiale, il existe une propriété $P(n)$, ne faisant intervenir que les facteurs eulériens des nombres premiers inférieurs à n, et dont la validité pour tout n est équivalente à HR. Elle découle du critère de positivité de Weil qui fait intervenir la forme quadratique Q_n définie en utilisant les formules explicites de Riemann-Weil appliquées pour tester les fonctions à support dans l'intervalle compact symétrique $[\frac{1}{n}, n]$. En outre, la formule de trace semi-locale de [7] donne, pour tout n, un paradigme théorique dans l'espace de Hilbert dans lequel la forme quadratique Q_n devient la trace d'une expression de théorie des opérateurs simple, offrant ainsi une base naturelle pour attaquer HR. Le présent article poursuit le développement de l'approche en théorie des opérateurs pour HR en fournissant un paradigme unifié qui incorpore deux découvertes récentes liées à la réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta de Riemann.

D'un côté, les résultats de [9,10] montre que la formule de trace semi-locale de [7] donne une explication conceptuelle de la positivité de Weil pour la place archimédienne, sa source étant la représentation dans l'espace de Hilbert du groupe de mise à l'échelle. De plus, dans la même veine, [11] montre que l'on peut atteindre la partie infrarouge (basse) des zéros de la fonction zêta de Riemann en utilisant l'opérateur de mise à l'échelle avec des conditions de

Traduction : Denise Vella-Chemla, mars 2025, de l'article https://arxiv.org/pdf/2310.18423.

limite périodiques, restreintes à l'orthogonal de la racine de la forme quadratique de Weil. D'un autre côté, le comportement inhabituel dans l'ultraviolet des zéros de la fonction zêta de Riemann a permis de trouver une incarnation spectrale inattendue dans [12] en fonction des valeurs propres *négatives* de l'opérateur d'onde prolate classique, étendu à la droite réelle complète.

Dans le présent article, on relie ces développements et on va au-delà de l'unique place archimédienne, en utilisant le paradigme semi-local de [7] qui fournit une étape théorique dans l'espace de Hilbert canonique dans lequel la plupart des principaux éléments intervenants continuent d'avoir du sens, et dans lequel à la fois la formule explicite et la racine de la forme quadratique de Weil ont un sens conceptuel.

Le rôle de l'opérateur prolate est crucial dans les accords observés (avec les zéros de zêta dans le domaine infrarouge et dans le domaine ultraviolet). Cette "significativité" dans [11] émerge parce que la racine de la forme quadratique de Weil est donnée par le domaine de l'application $\mathcal{E}$ définie sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\rm pair}$ par la formule $\mathcal{E}(f)(u) := u^{1/2}\sum f(nu)$. Quand on l'applique aux fonctions propres φ_n de l'opérateur prolate pour les valeurs propres *positives*, cela génère des valeurs propres extrêmement petites de la forme quadratique de Weil restreinte aux fonctions à support compact fixe. Les fonctions propres correspondantes ψ_n de la forme quadratique de Weil sont reconstruites dans [11] par une orthogonalisation de Gram-Schmidt de $\mathcal{E}(\varphi_n)$. La forme semi-locale de l'application $\mathcal{E}$ est en accord avec l'identification canonique des fonctions semi-locales avec les fonctions des classes d'idèles. La signification conceptuelle de l'application $\mathcal{E}$ deviendra claire dans le formalisme semi-local. Les fonctions propres ψ_n ont été utilisées dans [11] pour conditionner l'opérateur de mise à l'échelle avec des conditions aux bornes périodiques. Avec ce processus, on génère les zéros de petites parties imaginaires de la fonction zêta, alors que le comportement ultraviolet des zéros reste hors d'atteinte. Par conséquent, le fait que le comportement attendu dans l'ultraviolet soit réalisé par le spectre négatif de l'opérateur prolate suggère le programme alléchant de trouver l'analogue semi-local de l'opérateur prolate. On s'attend à ce que l'utilisation d'outils de la théorie des opérateurs dans le cas semi-local ouvre une voie pour traiter la positivité de Weil comme dans [10]. En fait, l'aspect théorie des opérateurs dans le présent article fournit une stratégie plus précise pour traiter la positivité de Weil semi-locale en comparant la trace fonctionnelle associée à l'opérateur - qui est automatiquement positive pour un opérateur auto-adjoint - et la fonctionnelle de Weil. Le conditionnement, par la racine de la forme quadratique de Weil, qui a marché pour l'opérateur de mise à l'échelle dans le cas infrarouge, sera implémentée automatiquement par l'orthogonalité des parties positive et négative du spectre de l'opérateur prolate semi-local, dont l'espace propre négatif correspondant a été identifié dans l'espace de Sonin dans [12].

Notre approche implique de réinterpréter l'opérateur prolate pour proposer un candidat pour sa contrepartie semi-locale. Ceci est fait en plaçant au premier plan l'opérateur de mise à l'échelle, dont la version semi-locale est bien établie dans [7], ainsi que l'espace de Sonin.

L'opérateur de mise à l'échelle $\mathbb{S}$ est le générateur auto-adjoint du groupe des dilatations dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{pair}$ des fonctions paires de carré intégrable de la droite réelle. L'opérateur prolate admet une expression simple par rapport à l'opérateur $\mathbb{S}$ et au vecteur donné par la fonction $\xi(x) := e^{-\pi x^2}$. Ce vecteur appartient au domaine de $\mathbb{S}^n$ pour tout n, et le domaine des $\mathbb{S}^n\xi$ est $L^2(\mathbb{R})^{pair}$. On définit N comme le calibrage associé à la filtration provenant du domaine linéaire des polynômes $p(\mathbb{S})\xi$, avec $\deg P \leq n$. Ignorer la définition délicate du domaine a nécessité de trouver un opérateur auto-adjoint, l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda$ donné par l'expression formelle

$$\mathbf{W}_\lambda = -\mathbb{S}^2 + 2\pi\lambda^2(4N+1) - \frac{1}{4}. \tag{2}$$

La formule (2) a du sens pour toute *paire cyclique* (D, ξ) donnée par un opérateur auto-adjoint D agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un vecteur unité $\xi \in \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Dom}D^n$ qui est cyclique (*i.e.* tel que les vecteurs $p(D)\xi$ avec p un polynôme, sont denses dans $\mathcal{H}$). Pour toute paire cyclique (D, ξ), le théorème spectral fournit une *forme canonique* (ou diagonalisation) dans laquelle D est représentée comme la multiplication par la variable $s \in \mathbb{R}$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ où $d\mu$ est la mesure spectrale définie par $\int f(s)d\mu(s) := \langle f(D)\xi|\xi\rangle$, et le vecteur cyclique ξ est la fonction constante 1. La théorie des polynômes orthogonaux pour la mesure $d\mu$ fournit alors la représentation de D comme une matrice jacobienne et celle de l'opérateur de calibrage N comme une matrice diagonale. On rappelle ces faits de base dans la section 2. Il s'avère qu'on peut naturellement associer à une paire cyclique un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où $\mathcal{H}$ et D sont inchangés alors que l'algèbre $\mathcal{A} := c_0(\mathbb{N})$ agit via l'opérateur de calibrage N associé aux polynômes orthogonaux de la mesure spectrale. Le rôle du triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est de comprendre algébriquement l'opérateur prolate comme une perturbation de l'opérateur $-D^2$ par l'ajout d'un élément à l'algèbre $\mathcal{A}$. Le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ d'une paire cyclique est *pair* (au sens où il admet un calibrage par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui commute avec l'algèbre et anti-commute avec D) si et seulement si la mesure spectrale $d\mu$ est paire, *i.e.* invariante selon $s \mapsto -s$. De plus, un tel calibrage par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, γ, est unique s'il existe. Dans le cas pair, on obtient une représentation par une matrice de Jacobi pour l'opérateur prolate (proposition 2.4).

Dans la section 3, on décrit dans le théorème 3.1 la forme canonique de la paire cyclique paire associée à l'opérateur de mise à l'échelle $D = \mathbb{S}$ et au vecteur cyclique $\xi_\infty(x) = 2^{1/4}e^{-\pi x^2}$. Le calibrage est donné par la transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}$ agissant dans $L^2(\mathbb{R})^{pair}$. L'isomorphisme avec la forme canonique est donné par l'unitaire

$$\mathcal{V} = \mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R}, dm) \tag{3}$$

qui est la composition de la transformation unitaire $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{U}(f) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v \,.$$

avec l'opérateur de multiplication $\mathcal{M}(f)(s) := \mathcal{U}(\xi_\infty)^{-1}(s) f(s)$ qui est un isomorphisme unitaire $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, dm)$ pour la mesure de probabilité $dm(s) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{is}{2})|^2 ds$ sur $\mathbb{R}$. L'isomorphisme unitaire $\mathcal{V}$ de (3) est la transformation de Hardy-Titchmarsh qui, modulo les normalisations, apparaît déjà dans l'article [14], Théorème 1, p. 201.

La motivation originale de la transformation de Hardy-Titchmarsh était de construire des fonctions auto-réciproques en conjuguant la transformation de Fourier à la symétrie $s \mapsto -s$. Cela met en évidence le rôle de la parité, *i.e.* le calibrage par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de la paire cyclique. L'isomorphisme unitaire $\mathcal{V}$ transforme les fonctions de Hermite en polynômes orthogonaux P_n pour la mesure dm et l'opérateur de mise à l'échelle $\mathbb{S}$ en une multiplication par s. De plus, l'opérateur d'onde prolate

$$(\mathbf{W}_\lambda \psi)(q) = -\partial((\lambda^2 - q^2)\partial)\, \psi(q) + (2\pi\lambda q)^2\, \psi(q) \tag{4}$$

devient un cas particulier de (2) et, en fait, d'une construction générale pour les polynômes orthogonaux. Plus précisément, avec N l'opérateur de calibrage $N(P_n) := n\ P_n$ dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$, on obtient

$$\mathcal{V} \circ \mathbf{W}_\lambda \circ \mathcal{V}^* = -s^2 + 2\pi\lambda^2(4N + 1) - \frac{1}{4} \tag{5}$$

où s^2 est l'opérateur de multiplication par le carré de la variable dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$. Le côté droit de (5) a du sens dans le contexte général des polynômes orthogonaux. On calcule dans la section 3.4 la matrice de Jacobi hermitienne de l'opérateur de mise à l'échelle $\mathbb{S}$ dans la base des polynômes orthogonaux. Ses éléments diagonaux sont 0, alors que les éléments non nuls de la matrice au-dessus de la diagonale sont $\mathbb{S}_{n,n+1} = i\sqrt{(n + 1/2)(n + 1)}$. Dans la section 3.5, on décrit les deux matrices de Jacobi hermitiennes $J_\pm$ associées aux opérateurs $\mathbb{S}^2$ restreintes aux espaces propres de $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}$ pour les valeurs propres ± 1. De façon similaire, on obtient les matrices de Jacobi de l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda$.

Dans la section 3.6, on montre que les zéros de la fonction zêta apparaissent à partir de l'action de l'opérateur d'échelle sur le quotient par le domaine de l'application $\mathcal{E}$ appliquée à l'espace propre positif de $\mathbf{W}_\lambda$ quand $\lambda \to \infty$.

La section 4 est consacrée à l'extension de la transformation de Hardy-Titchmarsh dans la situation semi-locale faisant intervenir un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$ contenant la place archimédienne, et l'analyse de l'espace de Sonin semi-local. La version semi-locale du théorème 3.1 nécessite une nouvelle mesure qui, à normalisation près, est donnée par le carré de la valeur absolue de la restriction à la droite réelle du produit de facteurs locaux pour les places dans S.

Pour établir ce résultat, on a besoin de la notation suivante (voir section 4.1). L'anneau semi-local des adèles est le produit $\mathbb{A}_S = \prod_S \mathbb{Q}_v$, l'espace semi-local des classes d'adèles est le quotient $X_S := \mathbb{A}_S/\Gamma$, où

$$\Gamma = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \;:\; p_j \in S \setminus \{\infty\}\,,\, n_j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p).$$

Le groupe semi-local des classes d'idéles $C_S := \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)/\Gamma$ agit sur X_S par multiplication et cette action se restreint à son sous-groupe compact maximal K_S. On a l'isomorphisme canonique w_S de l'espace de Hilbert $L^2(X_S)^{K_S}$ avec $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$, voir (42).

Avec $\mathbb{F}_\mu : L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u) \to L^2(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier pour le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ (voir (17)), on obtient l'unitaire $\mathcal{U}_S := \mathbb{F}_\mu \circ w_S$. Finalement on définit $\mathcal{M}_S : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ comme étant l'unitaire donné par

$$\mathcal{M}_S(f)(s) := \left(\prod_{v \in S} L_v\left(\frac{1}{2} - is\right)\right)^{-1} f(s), \quad dm_S(s) := \Big|\prod_{v \in S} L_v\left(\frac{1}{2} - is\right)\Big|^2 ds. \tag{6}$$

où les L_v sont les facteurs d'Euler locaux.

On dérive alors le résultat suivant

Théorème 1. (*Proposition 4.1* et *Proposition 4.2*) Soit S un ensemble fini de places avec $\infty \in S$, soit R_S le sous-anneau compact maximal de $\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} \mathbb{Q}_p$, et $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. Alors soit $\eta_S(f)$ la classe de la fonction $1_{R_S} \otimes f$ in $L^2(X_S)^{K_S}$.

