

Formes mathématiques

Des tresses et des nœuds

Les nœuds et les tresses sont connus depuis des millénaires, mais ce n'est qu'au XIX^e siècle que les mathématiciens ont tenté de classer ces objets pour mieux les comprendre. Les progrès de la théorie des nœuds à la fin du XX^e siècle doivent énormément à l'interprétation des tresses en termes d'objets algébriques liés à la physique quantique.

PAR ROMAIN ATTAL, MÉDIATEUR SCIENTIFIQUE DE L'UNITÉ DE MATHÉMATIQUES DU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

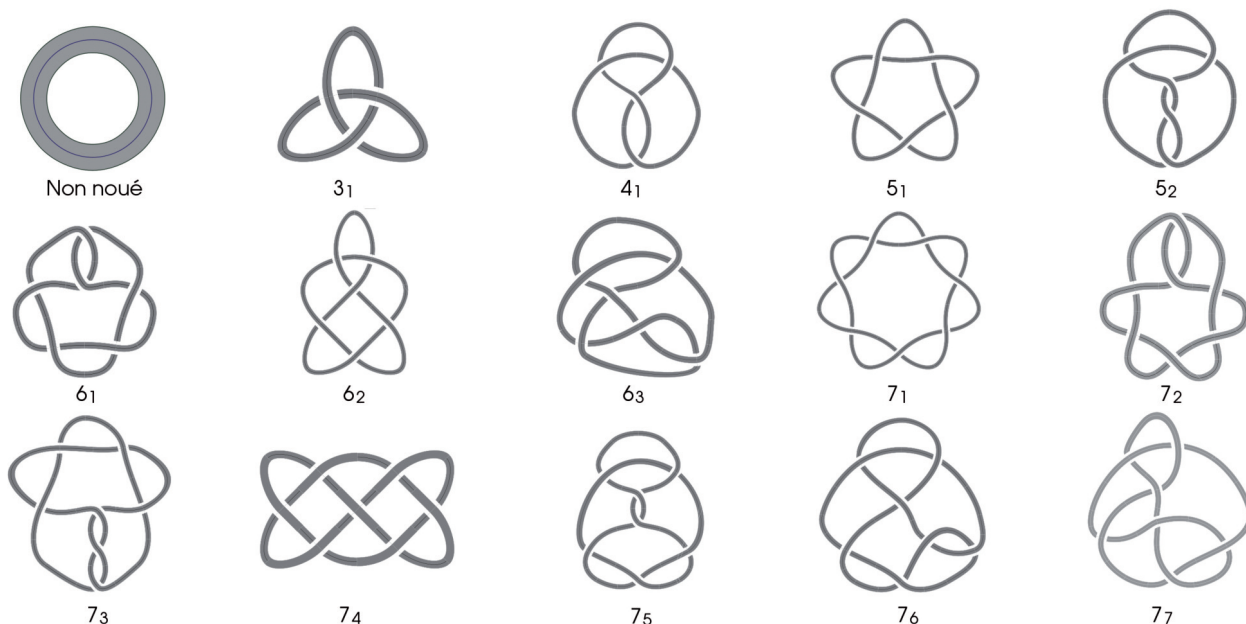


Figure 1. Une petite table de nœuds. Dans cette liste, x_n désigne le n -ième nœud à x croisements. © Ylebru / Knot Table / Wikimedia Commons.

Un nœud est une courbe fermée dans l'espace à trois dimensions, qui ne passe pas deux fois par le même point. Si l'on peut déformer une telle courbe en une autre, toujours sans croisement, on considère qu'elles représentent toutes deux le même nœud.

DES NŒUDS À RANGER

Pour commencer à classer les nœuds, on les projette sur un plan afin d'obtenir un dessin avec le minimum de croisements et l'on dresse une liste de ces diagrammes, par ordre croissant de complexité (fig. 1). Pour parfaire cette classification, il faut indexer les nœuds par des objets algébriques plus

fins que de simples nombres entiers, par exemple des polynômes. En 1928, James Alexander (1888-1971) a défini, pour chaque nœud, un polynôme invariant par déformation du nœud (Pour aller plus loin : *Comment calculer le polynôme d'un entrelacs ?*). Malheureusement, des nœuds différents peuvent avoir le même polynôme. C'est le cas du trèfle droit et de son image miroir, le trèfle gauche (fig. 2). En 1984, Vaughan Jones a découvert un nouveau polynôme invariant qui permet, parfois, de discerner un nœud de son image miroir. Nous verrons ci-après comment il y parvint pour le trèfle.

