

## Treillis de Goldbach : non-commutativité locale

Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, septembre 2026

Je rappelle à chatgpt les règles en lui fournissant le dessin ci-dessous dans lequel le trimino entouré en vert (i.e.  $(5, 7) \cdot (3, 9) \mapsto (5, 9)$ ) montre la loi de composition applicable aux 16 sortes de triminos possibles (voir

<https://denisevellachemla.eu/merveilleuxmaillage.pdf> ou bien

<https://denisevellachemla.eu/pavages.pdf> ) :

|          |          |            |            |             |             |             |              |
|----------|----------|------------|------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| $3 + 3$  | $5 + 1$  | $7 + (-1)$ | $9 + (-3)$ | $11 + (-5)$ | $13 + (-7)$ | $15 + (-9)$ | $17 + (-11)$ |
| $3 + 5$  | $5 + 3$  | $7 + 1$    | $9 + (-1)$ | $11 + (-3)$ | $13 + (-5)$ | $15 + (-7)$ | $17 + (-9)$  |
| $3 + 7$  | $5 + 5$  | $7 + 3$    | $9 + 1$    | $11 + (-1)$ | $13 + (-3)$ | $15 + (-5)$ | $17 + (-7)$  |
| $3 + 9$  | $5 + 7$  | $7 + 5$    | $9 + 3$    | $11 + 1$    | $13 + (-1)$ | $15 + (-3)$ | $17 + (-5)$  |
| $3 + 11$ | $5 + 9$  | $7 + 7$    | $9 + 5$    | $11 + 3$    | $13 + 1$    | $15 + (-1)$ | $17 + (-3)$  |
| $3 + 13$ | $5 + 11$ | $7 + 9$    | $9 + 7$    | $11 + 5$    | $13 + 3$    | $15 + 1$    | $17 + (-1)$  |
| $3 + 15$ | $5 + 13$ | $7 + 11$   | $9 + 9$    | $11 + 7$    | $13 + 5$    | $15 + 3$    | $17 + 1$     |
| $3 + 17$ | $5 + 15$ | $7 + 13$   | $9 + 11$   | $11 + 9$    | $13 + 7$    | $15 + 5$    | $17 + 3$     |
| $3 + 19$ | $5 + 17$ | $7 + 15$   | $9 + 13$   | $11 + 11$   | $13 + 9$    | $15 + 7$    | $17 + 5$     |
| $3 + 21$ | $5 + 19$ | $7 + 17$   | $9 + 15$   | $11 + 13$   | $13 + 11$   | $15 + 9$    | $17 + 7$     |

## 1. La loi du treillis

On note

$$P(r) = \begin{cases} 1, & r \text{ premier,} \\ 0, & r \text{ sinon.} \end{cases}$$

À chaque couple  $(x, y)$  on associe

$$L(x, y) = (P(x), P(y)) \in \{0, 1\}^2,$$

identifié aux quatre lettres  $a, b, c, d$ .

La loi du treillis est

$$(u, v) \star (x, y) = (u, y).$$

Le produit conserve la première coordonnée du premier couple et la seconde coordonnée du second. Les deux coordonnées intermédiaires sont oubliées. La loi est partout définie : aucune égalité entre les coordonnées centrales n'est requise.

Dans le trimino entouré dans le dessin :

$$(5, 7) \star (3, 9) = (5, 9),$$

bien que  $7 \neq 3$ .

## 2. Le trimino et les deux produits

Prenons

$$A = L(x, y), \quad B = L(x + 2, y - 2),$$

avec

$$x + y = (x + 2) + (y - 2) = n.$$

Alors

$$A \star B = L(x, y - 2), \quad B \star A = L(x + 2, y).$$

Les deux produits sont donc les deux coins croisés du trimino :

$$L(x, y) \star L(x + 2, y - 2) = L(x, y - 2),$$

$$L(x + 2, y - 2) \star L(x, y) = L(x + 2, y).$$

Les quatre couples ont pour sommes

$$n, \quad n, \quad n - 2, \quad n + 2.$$

La loi locale relie donc les trois niveaux  $n - 2, n, n + 2$ .

## 3. Non-commutativité

On a

$$A \star B = (P(x), P(y - 2)), \quad B \star A = (P(x + 2), P(y)).$$

Par conséquent

$$A \star B \neq B \star A$$

si et seulement si

$$\boxed{P(x) \neq P(x+2) \quad \text{et} \quad P(y-2) \neq P(y).}$$

La non-commutativité locale correspond donc exactement à la présence simultanée de deux transitions prime/composé séparées de 2.

Pour une borne  $X$ , posons

$$\mathcal{T}_X = \{r \leq X - 2 : r \text{ impair et } P(r) \neq P(r+2)\}.$$

Un couple de transitions distinctes fournit alors un cas de non-commutativité, soit

$$\binom{|\mathcal{T}_X|}{2}$$

cas.

Pour  $X = 100$  :

$$\mathcal{T}_{100} = \{7, 9, 13, 15, 19, 21, 23, 27, 31, 35, 37, 39, 43, 45, 47, 51, 53, 57, 61, 65, 67, 69, 73, 77, 79, 81, 83, 87, 89, 95, 97\}.$$

Donc

$$|\mathcal{T}_{100}| = 31, \quad \binom{31}{2} = 465.$$

Le nombre 31 est seulement le résultat de ce comptage jusqu'à 100 : il ne définit aucune structure supplémentaire du pavage.

## 4. Couleurs des produits inversés

Lorsque les deux transitions sont présentes,

$$P(x+2) = 1 - P(x), \quad P(y) = 1 - P(y-2).$$

Ainsi

$$B \star A = (1 - P(x), 1 - P(y-2)),$$

qui est la couleur complémentaire de  $A \star B$ .

Les deux produits inversés appartiennent donc à l'une des paires

$$(a, d), \quad (d, a), \quad (b, c), \quad (c, b).$$

## 5. Attention à la notion de groupoïde

Il faut distinguer la loi du pavage d'une composition de flèches de groupoïde.

La loi du pavage est partout définie :

$$(x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1, y_2).$$

Dans le groupoïde de paires classique, en revanche,

$$(x, y) \circ (y, z) = (x, z)$$

suppose que les deux coordonnées centrales coïncident.

Cette condition n'appartient absolument pas à la loi du pavage.

Il serait donc incorrect de l'introduire artificiellement.

La vraie question de recherche est plutôt :

Peut-on enrichir naturellement le treillis d'une structure de groupoïde sans modifier sa loi ?

Autrement dit, il faudrait éventuellement trouver des notions de source, de but ou d'état provenant de la géométrie arithmétique du treillis, mais sans remplacer

$$(u, v) \star (x, y) = (u, y)$$

par une loi de composition différente.

## 6. Point de départ pour la suite

Le fait structurel à conserver est

la non-commutativité vient du croisement des deux coordonnées.

L'exemple concret est

$$(5, 7) \star (3, 9) = (5, 9),$$

tandis que

$$(3, 9) \star (5, 7) = (3, 7).$$

Les deux produits sont les deux coins croisés du trimino.