(i) On a

$$\mathbb{F}_\mu w_S(\eta_S(f))(s) = \Big(\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} L_p\left(\frac{1}{2} - is\right)\Big)(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s). \tag{7}$$

(ii) Soit la transformation de Fourier pour $\mathbb{Q}_p$ normalisée de telle façon que la fonction $1_{\mathbb{Z}_p}$ soit sa propre transformation de Fourier et soit $\mathbb{F}_S$, agissant dans $L^2(X_S)$, induite par le produit tensoriel des transformations locales de Fourier. On a

$$\mathbb{F}_S \circ \eta_S = \eta_S \circ \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}.$$

(iii) La transformation unitaire $\mathcal{V}_S := \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \to L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ donne la forme canonique de la paire cyclique (D, ξ) où $D := \mathbb{S}$ et $\xi = \xi_S := \eta_S(\xi_\infty)$.

(iv) La paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_S)$ est paire et le calibrage par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est donné par la transformation de Fourier $\mathbb{F}_S$ qui devient la symétrie $s \mapsto -s$ par la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$.

Le calcul des coefficients de la matrice de Jacobi hermitienne de la paire cyclique pour un S général comme ci-dessus est reporté à un article ultérieur. Pour analyser les espaces de Sonin semi-locaux, on introduit la transformation de Hardy-Titchmarsh duale dans la section 4.4. Dans le cas d'une place archimédienne unique, cette transformation avait été introduite par J-F. Burnol en connexion avec le travail de L. de Branges. Le résultat principal de cette section est la construction d'un isomorphisme hilbertien [1] $\theta_S : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(X_S)^{K_S}$ qui relie ensemble les espaces de Sonin semi-locaux :

Théorème 2 : Soit S un ensemble fini de places avec $\infty \in S$ et $\lambda > 0$. Alors l'application θ_S induit un isomorphisme hilbertien des espaces de Sonin $\theta_S : \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) \to \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ où α est le caractère normalisé.

Ce résultat suggère que l'espace de Sonin défini de façon invariante, quand on l'équipe d'un opérateur de type prolate adéquat, joue le rôle de l'espace recherché pour la cohomologie de Weil. En fait, on observe dans [12] que, dans le cas d'une place archimédienne unique, l'espace de Sonin correspond (à une divergence possible de dimension finie) à la partie négative du spectre de l'opérateur prolate et cela fournit une contrainte supplémentaire dans la recherche de l'analogue semi-local de l'opérateur prolate. De plus, les résultats de [13] suggèrent une relation forte entre les polynômes orthogonaux - qui jouent un rôle crucial dans le cas semi-local - et le fait de produire des noyaux qui commutent avec les opérateurs différentiels.

On obtient un autre point de vue conceptuel sur l'opérateur prolate dans la section 5. On montre que l'opérateur prolate admet (toujours au niveau formel algébrique) une description comme élément de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{R})$ à travers la représentation métaplectique de la double couverture de $SL_2(\mathbb{R})$. On compare cette description de l'opérateur prolate avec le théorème 3.1 dans la section 5.2. On montre que les générateurs de la représentation métaplectique font sens dans le contexte des paires cycliques, *i.e.* de manière équivalente aux polynômes orthogonaux. On prouve (théorème 5.2) que les coefficients de divergence d_n s'évanouissent précisément dans la situation du théorème 3.1 et que leur évanouissement détermine de manière unique la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$, les moments associés et la représentation.

Dans un article à venir, on développera le rôle de la représentation de Weil [20] de la couverture métaplectique du groupe $SL_2(\mathbb{A}_S)$ dans le contexte semi-local, introduisant par là un second candidat possible pour l'opérateur prolate semi-local.

1. On utilise le terme "hilbertien" pour dénoter la structure d'espace vectoriel topologique sous-tendue d'un espace de Hilbert.

2. Paires cycliques et opérateurs prolate associés

Dans cette section, on fournit une construction générale à partir d'une paire (D, ξ) constituée d'un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un vecteur unité $\xi \in \cap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Dom} D^n$. On suppose que $\mathcal{H}$ est de dimension infinie et que ξ est un *vecteur cyclique*, *i.e.* que le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $D^j \xi$ pour $j \in \mathbb{N}$ est dense dans $\mathcal{H}$. Étant donnée une telle paire, on appelle $E_n \subset \mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs b$D^j \xi$ pour $j \leq n$. Ce sont des sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{H}$ et dim $E_n = n + 1$, puisque les vecteurs $D^j \xi$ sont linéairement indépendants. On a par construction $D(E_n) \subset E_{n+1}$ et la situation générale est décrite comme suit par le théorème spectral.

Théorème 2.1 : Soit (D, ξ) une paire cyclique comme ci-dessus.

(i) Il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ et un isomorphisme unitaire $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ qui transforme D en l'opérateur de multiplication par la variable $s \in \mathbb{R}$ et le vecteur ξ en la fonction constante égale à 1.

(ii) Par l'isomorphisme U, le sous-espace E_n devient l'espace des polynômes de degré $\leq n$.

(iii) La mesure spectrale $\int f(s) d\mu(s) := \langle f(D)\xi | \xi \rangle$ est un invariant complet de la paire cyclique.

Le théorème 2.1 donne la forme canonique d'une paire cyclique (D, ξ).

On peut appliquer la théorie générale des polynômes orthogonaux et obtenir une base orthonormale (ξ_j) où $\xi_0 = \xi$ et E_n est l'espace engendré par les ξ_j pour $j \leq n$. On considère alors l'opérateur *nombre* N qui est diagonal dans la base orthonormale (ξ_j) et tel que $N\xi_j := j\xi_j$.

Définition 2.2 : *Soit* (D, ξ) *une paire cyclique. L'opérateur* prolate formel $\omega(D, \xi, \lambda)$ *est l'opérateur*

$$\omega(D, \xi, \lambda) := -D^2 + \lambda^2 N.$$

La définition est formelle tant qu'elle ne donne pas le domaine précis de l'opérateur. On verra dans la section 3 que l'opérateur différentiel prolate standard $\mathbf{W}_\lambda$ est un cas particulier de la définition 2.2. Il est clair dans ce cas que l'opérateur formel obtenu est symétrique et trouver l'extension auto-adjointe est délicat.

Définition 2.3 : Soit (D, ξ) une paire cyclique. Un calibrage γ par $\mathbb{Z}/2$ est un unitaire de carré 1, $\gamma^2 = 1$, $\gamma = \gamma^*$ tel que $\gamma D = -D\gamma$ et $\gamma\xi = \xi$. Une paire cyclique est *paire* si elle admet un calibrage par $\mathbb{Z}/2$.

Proposition 2.1. — *Une paire cyclique est* paire *ssi la mesure spectrale μ du théorème 2.1 est invariante selon la transformation $s \mapsto -s$. Le calibrage par $\mathbb{Z}/2$ est unique (s'il existe) et il est égal à $\gamma = \exp(i\pi N)$.*

Preuve. Supposons que la mesure μ du théorème 2.1 soit invariante selon $s \mapsto -s$. Soit $\gamma(f)(s) := f(-s)$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. On a $\gamma^2 = 1$ et γ est unitaire par invariance de la mesure. Par construction, γ anti-commute avec la multiplication par s et on a $\gamma\xi = \xi$ où $\xi(s) = 1$, $\forall s$. En utilisant l'isomorphisme unitaire $U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ du théorème 2.1, on obtient un calibrage par $\mathbb{Z}/2$ pour (D, ξ). Inversement, soit γ un calibrage par $\mathbb{Z}/2$ pour (D, ξ). Alors la mesure spectrale est invariante selon la transformation $s \mapsto -s$, puisqu'on a

$$\int h(s)d\mu(s) := \langle h(D)\xi \mid \xi\rangle = \langle h(D)\gamma\xi \mid \gamma\xi\rangle = \langle h(-D)\xi \mid \xi\rangle = \int h(-s)d\mu(s)$$

Montrons l'unicité du calibrage par $\mathbb{Z}/2$. Soit γ' un autre calibrage par $\mathbb{Z}/2$. Alors le produit $u = \gamma\gamma'$ commute avec D et vérifie l'égalité $u\xi = \xi$. Ainsi on a $uD^j\xi = D^j\xi$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et puisque ξ est cyclique, on obtient $u = 1$ et par conséquent $\gamma' = \gamma$. Montrons que $\gamma = \exp(i\pi N)$. On a $\gamma D^j\xi = (-1)^j D^j\xi$. Cela montre que les sous-espaces E_n (engendrés par les $D^j\xi$ pour $j \le n$) sont globalement invariants selon γ et qu'ils se décomposent comme les espaces propres $E_n^\pm$ engendrés respectivement par les $D^j\xi$ pour $j \le n$, j pair et j impair. Le processus d'orthonormalisation de Gram–Schmidt a ainsi lieu indépendamment dans les $E_n^\pm$ rendant la base des ξ_j orthonormale avec les $\xi_j \in E_n^\pm$ selon la parité de j.

Il en découle que $\gamma = \exp(i\pi N)$. □

2.1. Triplet spectral d'une paire cyclique. — Soit (D, ξ) une paire cyclique paire et γ le calibrage par $\mathbb{Z}/2$. La proposition 2.1 suggère de considérer le triplet spectral pair $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où la C^*-algèbre $\mathcal{A} := c_0(\mathbb{N})$ des séquences s'évanouissant à l'∞ agit comme suit dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de la paire cyclique :

$$c_0(\mathbb{N}) \times \mathcal{H} \ni (f, \eta) \mapsto f(N)\eta \in \mathcal{H} \tag{8}$$

Proposition 2.2. — *Soit (D, ξ) une paire cyclique, et $\mathcal{A} := c_0(\mathbb{N})$ agissant dans $\mathcal{H}$ par (8). Alors $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral et les commutateurs $[D, f]$ ont du sens et sont bornés pour tout $f \in c_c(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$.*

Preuve. Soit $f \in c_c(\mathbb{N})$, c'est par construction une combinaison linéaire finie des fonctions delta $\delta_j(k) := 0$ pour $k \neq j$ et $\delta_j(j) = 1$. L'action (8) de δ_j dans $\mathcal{H}$ est l'opérateur de rang 1 $|\xi_j\rangle\langle\xi_j|$, et son commutateur avec D fait sens puisque $\xi_j \in \mathrm{Dom}D$ et il est égal à l'opérateur borné $|D\xi_j\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle D\xi_j|$. Par conséquent, les commutateurs $[D, f]$ sont des opérateurs de rang fini pour tout $f \in c_c(\mathbb{N}) \subset c_0(\mathbb{N})$. □

On a $D\xi_j \in E_{j+1}$ pour tout j et $\langle D\xi_n|\xi_k\rangle = 0$ pour $k < n-1$ en utilisant $D = D^*$. Ainsi on a

$$D\xi_n = a_{n-1}\xi_{n-1} + a_n\xi_{n+1}, \quad a_n \neq 0, \tag{9}$$

où l'on peut fixer par induction la phase des vecteurs orthonormaux ξ_n de telle manière que les scalaires non nuls $a_n := \langle D\xi_n | \xi_{n+1}\rangle$ soient positifs. Soit $f \in c_c(\mathbb{N})$, on a $f = \sum f(j)\delta_j$ et

$$[D, f] = \sum f(j)[D, \delta_j] = \sum f(j)a_j \left(|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|\right) + \sum f(j)a_{j-1} \left(|\xi_{j-1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j-1}|\right)$$

$$= \sum (f(j) - f(j+1))a_j \left(|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|\right) = \sum \alpha_j \left(|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|\right)$$

où $\alpha_j := (f(j) - f(j+1))a_j$. Soit $T(j) := (|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j| - |\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|)$. On a

$$\| \sum \alpha_j T(j)\| \leq \| \sum \alpha_{2j} T(2j)\| + \| \sum \alpha_{2j+1} T(2j+1)\| = \max |\alpha_{2j}| + \max |\alpha_{2j+1}|$$

puisque les matrices des termes apparaissant dans la partie droite sont diagonales par blocs. De plus on a

$$\langle \xi_{k+1} | T(j)\xi_k\rangle = \langle\xi_{k+1}|\xi_{j+1}\rangle\langle\xi_j|\xi_k\rangle - \langle\xi_{k+1}|\xi_j\rangle\langle\xi_{j+1}|\xi_k\rangle = \delta(j-k)$$

de telle façon que

$$\langle\xi_{k+1}| \left(\sum \alpha_j T(j)\right) \xi_k\rangle = \alpha_k$$

et on obtient les inégalités

$$\max |\alpha_j| \leq \| \sum \alpha_j T(j)\| \leq \max |\alpha_{2j}| + \max |\alpha_{2j+1}|$$

ce qui donne

$$\max |(f(j) - f(j+1))a_j| \leq \|[D, f]\| \leq \max_{j \text{ pair}} |(f(j) - f(j+1))a_j| + \max_{j \text{ impair}} |(f(j) - f(j+1))a_j|$$

et

$$\max |(f(j) - f(j+1))a_j| \leq \|[D, f]\| \leq 2 \max |(f(j) - f(j+1))a_j| \tag{10}$$

□

On calcule maintenant la fonction de distance spectrale sur $\mathbb{N}$ associée au triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

Proposition 2.3. — *Soit $\phi(n) := \sum_{0\leq j\leq n} a_j^{-1} \in \mathbb{R}_+$. La fonction de distance spectrale sur le triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ de la proposition 2.2 est équivalente à la distance $d(n, m) := |\phi(n) - \phi(m)|$, plus précisément*

$$\frac{1}{2} d(n, m) \leq \sup\{|f(n) - f(m)| \mid \|[D, f]\| \leq 1\} \leq d(n, m) \tag{11}$$

Preuve. Par construction, on a $a_j > 0$ de telle façon que l'application ϕ est strictement croissante et $d(n, m) := |\phi(n) - \phi(m)|$ définit une fonction de distance sur $\mathbb{N}$. La distance $d(n, m)$ est donnée par

$$d(n, m) = \sup\{|f(n) - f(m)| \mid \max |(f(j) - f(j+1))a_j| \leq 1\}$$

et ainsi (11) découle de (10). □

2.2. Matrice de Jacobi de l'opérateur prolate d'une paire cyclique. — Au niveau formel, *i.e.* en ignorant le problème de la nécessité pour D d'être auto-adjoint, une paire cyclique paire est déterminée par la séquence (a_n) qui donne la matrice de Jacobi de l'opérateur D dans la base (ξ_n) par (9) alors qu'on ne suppose rien de plus que le fait que les a_n soient réels.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \overline{a}_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \overline{a}_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \overline{a}_2 & 0 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a}_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On peut déterminer une représentation par matrice de Jacobi pour l'opérateur prolate formel de la définition 2.2. Cet opérateur commute avec le γ-classement et par conséquent il est la somme directe de sa restriction aux espaces propres $\mathcal{H}^\pm := \{\xi \in \mathcal{H} \mid \gamma\xi = \pm\xi\}$. Ces sous-espaces sont engendrés par les vecteurs ξ_n où la parité de n est fixée.