Un ensemble de nœuds, éventuellement enlacés, est appelé entrelacs. On peut fabriquer tous les entrelacs en tressant des ficelles verticalement et en reliant

chaque extrémité haute d'un brin à l'extrémité basse d'un brin (fig. 3). La théorie des nœuds est ainsi entièrement contenue dans celle des tresses.

LE GROUPE DES TRESSES

La tresse la plus simple à réaliser, notée I, consiste à ne pas tresser les brins, qui restent donc tous verticaux (lll...lll). Composer une tresse avec I, par-dessus ou par-dessous, ne modifie pas cette tresse. On dit que I est « l'élément neutre » de cette composition. D'autre part, si T, T' et T'' sont trois tresses successives, on a $(T T') T'' = T (T' T'')$: la composition des tresses est dite « associative », comme la multiplication des nombres : $2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$. De plus, si l'on compose une tresse avec son image dans un miroir horizontal, on obtient la tresse I. Il suffit de tendre les ficelles pour s'en rendre compte. C'est pourquoi l'image miroir d'une tresse est appelée son inverse.

Toutes ces propriétés (élément neutre, associativité et inversibilité) font que les tresses de même nombre de brins forment un « groupe ». On doit à Emil Artin (1898-1962) la définition purement algébrique des tresses énoncée en 1926.

Les tresses de la figure 4 ont trois brins tressés de deux manières qui semblent de prime abord différentes. Mais si l'on tend les ficelles verticalement, on réalise que ces deux tressages sont équivalents (le fil bleu passe à gauche ou à droite du croisement des fils rouge et vert).

Passons du dessin à l'algèbre. Notons S_1 le passage du brin n° 1 devant le brin n° 2 en montant et S_2 le passage du brin n° 2 devant le brin n° 3 en montant. L'équivalence de ces deux tresses s'écrit alors :

$$S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 \text{ (relation d'Artin)}$$

Chaque tresse peut être représentée ainsi algébriquement par un « mot » formé de « lettres », prises parmi $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ et $S_1^{-1}, S_2^{-1}, S_3^{-1}, S_4^{-1}, \dots$, leurs inverses (fig. 5). Ces lettres reflètent toutes les façons d'échanger deux brins voisins. La relation d'Artin permet de simplifier certains mots, un peu comme lorsque l'on simplifie une fraction quand c'est possible.

On peut considérer aussi les tresses comme les chemins suivis, dans l'espace-temps, par des particules se déplaçant sur une surface horizontale, le temps étant représenté par la dimension verticale. La position et la vitesse de chaque particule ne comptent pas, seule importe la manière dont leurs lignes d'espace-temps s'entrelacent. La découverte, fortuite, du polynôme de Jones a révolutionné la théorie des nœuds et surpris nombre de mathématiciens et physiciens en reliant les nœuds à la physique quantique et la mécanique statistique. En 1988,

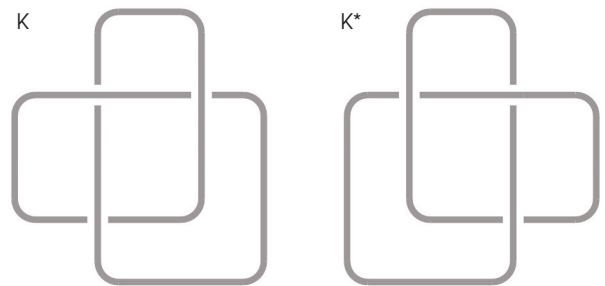


Figure 2. Le trèfle droit (K) et le trèfle gauche (K*).

© Palais de la découverte.

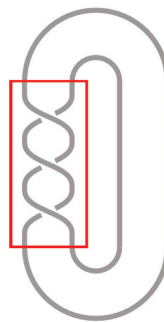


Figure 3. La fermeture de la tresse encadrée en rouge donne un nœud de trèfle.

© Palais de la découverte.

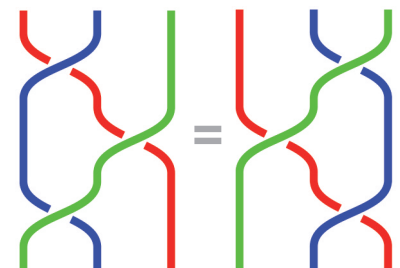


Figure 4. Illustration de la relation d'Artin.

© Palais de la découverte.