En effet, le carré de la matrice de D est de la forme (pour $n = 5$)

$$\begin{pmatrix} a_0\overline{a}_0 & 0 & a_0a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0\overline{a}_0 + a_1\overline{a}_1 & 0 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ \overline{a}_0\overline{a}_1 & 0 & a_1\overline{a}_1 + a_2\overline{a}_2 & 0 & a_2a_3 & 0 \\ 0 & \overline{a}_1\overline{a}_2 & 0 & a_2\overline{a}_2 + a_3\overline{a}_3 & 0 & a_3a_4 \\ 0 & 0 & \overline{a}_2\overline{a}_3 & 0 & a_3\overline{a}_3 + a_4\overline{a}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{a}_3\overline{a}_4 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

et ses restrictions à $\mathcal{H}^\pm$ sont les matrices de Jacobi de la forme générale

$$\begin{pmatrix} a_0\overline{a}_0 & a_0a_1 & 0 & 0 \\ \overline{a}_0\overline{a}_1 & a_1\overline{a}_1 + a_2\overline{a}_2 & a_2a_3 & 0 \\ 0 & \overline{a}_2\overline{a}_3 & a_3\overline{a}_3 + a_4\overline{a}_4 & \dots \\ 0 & 0 & \overline{a}_4\overline{a}_5 & \dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0\overline{a}_0 + a_1\overline{a}_1 & a_1a_2 & 0 & 0 \\ \overline{a}_1\overline{a}_2 & a_2\overline{a}_2 + a_3\overline{a}_3 & a_3a_4 & 0 \\ 0 & \overline{a}_3\overline{a}_4 & a_4\overline{a}_4 + a_5\overline{a}_5 & \dots \\ 0 & 0 & \overline{a}_5\overline{a}_6 & \dots \end{pmatrix}$$

On donne maintenant la forme matricielle de l'opérateur prolate de la définition 2.2.

Proposition 2.4. — *L'opérateur prolate formel de la définition 2.2 restreint à $\mathcal{H}^\pm$ est représenté par les matrices de Jacobi $J^\pm$ dont les coefficients matriciels sont nuls exceptés ceux donnés par*

$$J^+_{n,n+1} = \overline{J^+_{n+1,n}} = -a_{2n}a_{2n+1}, \quad J^+_{n,n} = -a_{2n}\overline{a}_{2n} - a_{2n-1}\overline{a}_{2n-1} + 2n\lambda^2 \tag{12}$$

$$J^-_{n,n+1} = \overline{J^-_{n+1,n}} = -a_{2n+1}a_{2n+2}, \quad J^-_{n,n} = -a_{2n}\overline{a}_{2n} - a_{2n+1}\overline{a}_{2n+1} + (2n+1)\lambda^2 \tag{13}$$

Preuve. Cela découle de la définition 2.2 et du calcul de la matrice pour la restriction de D^2 à $\mathcal{H}^\pm$. $\square$

3. Transformation de Hardy-Titchmarsh : la place archimédienne

Cette section contient une preuve détaillée du théorème suivant :

Théorème 3.1. Soit h_n les fonctions de Hermite normalisées.

(i) On a $\mathcal{U}(h_0) = 2^{-\frac{3}{4}}\pi^{-\frac{1}{2}}L_\infty(\frac{1}{2} - is)$ où $L_\infty(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)$ est le facteur d'Euler à la place archimédienne.

(ii) Les fonctions $\mathcal{U}(h_{2n})$ sont de la forme $\mathcal{U}(h_{2n})(s) = (-1)^n\mathcal{P}_n(s)\mathcal{U}(h_0)(s)$ où les $\mathcal{P}_n(s)$ sont des polynômes de même parité que n et qui sont orthogonaux (et normalisés) pour la mesure de probabilité $dm(s) := (2\pi)^{-\frac{3}{2}}|\Gamma(\frac{1}{4} + \frac{is}{2})|^2 ds$ sur $\mathbb{R}$.

(iii) L'application $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, dm)$, $\mathcal{M}(f)(s) := \mathcal{U}(h_0)^{-1}(s)f(s)$ est un isomorphisme unitaire.

(iv) L'isomorphisme unitaire $\mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R}, dm)$ transforme les fonctions de Hermite h_{2n} en les polynômes orthogonaux $(-1)^n\mathcal{P}_n$ et l'opérateur $\mathbb{S}$ en la multiplication par s.

(v) Soit N l'opérateur de calibrage $N(\mathcal{P}_n) := n\ \mathcal{P}_n$ dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$. On a

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{U}) \circ \mathbf{W}_\lambda \circ (\mathcal{M} \circ \mathcal{U})^* = -s^2 + 2\pi\lambda^2(4N + 1) - \frac{1}{4} \tag{14}$$

où s^2 est l'opérateur de multiplication par le carré de la variable dans $L^2(\mathbb{R}, dm)$.

Par construction, les fonctions de Hermite h_n sont elles-mêmes de la forme $h_n(x) = H_n(x)h_0(x)$ où les H_n sont des polynômes orthogonaux (et normalisés). Puisque la transformation de Fourier $\mathbb{F}_\mu$ ne préserve ni le produit des fonctions ni leur nature polynomiale, le théorème 3.1 n'est en aucun cas une conséquence de la construction des fonctions de Hermite. L'opérateur $\mathcal{U} \circ S \circ \mathcal{U}^*$ est la multiplication par s alors que l'opérateur de Hermite donne le calibrage. Le résultat principal est que, à cause de l'équation fonctionnelle $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ de la fonction Γ, on a des polynômes orthogonaux naturels dirigeant les fonctions $\mathcal{U}(h_{2n})$ où les h_n sont les fonctions de Hermite normalisées.

3.1. Notation. —

3.1.1. $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R})^{pair}$. — La transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}(f)(y) := \int f(x)\exp(-2\pi ixy)dx \tag{15}$$

se restreint au sous-espace $L^2(\mathbb{R})^{pair} \subset L^2(\mathbb{R})$ des fonctions paires.

3.1.2. $w_\infty : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u)$. — La mesure de Haar du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels positifs est $d^*u := du/u$. L'application w_∞ est définie par

$$w_\infty(f)(u) := u^{1/2}\, f(u)\,,\ \ \forall u \in \mathbb{R}_+^*. \tag{16}$$

3.1.3. $\mathbb{F}_\mu : L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*u) \to L^2(\mathbb{R})$. — La transformation de Fourier du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_0^\infty f(u)\, u^{-is} d^*u. \tag{17}$$

3.1.4. $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R})$. — La transformation unitaire $\mathcal{U} := \pi^{-\frac{1}{2}}\ \mathbb{F}_\mu \circ w_\infty$ est donnée par

$$\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{U}(f)(s) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v\,. \tag{18}$$

3.2. Forme canonique de l'opérateur de mise à l'échelle. — On note $H := x\partial_x$ et $\mathbb{S} := -i(H + \frac{1}{2})$ agissant sur l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{pair}$ comme des opérateurs non bornés. Par construction, $\mathbb{S}$ est l'opérateur auto-adjoint des transformations unitaires de mise à l'échelle

$$\left(\exp(it\mathbb{S})f\right)(x) = \lambda^{1/2}\, f(\lambda\, x), \quad \lambda = e^{t/2}\,, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On appelle $\xi_\infty = h_0 \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$ le vecteur de norme 1 donné par

$$h_0(x) := 2^{\frac{1}{4}}\ \exp(-\pi x^2)\,, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$2^{-\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}\,\mathcal{U}(h_0)(s) = \int_0^\infty v^{1/2-is} e^{-\pi v^2} d^*v = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}+i\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2}\right)$$

On définit la transformation unitaire

$$\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, dm), \quad \mathcal{M}(f)(s) := \mathcal{U}(h_0)^{-1}(s) f(s) \tag{19}$$

où la mesure dm est $|\mathcal{U}(h_0)|^2 ds$.

Proposition 3.1. — *(i) La transformation unitaire $\mathcal{V} := \mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R}, dm)$ donne la forme canonique de la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ où $\mathbb{S} := -i(H + \frac{1}{2})$ et $\xi_\infty = h_0$.*

(ii) La paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ est paire et le calibrage (unique) γ est égal à la transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R})^{pair}$.

Preuve. (i) Le conjugué de $\mathbb{S}$ par $\mathcal{U}$ est la multiplication par la variable s puisque

$$\int_0^\infty \left(\left(H + \frac{1}{2}\right) f\right)(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v = \int_0^\infty \partial_v(v^{\frac{1}{2}} f(v)) v^{-is} dv = is \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v$$

Cela reste vrai quand on conjugue par $\mathcal{V}$, alors que par construction $\mathcal{V}(\xi_\infty)$ est la fonction constante $\mathcal{V}(\xi_\infty)(s) = 1$.

(ii) Le vecteur $\xi_\infty = h_0$ est invariant selon $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}$ et cette transformation est unitaire de carré 1 et anti-commute avec $\mathbb{S}$, ainsi le résultat découle de la proposition 2.1. $\square$

3.3. L'opérateur nombre N**.** — On relie l'opérateur nombre N de la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ avec l'opérateur différentiel de Hermite $\mathbf{H} = -\partial^2 + (2\pi q)^2$.

Proposition 3.2. — *(i) L'opérateur nombre N de la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ est donné par*

$$N = \frac{\mathbf{H}}{8\pi} - \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{H} = -\partial^2 + (2\pi q)^2 \tag{20}$$

(ii) Les fonctions propres de N sont les fonctions de Hermite paires $h_{2n} \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$ où

$$h_{2n}(x) = \sum_0^n (-1)^{n-k} 2^{-n+3k+\frac{1}{4}} \frac{((2n)!)^{\frac{1}{2}}}{(2k)!(n-k)!} \pi^k x^{2k} e^{-\pi x^2} \tag{21}$$

Preuve. Les fonctions de Hermite (21) sont les fonctions propres pour l'opérateur $\mathbf{H}$ et donnent une base orthonormale de fonctions propres pour la restriction de $\mathbf{H}$ à $L^2(\mathbb{R})^{pair}$ et les valeurs propres sont $2\pi(4n+1)$. Le sous-espace $E_n \subset L^2(\mathbb{R})^{pair}$, sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbb{S}^j \xi_\infty$ pour $j \leq n$, est formé par les fonctions paires $e^{-\pi x^2} P(x)$ où $P(x)$ est un polynôme pair de degré $\leq 2n$. Il coïncide avec le sous-espace linéaire des fonctions h_{2j}, $0 \leq j \leq n$. Ainsi, on obtient (i) et (ii). $\square$

Comme corollaire, on obtient l'équation (14) du théorème 3.1. **Corollaire 3.2** :

$$(\mathcal{M} \circ \mathcal{U}) \circ \mathbf{W}_\lambda \circ (\mathcal{M} \circ \mathcal{U})^* = -s^2 + 2\pi\lambda^2(4N+1) - \frac{1}{4} \tag{22}$$

Preuve. On a par (4)

$$(\mathbf{W}_\lambda \psi)(q) = \partial(q^2 \partial \, \psi(q)) + \lambda^2 \, \mathbf{H} \, \psi(q) = \left(-\mathbb{S}^2 + \lambda^2 \, \mathbf{H} - \frac{1}{4} \right) \psi(q)$$

qui donne (22) en utilisant (20) puisque $\mathcal{V} \circ \mathbb{S} \circ \mathcal{V}^*$ est donné par la multiplication par s par la proposition 3.1. $\square$

3.4. Matrice de Jacobi pour $\mathbb{S}$**.** — Cette section devrait être comparée, pour les formulations de la matrice tridiagonale, avec [16], Section 8 (formules basées sur les séries de Hermite).

On pose

$$\mathcal{P}_m(x) := \sqrt{(2m)!} \sum_0^m (-1)^k 2^{3k-m} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \left(j - \frac{ix}{2} + \frac{1}{4} \right)}{(2k)!(m-k)!} \tag{23}$$

Proposition 3.3. — *(i) Les polynômes $\mathcal{P}_m$ sont des polynômes orthonormés par rapport à la mesure de probabilité $(2\pi)^{-3/2} |\Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{x}{2}\right)|^2 dx$ sur la droite.*

(ii) La matrice agissant sur les vecteurs colonnes [2] *de l'opérateur de multiplication par x dans la base des $\mathcal{P}_m$ est la matrice de Jacobi hermitienne avec des 0 sur la diagonale et $\alpha_n = \frac{i}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}$ dans la diagonale supérieure.*

Preuve. (i) La transformation $\mathcal{V}(h_{2m})$ par l'unitaire $\mathcal{V} := \mathcal{M} \circ \mathcal{U} : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(\mathbb{R}, dm)$ est donnée par le polynôme $(-1)^m \mathcal{P}_m$ comme on l'obtient en utilisant l'égalité

$$\int_0^\infty x^{1/2-is} \pi^k x^{2k} e^{-\pi x^2} d^*x = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}+i\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2} + k\right) \tag{24}$$

et l'équation fonctionnelle pour $\Gamma(z)$. Le polynôme $\mathcal{P}_0 = 1$ donne la normalisation. L'orthonormalité découle alors du caractère unitaire de $\mathcal{V}$.

(ii) En utilisant $\mathbb{F}_\mu \circ w$, l'opérateur $H + \frac{1}{2}$ correspond à la multiplication par ix, par conséquent, il suffit de déterminer le coefficient de $x^{2n+2}e^{-\pi x^2}$ dans $(H+\frac{1}{2})h_{2n}$. Le terme de plus haut degré dans h_{2n} est

$$2^{2n+\frac{1}{4}}(2n)!^{-\frac{1}{2}}\pi^n x^{2n} e^{-\pi x^2}$$

Quand on applique l'opérateur $H = x\partial_x$ à $e^{-\pi x^2}x^k$, on obtient

$$H(e^{-\pi x^2}x^k) = e^{-\pi x^2}x^k\left(-2\pi x^2 + k\right)$$

Ainsi le coefficient de $x^{2n+2}e^{-\pi x^2}$ dans $(H+\frac{1}{2})h_{2n}$ est égal à $(-2\pi)\,2^{2n+\frac{1}{4}}(2n)!^{-\frac{1}{2}}\pi^n$ alors que dans h_{2n+2}, il est égal à $2^{2n+2+\frac{1}{4}}(2n+2)!^{-\frac{1}{2}}\pi^{n+1}$. Ainsi, pour le plus grand terme, on a $(H+\frac{1}{2})h_{2n} \sim c_n h_{2n+2}$ pour

$$c_n = (-2\pi)\,2^{2n+\frac{1}{4}}(2n)!^{-\frac{1}{2}}\pi^n / \left(2^{2n+2+\frac{1}{4}}(2n+2)!^{-\frac{1}{2}}\pi^{n+1}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}$$

ce qui donne, en utilisant la propriété d'orthonormalité des h_n, l'égalité

$$\left\langle \left(H + \frac{1}{2}\right) h_{2n}, h_{2n+2} \right\rangle = -\frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)} \tag{25}$$

Pour vérifier les signes, on prend le cas le plus simple, on a

$$\left(\left(H+\frac{1}{2}\right)h_0\right)(x) = (2^{\frac{1}{4}-1} - 2^{\frac{1}{4}+1}\pi x^2)e^{-\pi x^2}, \quad h_2(x) = \frac{4\pi x^2 - 1}{\sqrt[4]{2}}$$

de telle façon que $(H+\frac{1}{2})h_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}h_2$. Pour $m = 1$, on a $\mathcal{P}_1(x) = i\sqrt{2}\,x$.

2. La matrice d'éléments $\langle x\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_m\rangle$ est la matrice transposée.

Ainsi $x\mathcal{P}_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{P}_1$. De (25), on obtient ainsi que la matrice de multiplication par x, agissant sur les vecteurs colonnes est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3} & 0 & i\sqrt{\frac{15}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{15}{2}} & 0 & i\sqrt{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{14} & 0 & 3i\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3i\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

i.e. on a pour tout n

$$x\mathcal{P}_n = \overline{\alpha_n}\,\mathcal{P}_{n+1} + \alpha_{n-1}\mathcal{P}_{n-1}, \quad \alpha_n = \frac{i}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)} \tag{26}$$

de telle façon que la composante de $x\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{P}_{n+1}$ est $-\frac{i}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}$. $\square$

On montre dans la proposition 3.4 ci-dessous que pour la paire cyclique correspondant à la place archimédienne, la distance spectrale est équivalente à la métrique induite sur $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$ par la métrique invariante du groupe de Lie $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 3.4. — *La métrique spectrale pour la paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_\infty)$ de la proposition 3.1 est équivalente à la métrique induite sur $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$ par la métrique invariante du groupe de Lie $\mathbb{R}_+^*$.*

Preuve. La séquence (a_n) de (9), obtenue après un changement de phase dans la base orthonormale est donnée par $a_n = \sqrt{(n+\frac{1}{2})(n+1)}$. Pour $n > 0$, on a

$$1 \le a_n \log(1 + \frac{1}{n}) \le \sqrt{3}\log 2$$

qui montre que la métrique induite sur $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{R}_+^*$ par la métrique invariante du groupe de Lie $\mathbb{R}_+^*$ est équivalente à la métrique $d(n,m) := |\phi(n) - \phi(m)|$ de la proposition 2.3. En retour, cette dernière métrique est équivalente à la métrique spectrale par la proposition 2.3. $\square$

3.5. Matrice de Jacobi de l'opérateur prolate. — On détermine maintenant les deux matrices de Jacobi données par les restrictions $\mathbf{W}_\lambda^\pm$ de l'opérateur prolate (2) pour les sous-espaces pair et impair $\mathcal{H}^\pm$ comme dans la proposition 2.4.

En fait, on pourrait calculer directement ces matrices de Jacobi dans la base des fonctions de Hermite et comparer avec [16], Section 8 (formules basées sur les séries de Hermite).

La matrice de Jacobi $\mathbf{W}_\lambda^+$ est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 2\pi\lambda^2 - \frac{3}{4} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & 18\pi\lambda^2 - \frac{43}{4} & \sqrt{105} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{105} & 34\pi\lambda^2 - \frac{147}{4} & 3\sqrt{\frac{165}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{\frac{165}{2}} & 50\pi\lambda^2 - \frac{315}{4} & \sqrt{2730} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2730} & 66\pi\lambda^2 - \frac{547}{4} \end{pmatrix}$$

Pour une matrice de Jacobi J, on utilise la notation a_n, $n \geq 0$ pour les coefficients $J_{n,n+1} = \overline{J_{n+1,n}}$, et b_n, $n \geq 0$ pour la diagonale, *i.e.* $b_n = J_{n,n}$.

Proposition 3.5. — *Les coefficients de la matrice de Jacobi de l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda^+$ sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{4}\left((4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)\right)^{1/2}, \quad b_n = -8n^2 - 2n - \frac{3}{4} + 2\pi\lambda^2(8n+1) \quad (27)$$

Dans le cas impair, i.e. pour $\mathbf{W}_\lambda^-$, ce sont

$$a_n = \frac{1}{4}\left((4n+3)(4n+4)(4n+5)(4n+6)\right)^{1/2}, \quad b_n = -8n^2 - 10n - \frac{15}{4} + 2\pi\lambda^2(8n+5) \quad (28)$$

Preuve. Cela découle de (22) combiné avec la proposition 2.4 appliquée aux coefficients $\alpha_n = \frac{i}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}$ déterminés dans la section 3.3. □

3.6. Lien avec l'application $\mathcal{E}$ et zêta. — Dans [11], on a exhibé de minuscules valeurs propres de la forme quadratique associée aux formules explicites de Weil restreintes à des fonctions de test à domaine dans un intervalle compact fixé. Les fonctions propres correspondantes ont été construites en utilisant l'image par l'application $\mathcal{E}$ du spectre positif de l'opérateur prolate $\mathbf{W}_\lambda$. On a utilisé ces fonctions pour conditionner le triplet spectral du cercle de telle façon qu'elles appartiennent au noyau de l'opérateur de Dirac perturbé et on a obtenu les zéros de petites parties imaginaires de la fonction zêta de Riemann.

Lorsque $\lambda \to \infty$, les fonctions propres pour les valeurs propres positives de $\mathbf{W}_\lambda$ sont approximées par les fonctions propres de l'opérateur $\mathbf{H} = -\partial^2 + (2\pi q)^2$. Ces dernières fonctions propres sont des fonctions de Hermite $\{h_{2n}\}$.

En suivant [8] Proposition 2.24, on explique maintenant dans quel sens le conditionnement de l'opérateur de mise à l'échelle par $\mathcal{E}(\{h_{2n}\})$, réalisé en prenant un quotient (à la place d'un complément orthogonal comme ci-dessus) est relié aux zéros de zêta.

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\mathrm{pair}}$ le sous-espace de la partie paire de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ obtenu en imposant les deux conditions $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$. On décrit simplement les combinaisons linéaires des fonctions h_{2m} qui appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\mathrm{pair}}$ et on calcule alors leur image selon l'application $\mathbb{F}_\mu \circ \mathcal{E}$, où

$$\mathcal{E} := w_\infty \circ \Sigma, \quad \Sigma(f)(x) := \sum_{\mathbb{N}} f(nx).$$

La transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}(h_{2m})$ est $(-1)^m h_{2m}$ et ainsi les deux conditions $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ sont remplies par les deux familles de fonctions

$$\psi_\ell^+ := h_{4\ell} - \frac{h_{4\ell}(0)}{h_0(0)} h_0, \quad \psi_\ell^- := -h_{4\ell+2} + \frac{h_{4\ell+2}(0)}{h_2(0)} h_2 \tag{29}$$

On a $h_{2n}(0) = (-1)^n \frac{2^{\frac{1}{4}-n}\sqrt{(2n)!}}{n!}$. Ainsi, on obtient

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_1^{2\ell} (-1)^k 2^{-2\ell+3k+\frac{1}{4}} \frac{((4\ell)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell-k)!(2k)!} \pi^k x^{2k} e^{-\pi x^2} \tag{30}$$

Dans le cas impair, on a $h_2(x)/h_2(0) = e^{-\pi x^2}(4\pi x^2 - 1)$. Le coefficient de $\pi x^2 e^{-\pi x^2}((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}$ dans $h_{4\ell+2} - \frac{h_{4\ell+2}(0)}{h_2(0)} h_2$ est

$$2^{3-2\ell-1+\frac{1}{4}} \frac{1}{(2\ell)!2!} - 4 \times 2^{-2\ell-1+\frac{1}{4}} \frac{1}{(2\ell+1)!} = 2^{-2\ell+\frac{1}{4}} \frac{4\ell}{(2\ell+1)!}$$

de telle façon qu'on a

$$\psi_\ell^-(x) = \left(-\frac{\ell\, 2^{-2\ell+\frac{9}{4}}((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1)!} \pi x^2 + \sum_2^{2\ell+1} (-1)^k 2^{3k-2\ell-1+\frac{1}{4}} \frac{((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1-k)!(2k)!} \pi^k x^{2k} \right) e^{-\pi x^2} \tag{31}$$

On relie maintenant la transformation de Fourier $\mathbb{F}_\mu(w_\infty(\psi_\ell^\pm))$ aux polynômes (23).

Lemme 3.3

(i) La transformation de Fourier $\mathbb{F}_\mu(w_\infty(\psi_\ell^\pm))$ est égale au produit du facteur local archimédien $\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)$ en $z = \frac{1}{2} - is$, par le polynôme suivant

$$P_\ell^+(s) := \sum_1^{2\ell} (-1)^k 2^{-2\ell+3k-\frac{3}{4}} \frac{((4\ell)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell-k)!(2k)!} \prod_0^{k-1} \left(j - \frac{i\,s}{2} + \frac{1}{4} \right) \tag{32}$$

qui est pair, divisible par $\frac{1}{4} + s^2$, et avec des coefficients réels et

$$P_\ell^-(s) := -\frac{\ell\, 2^{-2\ell+\frac{5}{4}}((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1)!} \left(-\frac{is}{2} + \frac{1}{4} \right) +$$

$$+ \sum_2^{2\ell+1} (-1)^k 2^{3k-2\ell-\frac{7}{4}} \frac{((4\ell+2)!)^{\frac{1}{2}}}{(2\ell+1-k)!(2k)!} \prod_0^{k-1} \left(j - \frac{is}{2} + \frac{1}{4} \right) \tag{33}$$

qui est impair, divisible par $\frac{1}{4}+s^2$, et avec des coefficients purement imaginaires.

(ii) On a

$$P_\ell^+(s)=2^{-\frac{3}{4}}\left(\mathcal{P}_{2\ell}(s)-\mathcal{P}_{2\ell}(\frac{i}{2})\right),\quad P_\ell^-(s)=2^{-\frac{3}{4}}\left(\mathcal{P}_{2\ell+1}(s)+2i\,s\,\mathcal{P}_{2\ell+1}(\frac{i}{2})\right) \tag{34}$$

Preuve. (*i*) Les formules (32) and (33) découlent directement de (30) et (31) ainsi que de (24). La divisibilité par $\frac{1}{4}+s^2$ découle de l'égalité

$$\mathbb{F}_\mu(w(\psi_\ell^\pm))(\frac{i}{2})=\int_0^\infty x\,\psi_\ell^\pm(x)d^*x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \psi_\ell^\pm(x)dx=0$$

Il découle de (30) et (31) que $P_\ell^\pm(i/2)=0$ et la parité du polynôme $P_\ell^\pm$ montre alors qu'il est divisible par $\frac{1}{4}+s^2$.