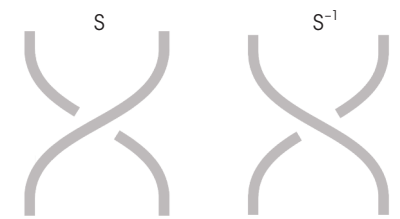


Figure 5. Toutes les tresses sont obtenues en combinant ces mouvements élémentaires.

© Palais de la découverte.

Edward Witten a redéfini le polynôme de Jones en interprétant les nœuds comme des trajectoires de particules sensibles uniquement à la forme de l'espace-temps et non à sa géométrie (le résultat des calculs ne dépend pas de la notion de distance). Depuis cette époque, les liens entre mathématiciens et physiciens théoriciens se sont renforcés, au bénéfice des deux disciplines.

L'histoire des nœuds et des tresses illustre un principe général en mathématiques : penser géométriquement (avec nos sens) et prouver algébriquement (par le langage, les symboles et le calcul). **R. A.**

Pour en savoir plus

Le Dimet J.-Y., *Nœuds et tresses - Une introduction mathématique*, Vuibert, 2010.

Pour aller plus loin

Comment calculer le polynôme d'un entrelacs ?

Pour calculer le polynôme d'Alexander ou le polynôme de Jones d'un entrelacs L , on choisit d'abord un sens de parcours. Sur un diagramme plan de L , rapprochons deux brins orientés comme L_0 (fig. I). On peut alors les couper et les recoller de deux façons différentes, notées L_+ et L_- .

Les entrelacs L_+ , L_- et L_0 sont « voisins » au sens où l'on ne modifie leur diagramme qu'en un croisement pour passer de l'un à l'autre. Pour obtenir un polynôme invariant $A(x)$, on impose une équation linéaire, appelée « relation d'écheveau », entre A_{L_+} , A_{L_-} et A_{L_0} :

$$A_{L_+}(x) = A_{L_-}(x) + xA_{L_0}(x)$$

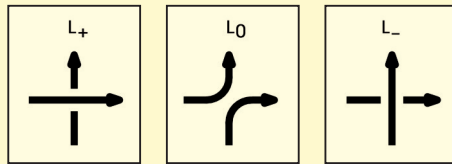


Figure I. Trois croisements possibles.

© Palais de la découverte.

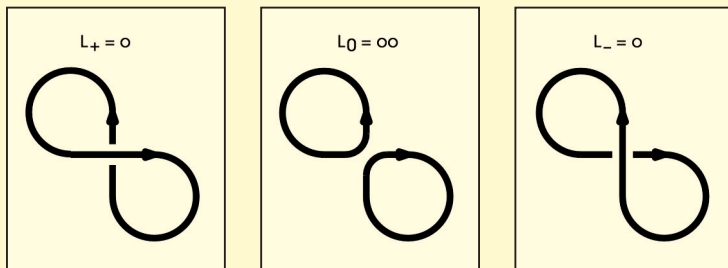


Figure II. Trois entrelacs voisins. © Palais de la découverte.

Aussi, on pose $A_o(x) = 1$ pour le cercle non noué, noté o . John Conway a démontré, en 1970, que l'on retrouvait ainsi le polynôme d'Alexander. En particulier, $A_L(x)$ ne dépend pas de l'orientation choisie initialement pour L .

Pour calculer le polynôme d'Alexander de deux cercles ni noués ni enlacés (notés oo), il suffit de fermer les brins de la figure précédente en suivant leur sens de parcours (fig. II). Puisque, dans ce cas, $L_+ = L_- = o$ (un seul cercle non noué) et $L_0 = oo$, on obtient : $x A_{L_0}(x) = A_{L_+}(x) - A_{L_-}(x) = 0$ donc $A_{L_0}(x) = 0$. Calculons maintenant le polynôme d'Alexander de deux cercles enlacés, ou entrelacs de Hopf (fig. III).