(*ii*) Ceci en découle parce que (34) spécifie uniquement la correction requise des polynômes remis à l'échelle $\mathcal{P}_m$ pour les rendre divisibles par $\frac{1}{4}+s^2$ sans altérer leur parité. ☐

La fonction de Riemann-Landau Ξ

$$\Xi(s)=\frac{z(z-1)}{2}\Gamma(z/2)\pi^{-z/2}ta(z)\,,\quad z=\frac{1}{2}+is \tag{35}$$

est entière, d'ordre de Hadamard 1, paire et de valeur réelle pour s réel, et on a

$$\Xi(s)=\Xi(0)\prod\left(1-\frac{s^2}{\alpha^2}\right),\quad \Xi(0)=-\frac{ta\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt[4]{\pi}}\sim 0.497121$$

où $\frac{1}{2}+i\alpha$ couvre les zéros de zêta avec partie imaginaire positive.

Soit alors $P_\ell^\pm(s)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}+s^2)R_\ell^\pm(s)$ définissant les polynômes $R_\ell^\pm(s)$.
La prochaine proposition montre que ces polynômes donnent la factorisation de $\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}(\psi_\ell^\pm))$ comme un multiple de la fonction Ξ, et que tous les polynômes multiples de Ξ sont obtenus de cette manière.
Appelons $\mathcal{H}_{\leq 1}$ l'anneau topologique de Hadamard des fonctions entières d'ordre ≤ 1.

Proposition 3.6. — *(i) On a l'égalité*

$$\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}(\psi_\ell^\pm))(s)=R_\ell^\pm(s)\,\Xi(s)$$

(ii) Le spectre de l'opérateur de multiplication par s dans le quotient de $\mathcal{H}_{\leq 1}$ par la fermeture du sous-espace engendré par les $\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}(\psi_\ell^\pm))$ est l'ensemble des $s\in\mathbb{C}$ tels que $\frac{1}{2}+is$ est un zéro non trivial de zêta.

Preuve. Ceci découle du lemme 3.6, comme dans [8], Proposition 2.24. ☐

4. Le cas semi-local

4.1. Notations. — Soit S un ensemble fini de places, $\infty \in S$, et $\mathbb{A}_S$ l'anneau compact local

$$\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v. \tag{36}$$

Cet anneau contient $\mathbb{Q}$ comme sous-anneau en utilisant le plongement diagonal. Soit $\mathbb{Q}_S$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ donné par les nombres rationnels dans le dénominateur duquel n'interviennent que des nombres premiers $p \in S$. En d'autres termes,

$$\mathbb{Q}_S = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, |q|_v \le 1\,,\ \forall v \notin S\}\,. \tag{37}$$

Le groupe $\Gamma := \mathbb{Q}_S^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Q}_S$ est de la forme

$$\Gamma = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_S) = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} \ :\ p_j \in S \setminus \{\infty\}\,,\, n_j \in \mathbb{Z}\}. \tag{38}$$

L'espace des classes d'adèles semi-local X_S est par définition le quotient

$$X_S := \mathbb{A}_S/\Gamma, \tag{39}$$

et on appelle $\pi_S : \mathbb{A}_S \to X_S$ la projection canonique.

Le module s'étend à une application multiplicative $|\bullet|_S$ de l'anneau $\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v$ à $\mathbb{R}_+$

$$|(u_v)_{v \in S}|_S = \prod |u|_v \in \mathbb{R}_+ \tag{40}$$

et par construction cette application passe au quotient $X_S = \mathbb{A}_S/\Gamma$. Les groupes

$$\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p), \quad C_S = \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)/\Gamma \tag{41}$$

agissent naturellement par multiplication sur le quotient X_S et l'orbite de $1 \in \mathbb{A}_S$ donne un recouvrement $C_S \to X_S$.

Le complément de C_S dans X_S est de mesure nulle pour le produit des mesures de Haar des groupes additifs des corps locaux (qui est préservée par l'action du groupe dénombrable Γ). En utilisant la dérivée de Radon-Nikodym des mesures de Haar des groupes multiplicatifs par rapport à la mesure des groupes additifs, on obtient l'identification unitaire

$$w_S : L^2(X_S) \to L^2(C_S) \tag{42}$$

(voir [8], Proposition 2.30).

On rappelle aussi (voir [8], éqs. (2.223) et (2.239)) que C_S est un groupe compact localement modulé par le module

$$\mathrm{Mod}_S(\lambda) = |\lambda|_S := \prod_{p \in S} |\lambda_p|, \quad \forall \lambda = (\lambda_p) \in C_S \tag{43}$$

qui est isomorphe (non canoniquement) à $\mathbb{R}_+^* \times K_S$, où K_S est le noyau de Mod_S.

4.2. Transformation de Hardy-Titchmarsh semi-locale. — On étend les formules (18) et (19) au cas semi-local. On utilise la notation de la section 4.1.

Soit S un ensemble fini de places, $\infty \in S$, soit R_S le sous-anneau compact maximal de $\prod_{p\neq\infty} \mathbb{Q}_p$. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$ soit $\eta_S(f)$ la classe de la fonction $1_{R_S} \otimes f$ dans $L^2(X_S)$. Plus précisément, on a, en ignorant la somme sur ± 1 puisque f est paire, et en posant $\Gamma_+ := \Gamma \cap \mathbb{Q}_+$,

$$\eta_S(f)(x) := \sum_{\Gamma_+} f(\gamma\, \tilde{x})\,, \;\; \forall \tilde{x} \mid \pi_S(\tilde{x}) = x. \tag{44}$$

La restriction de $\eta_S(f)$ au domaine fondamental $F = R_S^* \times \mathbb{R}_+^*$ de l'action de Γ sur $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p\in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ est R_S^*-invariante et, puisque $1_{R_S} \otimes f$ s'évanouit sur $\gamma(1 \times u)$ à moins que $\gamma \in \mathbb{Z}$. On a

$$\eta_S(f)(1 \times u) = \sum_{\Gamma_+ \cap \mathbb{Z}} f(\gamma\, u).$$

Il en découle que

$$w_S(\eta_S(f))(u) = \mathcal{E}_S(f)(u) \tag{45}$$

où

$$\mathcal{E}_S(f)(u) := u^{1/2} \sum_{\Gamma_+ \cap \mathbb{Z}} f(\gamma\, u) \tag{46}$$

Proposition 4.1. — *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. Alors avec $L_p(z) = (1 - p^{-z})^{-1}$ pour $z \in \mathbb{C}$,*

(i) On a

$$\mathbb{F}_\mu(\mathcal{E}_S(f))(s) = \Big(\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}} L_p(\frac{1}{2} - is)\Big)(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s). \tag{47}$$

(ii) Soit $\lambda > 0$. On a $\eta_S(P_\lambda) \subset P_\lambda^S$ où P_λ^S est le sous-espace de $L^2(X_S)^{K_S}$ des fonctions à support dans $\{x \mid |x| \leq \lambda\}$.

(iii) Soit la transformée de Fourier pour $\mathbb{Q}_p$ normalisée de telle façon que la fonction $1_{\mathbb{Z}_p}$ soit sa propre transformée de Fourier et soit $\mathbb{F}_S$, agissant sur $L^2(X_S)$, induite par le produit tensoriel des transformations de Fourier locales. On a

$$\mathbb{F}_S \circ \eta_S = \eta_S \circ \mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}.$$

(iv) On a $\eta_S(\widehat{P_\lambda}) \subset \widehat{P_\lambda^S}$ où $\widehat{P_\lambda}$ et $\widehat{P_\lambda^S}$ sont les images de P_λ, P_λ^S par la transformation de Fourier.

Preuve. (i) À des fins de simplification, on considère le cas $S = \{p, \infty\}$. Alors on a

$$\mathbb{F}_\mu \mathcal{E}_p(f)(s) = L_p(\frac{1}{2} - is)(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s).$$

En effet, on a

$$\mathbb{F}_\mu \mathcal{E}_p(f)(s) = \int_0^\infty u^{1/2} \sum f(p^k u) u^{-is} d^*u = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\infty f(p^k u) u^{\frac{1}{2}-is} d^*u = \sum_k \int_0^\infty f(v) p^{-\frac{k}{2}} p^{iks} v^{\frac{1}{2}-is} d^*v$$
$$= \sum_k p^{-\frac{k}{2}} p^{iks} \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v = \int_0^\infty f(v) v^{\frac{1}{2}-is} d^*v \, (1-p^{-\frac{1}{2}-is})^{-1} = L_p(\frac{1}{2}-is)(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s).$$

(ii) Le module $|x|$ est égal à 1 sur les idèles principales et par conséquent, sur les éléments $\gamma \in \Gamma = \{\pm \prod p_v^{n_v} \mid n_v \in \mathbb{Z}\}$. Ainsi $|x|$ a du sens sur $X_S = (\prod \mathbb{Q}_v)/\Gamma$ et P_λ^S a également du sens. Soit $f \in P_\lambda$ et $\eta_S(f)$ la classe de la fonction $1_{R_S} \otimes f$ dans $L^2(X_S)$. Soit $x = (y,u) \in R_S \times \mathbb{R}$ avec $|x| > \lambda$. On a

$$\lambda < |x| = |y||u| \leq |u| \Rightarrow |u| > \lambda \Rightarrow f(u) = 0.$$

(iii) Cela en découle puisque 1_{R_S} est sa propre transformée de Fourier.

(iv) découle de (ii) et (iii). $\square$

On pose $\mathcal{U}_S := \mathbb{F}_\mu \circ w_S$ et $\mathcal{M}_S : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ l'unitaire donné par

$$\mathcal{M}_S(f)(s) := \left(\prod_{v\in S} L_v(\frac{1}{2}-is)\right)^{-1} f(s), \quad dm_S(s) := |\prod_{v\in S} L_v(\frac{1}{2}-is)|^2 \, ds \tag{48}$$

On appelle K_S le noyau du module $C_S \to \mathbb{R}_+^*$ et on dénote par $\mathbb{S}$ le générateur de l'action de mise à l'échelle de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})_+ \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p\in S} \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ on $L^2(X_S)^{K_S}$.

Proposition 4.2. — *(i) La transformation unitaire $\mathcal{V}_S := \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \to L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ donne la forme canonique de la paire cyclique (D, ξ) où $D := \mathbb{S}$ et $\xi = \xi_S := \eta_S(\xi_\infty)$.*

(ii) La paire cyclique $(\mathbb{S}, \xi_S)$ est paire et le calibrage est donné par la transformation de Fourier $\mathbb{F}_S$ qui devient la symétrie $s \mapsto -s$ selon la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$.

Preuve. (i) L'unitaire $\mathcal{U}_S : L^2(X_S)^{K_S} \to L^2(\mathbb{R})$ est un isomorphisme et il transforme l'opérateur $\mathbb{S}$ en une multiplication par la variable s comme dans la preuve de la proposition 3.1. Par (47) appliquée à ξ_∞, on a

$$\mathcal{U}_S(\xi_S)(s) = \mathcal{U}_S(\eta_S(\xi_\infty))(s) = \Big(\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}} L_p(\frac{1}{2}-is)\Big)(\mathbb{F}_\mu w_\infty(\xi_\infty))(s) = \prod_{v\in S} L_v(\frac{1}{2}-is)$$

$$\mathcal{V}_S(\xi_S)(s) = \mathcal{M}_S \circ \mathcal{U}_S(h_S)(s) = 1.$$

Ainsi $\mathcal{V}_S : L^2(X_S)^{K_S} \to L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ est un isomorphisme qui transforme l'opérateur $\mathbb{S}$ en la multiplication par la variable s et le vecteur ξ_S en la fonction constante 1.

(ii) On vérifie directement que la transformation de Fourier $\mathbb{F}_S$ anti-commute avec $\mathbb{S}$. Elle fixe le vecteur ξ par la proposition 4.1. L'unicité du calibrage montre que la transformation de Fourier $\mathbb{F}_S$ devient la symétrie $s \mapsto -s$ sous la transformation unitaire $\mathcal{V}_S$. $\square$

On appelle $\iota_S : L^2(\mathbb{R}, dm) \to L^2(\mathbb{R}, dm_S)$ l'application identité $\iota_S(f)(s) := f(s)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.3. — *(i) L'application ι_S est bornée et a une application inverse bornée.*

(ii) On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R})^{pair} & \xrightarrow{\eta_S} & L^2(X_S)^{K_S} \\ \Big\downarrow \mathcal{V} & & \Big\downarrow \mathcal{V}_S \\ L^2(\mathbb{R}, dm) & \xrightarrow{\iota_S} & L^2(\mathbb{R}, dm_S) \end{array} \tag{49}$$

Preuve. (i) Cela découle du fait que la fonction $\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}} L_p(\frac{1}{2} - is)$ est bornée avec inverse bornée, de telle façon que les dérivées de Radon-Nikodym dm/dm_S and dm_S/dm sont bornées toutes les deux.

(ii) Cela découle de (47). $\square$

4.3. Opérateur de Hermite semi-local. — Soit S une collection finie de places (incluant la place archimédienne) et $(\mathbb{S}, \xi_S)$ la paire cyclique de la proposition 4.2. Comme dans la section 2, l'opérateur de Hermite associé N_S est défini, comme l'opérateur de calibrage associé à la filtration (E_n) de l'espace de Hilbert $L^2(X_S)^{K_S}$, par les sous-espaces engendrés par les itérées $\mathbb{S}^j\xi$, $0 \leq j \leq n$.

Théorème 4.1 :

1. Pour $S = \{\infty\}$, l'opérateur de Hermite semi-local N_S est la restriction de l'oscillateur harmonique à $L^2(\mathbb{R})^{pair}$.
2. Les fonctions propres de l'opérateur de Hermite semi-local N_S sont les éléments de $L^2(X_S)^{K_S}$ de la forme $\eta_S(P_n^S(x)e^{-\pi x^2})$, où les P_n^S sont les polynômes obtenus par orthonormalisation et induction.
3. La matrice de $\mathbb{S}$ dans la base orthonormale ci-dessus de $L^2(X_S)^{K_S}$, est une matrice de Jacobi hermitienne.

Preuve. 1. Voir la proposition 3.2.

2. On a $\xi_S = 2^{1/4}\,\eta_S(e^{-\pi x^2})$ et l'opérateur $\mathbb{S} = -i(H + \frac{1}{2})$ agit comme une mise à l'échelle de la variable archimédienne. Les sous-espaces $E_n^S \subset L^2(X_S)^{K_S}$ sont obtenus par itération de l'opérateur $\mathbb{S}$ appliqué à la fonction $\eta_S(e^{-\pi x^2})$ et l'opérateur de mise à l'échelle commute avec η_S. Ainsi E_n^S est l'image par η_S de l'espace des produits $P(x)e^{-\pi x^2}$ où P est un polynôme

pair de degré $\leq 2n$. Puisque η_S n'est pas unitaire, le processus d'orthogonalisation fournit des polynômes P_n^S qui dépendent de S.

3. Découle de (9), *i.e.* la théorie générale des polynômes orthogonaux. $\square$

Ainsi on a trouvé un candidat pour l'analogue de l'opérateur de Hermite dans le cas semi-local et également pour l'opérateur prolate comme dans la définition 2.2 :

$$\mathbf{W}_{\lambda,S} = (H + \frac{1}{2})^2 + \lambda^2 N_S.$$

Remarque 4.2 :

(i) Du fait de la nature non unitaire de η_S, on a $N_S \circ \eta_S \neq \eta_S \circ N_\infty$ à moins que $S = \{\infty\}$ mais les filtrations associées aux sous-espaces $N \leq n$ se correspondent l'une à l'autre par l'application η_S comme cela est montré dans le théorème 4.1 (*ii*).

(ii) Soit $|\bullet|_S : X_S = \mathbb{A}_S/\Gamma \to \mathbb{R}_+$ le module comme dans (40). Une autre possibilité pour l'analogue semi-local de l'opérateur de Hermite est d'exprimer ce dernier lorsque $S = \{\infty\}$ en fonction de la somme de la multiplication par $|x|_S^2$ et de sa conjuguée par la transformée de Fourier.

(iii) Notons qu'à moins que $S = \{\infty\}$, on a

$$|\bullet|_S^2\, \eta_S(f) \neq \eta_S(|\bullet|^2 f). \tag{50}$$

En effet, en prenant $S = \{p, \infty\}$ pour simplifier, on a pour f une fonction paire

$$w_S \eta_S(f) = \mathcal{E}_p(f), \quad \mathcal{E}_p(f)(u) = u^{1/2} \sum_{\mathbb{N}} f(p^n u)$$

l'image du côté gauche de (50) selon l'application w_S est la fonction $u^2 \mathcal{E}_p(f)(u)$, alors que l'image du côté droit de (50) selon l'application w_S est $\mathcal{E}_p(|\bullet|^2 f)$ qui, évalué en u, donne l'expression différente

$$u^{1/2} \sum_{\mathbb{N}} u^2 p^{2n} f(p^n u).$$

4.4. La transformation de Hardy-Titchmarsh duale. — On dénote comme ci-dessus par S un ensemble fini de places contenant ∞, et $\mathcal{U}_S := \mathbb{F}_\mu \circ w_S$. On définit

$$E_S(s) := \prod_{p \in S} L_p(\frac{1}{2} + is) \tag{51}$$

et on considère l'espace de Hilbert $L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big)$. On pose $\beta_S : L^2(\mathbb{R}) \to L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S((s)|^2}\Big)$ l'unitaire donné par

$$\beta_S(f)(s) := \left(\prod_{v \in S} L_v(\frac{1}{2} + is) \right) f(s) \tag{52}$$

Définition 4.3 : La transformation de Hardy-Titchmarsh duale est l'unitaire

$$\upsilon_S : L^2(X_S)^{K_S} \to L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big), \quad \upsilon_S = \beta_S \circ \mathfrak{U}_S \tag{53}$$

Proposition 4.4. — *(i) L'égalité suivante définit un appariement sesquilinéaire* $\langle L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big) | L^2(\mathbb{R}, dm_S)\rangle$

$$\langle \xi | \eta \rangle_{\mathbb{R}} := \int \xi(x)\overline{\eta(x)}dx\,, \quad \forall \xi \in L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big),\ \eta \in L^2(\mathbb{R}, dm_S) \tag{54}$$

(ii) Pour tout $\xi, \eta \in L^2(X_S)^{K_S}$, *on a* $\langle \upsilon_S \xi | \mathcal{V}_S \eta \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \xi | \eta \rangle$.

Preuve. La preuve de (i) et (ii) découle de l'égalité valide pour toute place v et $s \in \mathbb{R}$,

$$\overline{L_v\left(\frac{1}{2} + is\right)} = L_v\left(\frac{1}{2} - is\right).$$

et en combinant (48) avec (52). $\square$

4.5. L'espace de Sonin dans le cas local. — La définition locale de l'espace de Sonin est :

Définition 4.4 : Soit $\mathbb{K}$ un corps local et α un caractère additif de $\mathbb{K}$. Soit $\lambda > 0$. L'espace de Sonin $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{K}, \alpha)$ est le sous-espace de l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{K}$ défini comme suit

$$\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{K}, \alpha) := \{f \in L^2(\mathbb{K}) \mid f(x) = 0 \ \& \ \mathbb{F}_\alpha f(x) = 0 \quad \forall x, |x| < \lambda\}$$

où $\mathbb{F}_\alpha$ dénote la transformée de Fourier par rapport à α.

On utilise l'exponentielle imaginaire $e : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $e(x) := \exp(2\pi i x)$. On munit $\mathbb{Q}_p$ du caractère additif (obtenu en utilisant le plongement $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$)

$$e_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{e} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C} \tag{55}$$

qui est égal à 1 sur le sous-anneau compact maximal $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$.

Étant donnée une fonction $f \in L^2(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}^*$, on appelle f_a la fonction $f_a(x) := f(ax)$. La transformée de Fourier respecte l'égalité

$$\mathbb{F}(f_a) = \frac{1}{|a|}\, \mathbb{F}(f)_{a^{-1}}$$

Proposition 4.5. — *Soit p un nombre premier fini et $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p$, $\alpha = e_p$. La partie $\mathbb{Z}_p^*$-invariante de $\mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$ est de dimension 1, de générateur $\sigma_p := \epsilon_0 - \frac{1}{p}\epsilon_1$ où ϵ_n est la fonction caractéristique de $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| = p^n\}$. De plus, on a $\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p = \sigma_p$.*

Preuve. La fonction ϵ_n est égale à $(1_{\mathbb{Z}_p})_{p^n} - (1_{\mathbb{Z}_p})_{p^{n-1}}$ puisqu'on a

$$\epsilon_n(x) = 1_{\mathbb{Z}_p}(p^n x) - 1_{\mathbb{Z}_p}(p^{n-1}x).$$

De plus, on a $1_{\mathbb{Z}_p} = \sum_0^\infty \epsilon_{-\ell}$ et $(\epsilon_\ell)_{p^k} = \epsilon_{\ell+k}$.

La transformée de Fourier de la fonction ϵ_n est alors donnée par

$$\mathbb{F}_{e_p}(\epsilon_n) = p^n(1_{\mathbb{Z}_p})_{p^{-n}} - p^{n-1}(1_{\mathbb{Z}_p})_{p^{-n+1}} = p^n(1-\frac{1}{p})\sum_0^\infty \epsilon_{-n-k} - p^n\frac{1}{p}\epsilon_{-n+1}. \tag{56}$$

Par (56), on a

$$\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p = \mathbb{F}_{e_p}\epsilon_0 - \frac{1}{p}\mathbb{F}_{e_p}\epsilon_1 = \left((1-\frac{1}{p})\sum_0^\infty \epsilon_{-k} - \frac{1}{p}\epsilon_1\right) - \left((1-\frac{1}{p})\sum_0^\infty \epsilon_{-1-k} - \frac{1}{p}\epsilon_0\right) = \epsilon_0 - \frac{1}{p}\epsilon_1$$

par conséquent $\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p = \sigma_p$. Par construction, on a $\sigma_p(x) = 0\ \forall x, |x| < 1$ et ainsi, $\sigma_p \in \mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$.

Montrons maintenant que tout $\psi \in \mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$, qui est $\mathbb{Z}_p^*$-invariant, est proportionnel à σ_p. Puisque ψ est $\mathbb{Z}_p^*$-invariant, il existe des coefficients $a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\epsilon_n$, et la condition L^2 signifie que $\sum p^n|a_n|^2 < \infty$. Puisque $\psi(x) = 0$, quand $|x| < 1$, tous les coefficients a_n, pour $n < 0$, s'évanouissent, et on a $\psi = \sum_{n\geq 0} a_n\epsilon_n$. Calculons maintenant la transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_p}\psi$, qui par (56) est

$$\mathbb{F}_{e_p}\psi = \sum_{n\geq 0} a_n\left(p^n\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k=0}^\infty \epsilon_{-n-k} - p^n\frac{1}{p}\epsilon_{-n+1}\right).$$

La somme sur la droite fait intervenir seulement ϵ_j pour $j < 0$ excepté pour les termes pour lesquels $n = 0$ et $k = 0$ dans la somme $\sum_0^\infty \epsilon_{-n-k}$ et le terme avec $n = 0$ et $n = 1$ dans $-p^n\frac{1}{p}\epsilon_{-n+1}$. Par conséquent, les termes dans lesquels ϵ_j n'intervient pas pour $j < 0$ sont donnés par l'expression $a_0(1-\frac{1}{p})\epsilon_0 - a_1\epsilon_0 - a_0\frac{1}{p}\epsilon_1$. Puisque $\psi \in \mathbf{S}_1(\mathbb{Q}_p, e_p)$, la somme des termes dans lesquels ϵ_j intervient pour $j < 0$ est égale à 0 et donc on obtient l'égalité

$$\mathbb{F}_{e_p}\psi = a_0\left(1-\frac{1}{p}\right)\epsilon_0 - a_1\epsilon_0 - a_0\frac{1}{p}\epsilon_1 = \left(a_0\left(1-\frac{1}{p}\right) - a_1\right)\epsilon_0 - a_0\frac{1}{p}\epsilon_1 = a\epsilon_0 + b\epsilon_1.$$

Finalement, pour que $\mathbb{F}_{e_p}(a\epsilon_0 + b\epsilon_1)$ s'évanouisse pour $|x| < 1$, il faut qu'il s'évanouisse pour $x = 0$ *i.e.* que $\int(a\epsilon_0(x) + b\epsilon_1(x))dx = 0$, ce qui signifie que $a + pb = 0$. onne $\left(a_0(1-\frac{1}{p}) - a_1\right) - a_0 = 0$, *i.e.* $a_0 = -pa_1$, de telle façon que ψ est un multiplie scalaire de σ_p. $\square$

4.6. L'espace de Sonin dans le cas semi-local. — Soit S comme ci-dessus, et $|\bullet|_S : X_S = \mathbb{A}_S/\Gamma \to \mathbb{R}_+$ le module comme dans (40). On appelle α le caractère du groupe additif $\mathbb{A}_S = \prod_S \mathbb{Q}_v$ obtenu comme le produit des e_p (voir (55)) avec $e_\infty(x) := \exp(2\pi i x)$. On note $\sigma_S := \otimes_{S\setminus\{\infty\}}\sigma_p$.

Définition 4.4 : Soit $\lambda > 0$. L'espace semi-local de Sonin $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est le sous-espace de l'espace de Hilbert $L^2(X_S)^{K_S}$ défini comme suit :

$$\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha) := \{f \in L^2(X_S)^{K_S} \mid f(x) = 0 \;\&\; \mathbb{F}_S f(x) = 0 \quad \forall x, |x| < \lambda\}$$

où $\mathbb{F}_S$ dénote la transformation de Fourier par rapport à α.

Proposition 4.6. — *(i) Soit $f \in \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$, $\theta_S(f)$ la classe de la fonction $\sigma_S \otimes f$ dans $L^2(X_S)$. Alors $\theta_S(f)$ appartient à $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$.*

(ii) On a

$$\mathbb{F}_\mu(w_S(\theta_S(f)))(s) = \mathbb{F}_\mu(w_\infty(f))(s) \times \prod_{S\setminus\{\infty\}} \left(1 - p^{-\frac{1}{2} - is}\right) \tag{57}$$

Preuve. (i) Soit $z = (x, y) \in R_S \times \mathbb{R} = \mathbb{A}_S$ tel que $|z| = |x|_{S\setminus\{\infty\}} |y|_\infty < \lambda$. Alors soit $|x|_{S\setminus\{\infty\}} < 1$, soit $|y|_\infty < \lambda$. Dans les deux cas, on obtient $\sigma_S(x) f(y) = 0$ ainsi que $\widehat{\sigma_S}(x)\widehat{f}(y) = 0$. La même chose est vérifiée pour les éléments $\gamma z \in \mathbb{A}_S$, $\gamma \in \Gamma_+$ de telle façon que la classe de $\sigma_S \otimes f$ dans $L^2(X_S)$ appartient à $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$.