Modifions le croisement du bas de deux manières : en faisant passer dessous le brin du dessus, on obtient deux cercles non enlacés (oo), dont le polynôme est nul d'après le calcul précédent ; en éliminant le croisement, on obtient un seul cercle non noué (o), dont le polynôme vaut 1. D'après la relation d'écheveau, le polynôme d'Alexander de l'entrelacs de Hopf vaut donc :

$$A_H(x) = A_{L_+}(x) = A_{L_-}(x) + xA_{L_0}(x) = 0 + x = x$$

En appliquant la relation d'écheveau à un croisement d'un trèfle (fig. IV), on obtient $A_K(x) = 1 + xA_H(x) = 1 + x^2$

Pour calculer le polynôme de Jones $J(t)$, la démarche est identique. On a aussi $J_o(t) = 1$, mais la relation d'écheveau est différente :

$$t^{-1}J_{L_+}(t) - tJ_{L_-}(t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})J_{L_0}(t)$$

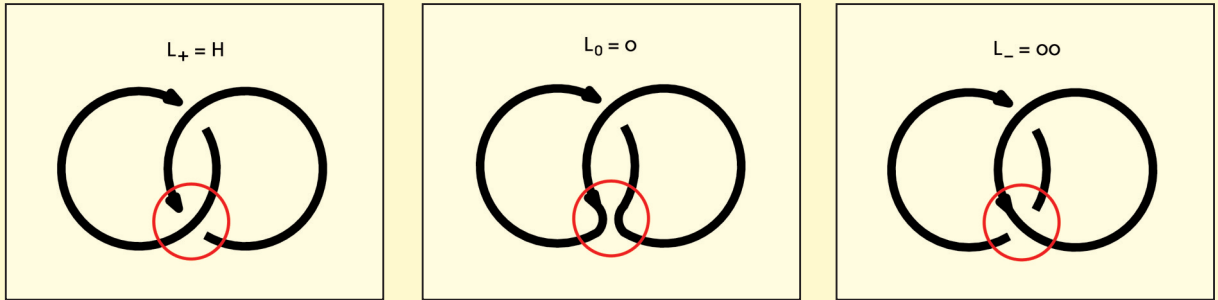


Figure III. Pour l'entrelacs de Hopf, $A_H(x) = x$. © Palais de la découverte.

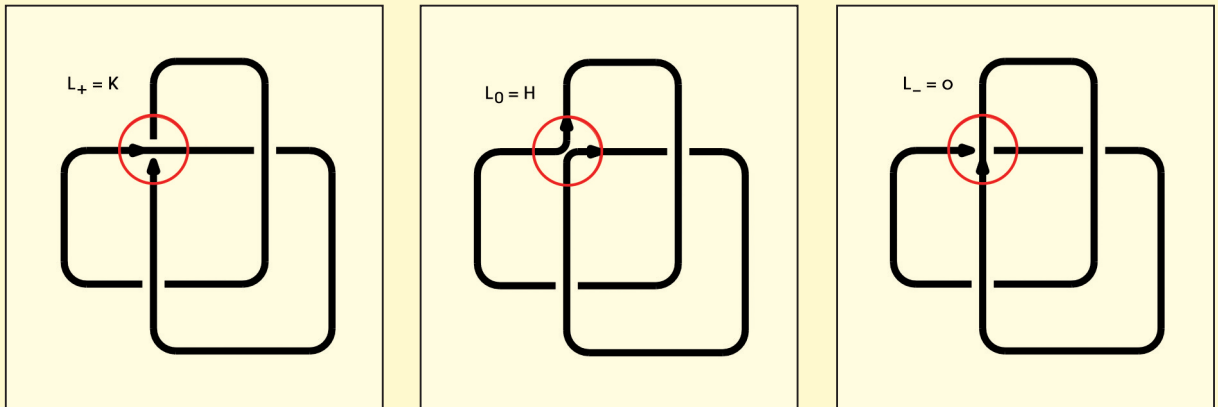


Figure IV. Calcul de $A(x)$ et $J(t)$ pour le trèfle droit, K . © Palais de la découverte.

Il faut remplacer alors les coefficients 1 et x par t^2 et par $t^{-1/2}(t-1)$. On peut vérifier que le polynôme de Jones de la juxtaposition $L_1 \cup L_2$ de deux entrelacs est presque égal au produit de leurs polynômes respectifs :
 $J_{L_1 \cup L_2}(t) = -(t^{1/2} + t^{-1/2}) J_{L_1}(t) J_{L_2}(t)$
 Le facteur $-(t^{1/2} + t^{-1/2})$ témoigne du fait que la juxtaposition de particules identiques induit entre elles des corrélations, phénomène

typique de physique quantique. En appliquant la même méthode (fig. IV), on obtient pour le trèfle droit :
 $J_K(t) = t + t^3 - t^4$
 et pour le trèfle gauche :
 $J_{K^*}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4} = J_K(t^{-1})$.
 Ces deux polynômes étant différents, le polynôme de Jones peut distinguer le trèfle droit du trèfle gauche.