(ii) Pour simplifier la notation, on suppose $S = \{p, \infty\}$. On a, comme dans (44),

$$w_S(\sigma_S \otimes f)(1 \times \lambda) := \lambda^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\sigma_p \otimes f)(p^n, p^n\lambda) = \lambda^{1/2} \left(f(\lambda) - \frac{1}{p} f(\lambda/p) \right)$$

puisque $\sigma_p = \epsilon_0 - \frac{1}{p}\epsilon_1$.

Soit $g = w_\infty(f)$ alors on a

$$\lambda^{1/2} f(\lambda/p) = p^{1/2} (\lambda/p)^{1/2} f(\lambda/p) = p^{1/2} g(\lambda/p)$$

de telle façon qu'on obtient

$$w_S(\sigma_S \otimes f)(1 \times \lambda) = g(\lambda) - p^{-1/2} g(\lambda/p).$$

Ensuite, on a

$$\mathbb{F}_\mu(g)(s) = \int g(\lambda) \lambda^{-is} d^*\lambda$$

de telle façon qu'avec $g_1(\lambda) = g(\lambda/p)$, on obtient avec $\lambda = pu$,

$$\mathbb{F}_\mu(g_1)(s) = \int g_1(\lambda)\lambda^{-is} d^*\lambda = \int g(\lambda/p)\lambda^{-is} d^*\lambda = \int g(u)(pu)^{-is} d^*u = p^{-is}\mathbb{F}_\mu(g)(s)$$

ce qui donne l'égalité requise (57). $\square$

4.7. La stabilité des espaces de Sonin. — On garde la notation utilisée ci-dessus. Puisque $\left(1-p^{-\frac{1}{2}-is}\right)^{-1}=L_p(\frac{1}{2}+is)$, on réécrit (57) comme

$$\mathbb{F}_\mu w_S(\theta_S(f))(s)=\Big(\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}}L_p(\frac{1}{2}+is)\Big)^{-1}(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s). \tag{58}$$

Proposition 4.7. — *Soit $\lambda>0$.*

(i) Soit $\mathbb{F}_S$ la transformation de Fourier dans $L^2(X_S)$. On a $\mathbb{F}_S\circ\theta_S=\theta_S\circ\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}$.

(ii) Soit ι'_S l'application $f\mapsto f$, $L^2\Big(\mathbb{R},\frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\Big)\to L^2\Big(\mathbb{R},\frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R})^{pair} & \xrightarrow{\theta_S} & L^2(X_S)^{K_S} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \upsilon_\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \upsilon_S} \\ L^2\Big(\mathbb{R},\frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\Big) & \xrightarrow{\iota'_S} & L^2\Big(\mathbb{R},\frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big) \end{array} \tag{59}$$

(iii) Soit $f,g\in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. On a $\langle\theta_S(f)|\eta_S(g)\rangle=\langle f|g\rangle$.

Preuve. Par la proposition 4.6, on a $\theta_S(\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R},e_\infty))\subset\mathbf{S}_\lambda(X_S,\alpha)$ où $\mathbf{S}_\lambda(X_S,\alpha)$ est l'espace de Sonin semi-local.

(i) Cela découle de l'égalité $\mathbb{F}_{e_p}\sigma_p=\sigma_p$.

(ii) Soit $f\in L^2(\mathbb{R})^{pair}$. On calcule $\upsilon_S\circ\theta_S(f)$. Par (53), on a $\upsilon_S=\beta_S\circ\mathfrak{U}_S=\beta_S\circ\mathbb{F}_\mu w_S$. Par (58)

$$\upsilon_S\circ\theta_S(f)(s)=\left(\beta_S\mathbb{F}_\mu w_S(\theta_S(f))\right)(s)=\left(\prod_{v\in S}L_v(\frac{1}{2}+is)\right)\Big(\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}}L_p(\frac{1}{2}+is)\Big)^{-1}(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s)=$$

$$=L_\infty(\frac{1}{2}+is)(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)(s)=\upsilon_\infty(f)(s).$$

(iii) L'application $\mathfrak{U}_S=\mathbb{F}_\mu w_S:L^2(X_S)^{K_S}\to L^2(\mathbb{R})$ est unitaire de telle façon qu'on a

$$\langle\theta_S(f)|\eta_S(g)\rangle=\langle\mathfrak{U}_S\theta_S(f)|\mathfrak{U}_S\eta_S(g)\rangle$$

et en utilisant (58) pour le terme de gauche et (47) pour celui de droite, on obtient

$$\langle\theta_S(f)|\eta_S(g)\rangle=\langle\Big(\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}}L_p(\frac{1}{2}+is)\Big)^{-1}(\mathbb{F}_\mu w_\infty f)|\Big(\prod_{p\in S\setminus\{\infty\}}L_p(\frac{1}{2}-is)\Big)(\mathbb{F}_\mu w_\infty g)\rangle=\langle f|g\rangle$$

ce qui donne l'égalité requise. $\square$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le fait suivant :

Théorème 4.6 : Soit $S \ni \infty$ un ensemble fini de places et $\lambda > 0$. Alors, l'application θ_S est un isomorphisme hilbertien des espaces de Sonin $\theta_S : \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) \to \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ où α est le caractère normalisé.

Preuve. On sait déjà que $\theta_S(\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)) \subset \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ par la proposition 4.6 (i). Pour montrer qu'on a l'égalité, soit $h \in \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$. Le diagramme commutatif (59) montre que l'application $\theta_S : L^2(\mathbb{R})^{pair} \to L^2(X_S)^{K_S}$ est bornée par une borne inversible, de telle façon qu'il existe un unique $f \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$ tel que $\theta_S(f) = h$. Pour montrer que $f \in \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$, il suffit de montrer que f est orthogonal à tous les éléments de P_λ et $\widehat{P_\lambda}$. Par la proposition 4.1 (ii) et (iv), on a $\eta_S(P_\lambda) \subset P_\lambda^S$ et $\eta_S(\widehat{P_\lambda}) \subset \widehat{P_\lambda^S}$. Ainsi on obtient en utilisant la proposition 4.7 (iii) que pour tout élément $g \in P_\lambda$, or $g \in \widehat{P_\lambda^S}$, on a

$$\langle f | g \rangle = \langle \theta_S(f) | \eta_S(g) \rangle = 0$$

puisque par construction, le sous-espace $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est orthogonal à P_λ^S et à $\widehat{P_\lambda^S}$. Ainsi, on conclut que $f \in \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$. $\square$

4.8. Espaces hilbertiens de fonctions entières. — La stabilité exhibée par le théorème 4.6 montre que la structure hilbertienne des espaces de Sonin $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ est indépendante de S et la théorie des espaces de Hilbert des fonctions entières [3] fournit en fait la réalisation canonique de ces espaces que nous allons décrire maintenant. Il est important de remarquer que le choix de l'ensemble fini S joue un rôle central pour fixer le produit intérieur dans l'espace hilbertien.

4.8.1. *Lien avec les espaces de Hilbert des fonctions entières.* — Ce lien entre les espaces de Sonin (appelés ainsi dans [3]) et les espaces de Hilbert des fonctions entières, dus à de Branges [2, 3], est que l'application (*cf.* également [4, 6])

$$\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) \ni f \mapsto \check{\mathcal{M}}(f)(z) := \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} f(t) t^{1-z} d^*t \tag{60}$$

envoie $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$ sur un espace de Hilbert de fonctions entières, dénoté ici par $\mathcal{B}_\lambda$, qui appartient à la classe des espaces de de Branges.

4.8.2. *Stabilité selon l'amplification semi-locale.* — La restriction de $\check{\mathcal{M}}(f)(z)$ à la droite critique, *i.e.* $z = \frac{1}{2} + is$, coïncide avec la transformation de Hardy-Titchmarsh duale dans le cas $S = \{\infty\}$,

$$\check{\mathcal{M}}(f)\left(\frac{1}{2} + is\right) = \upsilon_\infty(f)(s) \tag{61}$$

comme cela découle de la définition 4.3, (52), (53).

Proposition 4.8. — *Soit $S \ni \infty$ un ensemble fini de places et $\lambda > 0$. L'application υ_S est un isomorphisme d'espaces hilbertiens $\mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha)$ avec $\mathcal{B}_\lambda$ et on a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty) \arrow[rr, "\theta_S"] \arrow[dr, "\upsilon_\infty"'] & & \mathbf{S}_\lambda(X_S, \alpha) \arrow[dl, "\upsilon_S"] \\ & \mathcal{B}_\lambda & \end{tikzcd} \tag{62}$$

Preuve. Cela découle du diagramme (59) combiné avec (61). ☐

Notons que $\mathcal{B}_\lambda$ hérite de produits intérieurs différents de son plongement dans $L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big)$.

4.8.3. *L'espace de De Branges $\mathcal{B}_\lambda^S$.* — Soit $z^\sharp$ désignant le symétrique de z par rapport à la droite critique $L = \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$. Un espace de de Branges est un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ de fonctions entières satisfaisant les axiomes suivants :

(1) l'évaluation de n'importe quel $w \in \mathbb{C}$ est continue ;

(2) l'application $F \mapsto F^\#$, $F^\#(w) = \overline{F\left(w^\#\right)}$ est une anti-isométrie unitaire de $\mathcal{K}$;

(3) si $F(\gamma) = 0$ alors $G(w) = \left(w - \gamma^\#\right)/(w-\gamma)F(w)$ appartient à $\mathcal{K}$ et $\|G\| = \|F\|$.

Il découle de ces axiomes que pour tout $S \ni \infty$ fini, l'espace $\mathcal{B}_\lambda^S$ obtenu en munissant l'espace $\mathcal{B}_\lambda$ de la norme induite par son plongement dans $L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_S(s)|^2}\Big)$ est un espace de de Branges.

4.8.4. *Structure functions.* — Le fait important suivant est que pour $S = \{\infty\}$, Burnol [5] a calculé une *fonction de structure* $\mathscr{E}_\lambda$, *i.e.* telle que

$$|\mathscr{E}_\lambda(z^\sharp)| < |\mathscr{E}_\lambda(z)|, \quad |\mathscr{E}_\lambda(\frac{1}{2} + is)| = |E_\infty(s)|$$

où $z^\sharp$ désigne le symétrique de z par rapport à la droite L qui détermine $\mathcal{B}_\lambda$ comme un espace de de Branges avec produit intérieur hérité de son plongement dans $L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\Big)$.

Par une définition équivalente des espaces de de Branges (*cf.*[3]), il découle que

$$\mathcal{B}_\lambda = \left\{F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad \frac{F}{\mathscr{E}_\lambda}, \frac{F^\sharp}{\mathscr{E}_\lambda} \in \mathbb{H}^2(L^+)\right\}. \tag{63}$$

Ici, L est la droite $\Re z = \frac{1}{2}$, L^+ le demi-plan $\Re z > \frac{1}{2}$, $\mathbb{H}^2(L^+)$ est l'espace de Hardy de L^+, et $F^\sharp(z) := \overline{F(z^\sharp)}$ où $z^\sharp$ désigne le symétrique de z par rapport à la droite L.

Ainsi, en identifiant $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$ avec son image dans $L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\Big)$ obtenu en restreignant la formule (60) à la droite $\Re z = \frac{1}{2}$, on réalise $\mathbf{S}_\lambda(\mathbb{R}, e_\infty)$ lorsque l'espace de fonctions $F \in \ker \bar\partial$ tel que $F \mid L \in L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\Big)$ et satisfait la condition additionnelle d'être un espace de Hardy, *i.e.* comme dans la version L^2 de $H^{0,0}_{\bar\partial}(\mathbb{C})$.

Notons que la L^2-norme de $F \mid L$ in $L^2\Big(\mathbb{R}, \frac{ds}{|E_\infty(s)|^2}\Big)$ est la même que la L^2-norme de $F \in \mathcal{B}_\lambda$.

5. Représentation métaplectique dans le modèle de Jacobi

5.1. Représentation infinitésimale et opérateur prolate. — On rappelle que la représentation métaplectique ϖ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$ est réalisée au niveau infinitésimal en laissant la base standard $\{h, e_+, e_-\}$, avec $[h, e_+] = 2e_+$, $[h, e_-] = -2e_-$, $[e_+, e_-] = h$, agir sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, via les opérateurs différentiels

$$\varpi(h) := x\partial_x + \frac{1}{2}, \quad \varpi(e_+) := i\pi x^2, \quad \varpi(e_-) := \frac{i}{4\pi}\partial_x^2. \tag{64}$$

Ainsi, $\varpi(h)$ est à un facteur près, égal à i, le $\mathbb{S}$ de mise à l'échelle alors que l'opérateur de Hermite est obtenu comme $\varpi(k)$ en utilisant le générateur $k = i(e_- - e_+)$ du sous-groupe compact maximal $K = \widetilde{SO}(2)$. Avec ces notations, on a

$$\varpi(k) = \pi x^2 - \frac{1}{4\pi}\partial_x^2 \tag{65}$$

qui est l'opérateur de Hermite de spectre $\{n + \frac{1}{2};\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ et les fonctions de Hermite

$$h_n = \left(2^{2n-\frac{1}{2}} n!\, \pi^n\right)^{-1/2} P_n(x) e^{-\pi x^2/2}, \quad \text{où} \quad P_n = (-1)^n e^{2\pi x^2} \partial_x^n \left(e^{-2\pi x^2}\right),$$

qui fournissent les valeurs propres associées formant une base orthonormale.

Ainsi, en passant à l'autre $\mathbb{C}$-base standard $\{k, n_+, n_-\}$, où $n_\pm = \frac{1}{2}\big(h \mp i(e_+ + e_-)\big)$, la représentation ϖ est déterminée par (65) avec

$$\varpi(n_+) = \frac{\partial^2}{8\pi} + \frac{x\,\partial}{2} + \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{4} = \left(\frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = a^2 \tag{66}$$

$$\varpi(n_-) = -\frac{\partial^2}{8\pi} + \frac{x\,\partial}{2} - \frac{1}{2}\pi x^2 + \frac{1}{4} = -\left(-\frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -(a^*)^2 \tag{67}$$

où $a = \frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $a^* = -\frac{\partial}{2\sqrt{2\pi}} + x\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ sont les opérateurs d'*annihilation* et de *création*, en fonction desquels $\varpi(k) = aa^* + a^*a$.

Ils fonctionnent comme les opérateurs d'*indice* et d'*exposant* par rapport à la base $\{h_n;\, n \in \mathbb{Z}^+\}$ puisque

$$a(h_0) = 0, \quad a(h_n) = \sqrt{\frac{n}{2}}\, h_{n-1}, \quad \text{et} \quad a^*(h_n) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}\, h_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{68}$$

L'opérateur de Casimir $C := h^2 + 2(e_+e_- + e_-e_+)$ remplit la condition $\varpi(C) = -\frac{3}{4}$.

En particulier, cela montre que $L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})^{pair} \oplus L^2(\mathbb{R})^{impair}$ représente la décomposition de ϖ en deux sous-représentations irréductibles de poids les plus faibles $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ respectivement.

Proposition 5.1. — *Au niveau formel, l'opérateur* $\mathbf{W}_\lambda$ *est de la forme* $\varpi(\mathcal{W}_\lambda)$ *où* $\mathcal{W}_\lambda$ *est l'élément suivant de l'algèbre enveloppante* $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$

$$\mathcal{W}_\lambda = h^2 + 4\pi\lambda^2\, k - \frac{1}{4}.$$

Preuve. Cela s'obtient en utilisant (4), (64) et (65). □

5.2. Représentation métaplectique et polynômes orthogonaux. — On va maintenant présenter la représentation métaplectique comme cas particulier d'une construction générale pour les polynômes orthogonaux. On considère d'abord, comme dans la section 2.2, le paradigme général des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que $d\mu(-s) = d\mu(s)$. Modulo un changement de phase dans la base orthonormale, on peut supposer que les coefficients a_n de la matrice de Jacobi A, pour la multiplication par la variable $s \in \mathbb{R}$, sont positifs,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{69}$$

Les coefficients a_n sont déterminés par les moments $c_n := \int t^n d\mu(t)$ par (voir [19] 2.2.7, 2.2.15)

$$a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \quad k_n = (D_{n-1}/D_n)^{1/2} \tag{70}$$

où les D_n sont les déterminants de matrices de Hankel de la forme, puisque les moments impairs s'évanouissent,

$$D_5 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_6 \\ c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_6 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & c_6 & 0 & c_8 \\ c_4 & 0 & c_6 & 0 & c_8 & 0 \\ 0 & c_6 & 0 & c_8 & 0 & c_{10} \end{pmatrix}$$

Pour étudier l'algèbre de Lie engendrée par A et l'opérateur de calibrage N, $NP_n = nP_n$. On pose

$$F_+ := N + \frac{1}{2i}[A,N], \quad F_- := N - \frac{1}{2i}[A,N] \tag{71}$$

Lemme 5.1.

(i) Le double commutateur $[[A,N],N] = A$.

(ii) Le commutateur $[F_+,F_-]$ est égal à $-iA$.

(iii) Le double commutateur $[A,[A,N]]$ est égal à $f(N)$ pour la fonction

$$f(n) = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \tag{72}$$

(iv) On a $[A, F_+] = 2iF_+ + \Upsilon$ où la matrice diagonale Υ contient les éléments d_n avec

$$\frac{1}{i} d_n = -2n + a_n^2 - a_{n-1}^2 \tag{73}$$

(v) La matrice $F_+ - \frac{1}{2}iA$ est diagonale supérieure et c'est la somme $N - i\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est le décalage pondéré

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. (i) Le commutateur $[A, N]$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{74}$$

et le double commutateur $[[A, N], N] = A$.

(ii) On a

$$[F_+, F_-] = [N + \frac{1}{2i}[A, N], N - \frac{1}{2i}[A, N]] = \frac{1}{i}[[A, N], N] = -iA.$$

(iii) Ce fait important provient du calcul de $[A, [A, N]]$ qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} -2a_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_0^2 - 2a_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_1^2 - 2a_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_2^2 - 2a_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_3^2 - 2a_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

(iv) On a

$$[A, F_+] = [A, N] + \frac{1}{2i}[A, [A, N]] = 2iF_+ + \Upsilon, \quad d_n = -2in + \frac{1}{2i} f(n).$$

(v) Par (74), la matrice $F_+ - \frac{1}{2}iA$ est triangulaire supérieure. $\square$

On cherche une représentation σ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ telle que, de A comme dans (69) et $k = i(e_- - e_+)$,

$$\sigma(h) = -iA, \quad \sigma(k) = N + c \tag{75}$$

pour une certaine constante c.

L'identité

$$[h,[h,k]] = -2i([h,e_+] + [h,e_-]) = -4i(e_+ - e_-) = 4k \tag{76}$$

se traduit en la relation

$$[A,[A,\sigma(k))]] = -4\sigma(k). \tag{77}$$

Par le lemme 5.1, (iii), $[A,[A,N]]$ est la matrice diagonale avec comme éléments diagonaux $2\big(a_{n-1}^2 - a_n^2\big)$.

L'identité (77) est ainsi équivalente à

$$2(a_{n-1}^2 - a_n^2) = -4(n+c), \quad \forall n \geq 0. \tag{78}$$

On a $[h,k] = -2i(e_+ + e_-)$ de telle façon que

$$e_+ = \frac{i}{2}\left(k + \frac{1}{2}[h,k]\right), \quad e_- = \frac{i}{2}\left(-k + \frac{1}{2}[h,k]\right) \tag{79}$$

Ainsi avec la notation de (70), on obtient en utilisant (75)

$$\sigma(e_+) = \frac{i}{2}(F_+ + c), \quad \sigma(e_-) = \frac{i}{2}(-F_- - c)$$

Ainsi par le lemme 5.1 (iv), on obtient

$$[\sigma(h), \sigma(e_+)] = \frac{1}{2}[A, F_+] = iF_+ + \frac{1}{2}\Upsilon.$$

L'égalité de l'algèbre de Lie $[h,e_+] = 2e_+$ avec l'équation (73) et (78) déterminent alors de manière unique $c = \frac{1}{4}$. Cela détermine de manière unique les a_n, la représentation σ, et $E_\pm := -i\sigma(e_\pm)$ sont donnés par

$$E_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}[A,N], \qquad E_- = -\frac{1}{2}\left(N + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}[A,N], \tag{80}$$

Théorème 5.2 :

(i) Les coefficients positifs a_n sont spécifiés uniquement pour (75) pour définir une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, on a

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}. \tag{81}$$

(ii) Le problème du moment de Hamburger pour les moments associés à la suite a_n par (70) est résolu.

(iii) La mesure unique $d\mu$ du problème du moment de (ii) est la mesure de probabilité proportionnelle à $|\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}is)|^2 ds$.

(iv) La représentation σ est la composante paire de la représentation métaplectique ϖ de $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$.

Preuve. (i) En utilisant (78) avec $c=\frac{1}{4}$, on obtient

$$2(a_{n-1}^2 - a_n^2) = -4n - 1$$

de telle façon qu'on obtient (81).

(ii) Par le théorème 2, [18] p. 86, *le problème du moment de Hamburger* correspondant est résolu, de la même façon qu'il découle de [17], le corollaire 6.19 puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} = \infty.$$

(iii) Les coefficients a_n sont en accord avec ceux donnés par la section 3.3, après rééchelonnage par les puissances de i.

(iv) Les valeurs propres de $\sigma(k)$, qui servent de poids pour la représentation σ relatifs au sous-groupe de Cartan $\widetilde{S0}(2) \subset \widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$, reproduisent exactement le spectre de l'opérateur de Hermite transporté à partir de $L^2(\mathbb{R})^{pair}$.

Cela identifie la représentation irréductible σ comme étant la composante paire de la représentation métaplectique ϖ de $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$. $\square$

Déterminons maintenant explicitement les moments $c_n := \int t^n d\mu(t)$ où $d\mu$ est la mesure de probabilité proportionnelle à $|\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}is)|^2$. On utilise les égalités (70),

$$k_n = (D_{n-1}/D_n)^{1/2}, \quad a_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \quad a_n^2 = \frac{1}{4}(2n+1)(2n+2),$$

ce qui implique

$$D_{n-1}/D_n = k_n^2, \quad k_n^2 = k_0^2 \prod_0^{n-1} a(j)^{-2} = \frac{4^n}{\Gamma(2n+1)}$$

Ceci détermine alors les moments et montre que ce sont des nombres rationnels, les premiers de ces moments sont

$$c_0 = 1, \; c_2 = \frac{1}{2}, \; c_4 = \frac{7}{4}, \; c_6 = \frac{139}{8}, \; c_8 = \frac{5473}{16}, \; c_{10} = \frac{357721}{32}$$

Ce que l'on trouve en général, c'est que les dénominateurs des moments sont des puissances de 2^n pour c_{2n} de telle façon qu'ils sont déterminés par une suite d'entiers. Les premiers de ces dénominateurs sont

1, 7, 139, 5473, 357721, 34988647, 4784061619, 871335013633, 203906055033841,

$$59618325600871687,\ 21297483077038703899,\ 912732258450753015139 3,\ldots$$

Cette suite est une suite classique d'entiers, connue comme la suite $A126156$ [15] de l'encyclopédie des suites d'entiers OEIS. En fait, on a

Proposition 5.2. — *Les moments normalisés c_n de la mesure $(2\pi)^{-3/2}|\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}is)|^2 ds$ sont tels que $c_n = 0$ pour n impair et*

$$\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} = \sqrt{\frac{2}{e^x + e^{-x}}}. \tag{82}$$

Preuve. La normalisation signifie que $c_0 = 1$ et que la mesure $d\mu$ proportionnelle à $|\Gamma(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}is|^2 ds$ est une mesure de probabilité. Le côté gauche de (82) est alors égal à

$$\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(isx) d\mu(s) = \langle \exp(ixh) \mathbb{F}_\mu(w(\xi)) | \mathbb{F}_\mu(w(\xi)) \rangle$$

où $\xi \in L^2(\mathbb{R})^{pair}$, $\xi(x) = e^{-\pi x^2}$, et h est l'opérateur auto-adjoint de multiplication par s.

$$\mathbb{F}_\mu(w(\xi))(s) = \int_0^\infty x^{1/2-is} e^{-\pi x^2} d^*x = \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{4}+i\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} - i\frac{s}{2}\right)$$

On a $(\mathbb{F}_\mu f_\lambda)(s) = \lambda^{is}(\mathbb{F}_\mu f)(s)$ où $f_\lambda(u) := f(\lambda u)$, et en prenant $\lambda = e^x$, on obtient

$$\sum c_n \frac{(ix)^n}{n!} = \langle \lambda^{1/2} \xi_\lambda | \xi \rangle = \lambda^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\lambda^2 t^2} e^{-\pi t^2} dt = \lambda^{1/2}(1+\lambda^2)^{-1/2}$$

qui fournit l'égalité requise. $\square$

Références

[1] M. Berry and J. Keating, *$H = qp$ and the Riemann zeros*, "Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder", edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner, Plenum Press.

[2] L. de Branges, *Self-reciprocal functions*, J. Math. Anal. Appl. **9** (1964), 433–457.

[3] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1968.

[4] J.-F. Burnol, *Sur certain espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **333** (2001), 201–206.

[5] J.-F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I **335** (2002), 689–692.

[6] J.-F. Burnol, *Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann zeta function.* J. Théor. Nombres Bordeaux 16 (2004), no. 1, 65-94.

[7] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.* Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106.

[8] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.

[9] A. Connes, C. Consani, *The Scaling Hamiltonian*, J. Operator Theory **851** (2021), pp. 257-276.

[10] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place.* Selecta Math. (N.S.) **27** (2021), no. 4, Paper No. 77, 70 pp.

[11] A. Connes, C. Consani, *Spectral triples and ζ–cycles.* Enseign. Math. **69** (2023), no. 1–2, 93-148.

[12] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **119** (2022), no. 22.

[13] A. Grünbaum, *A New Property of Reproducing Kernels for Classical Orthogonal Polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 95. 491-500 (1983).

[14] G. H. Hardy and E. C. Titchmarsh, *Self-reciprocal functions*, Quart. J. Math. (Oxford), **1** (1930), 196-231.

[15] *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org`.

[16] Osipov, Andrei; Rokhlin, Vladimir; Xiao, Hong *Prolate spheroidal wave functions of order zero. Mathematical tools for bandlimited approximation.* Applied Mathematical Sciences, **187**. Springer, New York, 2013.

[17] K. Schmüdgen, *The Moment problem*, Graduate Texts in Mathematics **277** Springer.

[18] B. Simon, *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, Adv. Math., **137** (1998), 82-203.

[19] G. Szego, *Orthogonal polynomials*, American Math. Soc. 4th edition (1975).

[20] A. Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Math. **111** (1964), 143-211.