

Non-commutativité dans un pavage de triminos utilisé pour modéliser les décompositions de Goldbach des nombres pairs
Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, septembre 2026

$3+3$	$5+1$	$7+(-1)$	$9+(-3)$	$11+(-5)$	$13+(-7)$	$15+(-9)$	$17+(-11)$
$3+5$	$5+3$	$7+1$	$9+(-1)$	$11+(-3)$	$13+(-5)$	$15+(-7)$	$17+(-9)$
$3+7$	$5+5$	$7+3$	$9+1$	$11+(-1)$	$13+(-3)$	$15+(-5)$	$17+(-7)$
$3+9$	$5+7$	$7+5$	$9+3$	$11+1$	$13+(-1)$	$15+(-3)$	$17+(-5)$
$3+11$	$5+9$	$7+7$	$9+5$	$11+3$	$13+1$	$15+(-1)$	$17+(-3)$
$3+13$	$5+11$	$7+9$	$9+7$	$11+5$	$13+3$	$15+1$	$17+(-1)$
$3+15$	$5+13$	$7+11$	$9+9$	$11+7$	$13+5$	$15+3$	$17+1$
$3+17$	$5+15$	$7+13$	$9+11$	$11+9$	$13+7$	$15+5$	$17+3$
$3+19$	$5+17$	$7+15$	$9+13$	$11+11$	$13+9$	$15+7$	$17+5$
$3+21$	$5+19$	$7+17$	$9+15$	$11+13$	$13+11$	$15+9$	$17+7$

1. Le codage par quatre lettres

Pour un entier impair r , posons

$$P(r) = \begin{cases} 1, & r \text{ premier,} \\ 0, & r \text{ composé.} \end{cases}$$

À une case du treillis correspondant au couple (x, y) nous associons

$$L(x, y) = (P(x), P(y)).$$

On identifie

$$a = (1, 1), \quad b = (1, 0), \quad c = (0, 1), \quad d = (0, 0).$$

La loi des seize règles est

$$(u, v) \star (x, y) = (u, y).$$

Elle donne

$\star$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

et, pour toute suite,

$$z_1 \star z_2 \star \cdots \star z_k = (\text{première coordonnée de } z_1, \text{seconde coordonnée de } z_k).$$

2. Le trimino orienté

On considère le triangle sous la diagonale, après rotation d'un quart de tour vers la gauche, comme dans le treillis étudié.

Pour x, y impairs avec $x + 4 \leq y$, posons

$$A = L(x, y), \quad B = L(x + 2, y - 2).$$

Alors

$$A = (P(x), P(y)), \quad B = (P(x + 2), P(y - 2)).$$

Les deux compositions donnent les deux coins croisés :

$$A \star B = (P(x), P(y - 2))$$

et

$$B \star A = (P(x + 2), P(y)).$$

Ainsi la différence entre les deux ordres est

$$A \star B \neq B \star A$$

si et seulement si

$$P(x) \neq P(x + 2) \quad \text{et} \quad P(y - 2) \neq P(y).$$

Théorème 1 (Critère exact de non-commutativité). *Le trimino (A, B) est non commutatif si et seulement si les deux extrémités arithmétiques x et $y - 2$ sont des points de transition de la suite de primalité :*

$$P(x) \neq P(x + 2) \quad \text{et} \quad P(y - 2) \neq P(y).$$

Démonstration. On a

$$A \star B = (P(x), P(y - 2))$$

et

$$B \star A = (P(x + 2), P(y)).$$

Les deux couples sont différents exactement lorsque leurs deux coordonnées correspondantes sont différentes, ce qui donne les deux inégalités annoncées. $\square$

3. Le lieu de non-commutativité est gouverné par les transitions premier/composé

Définissons l'ensemble des transitions jusqu'à X par

$$\mathcal{T}_X = \{r \leq X - 2 : r \text{ impair}, P(r) \neq P(r + 2)\}.$$

Chaque $r \in \mathcal{T}_X$ est donc une frontière entre deux états successifs de la suite

$$P(3), P(5), P(7), P(9), \dots$$

Si $r, s \in \mathcal{T}_X$ avec $r < s$, le choix

$$x = r, \quad y = s + 2$$

produit un trimino non commutatif.

Réciproquement, tout trimino non commutatif de la forme considérée provient ainsi d'un unique couple

$$(r, s) \in \mathcal{T}_X^2, \quad r < s.$$

Théorème 2 (Paramétrisation du lieu non commutatif). *Si*

$$k_X = |\mathcal{T}_X|,$$

alors le nombre de triminos non commutatifs dans le triangle considéré est exactement

$$\boxed{\binom{k_X}{2}}.$$

Démonstration. Le critère précédent impose que x et $y - 2$ appartiennent à $\mathcal{T}_X$. La condition $x + 4 \leq y$ équivaut à $x < y - 2$. Il y a donc exactement un trimino pour chaque paire

$$x < y - 2$$

de points distincts de $\mathcal{T}_X$, soit $\binom{k_X}{2}$ paires. □

4. Calcul exact jusqu'à 100

Pour $X = 100$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{100} = \{ & 7, 9, 13, 15, 19, 21, 23, 27, 31, 35, 37, 39, 43, 45, 47, \\ & 51, 53, 57, 61, 65, 67, 69, 73, 77, 79, 81, 83, 87, 89, 95, 97 \}. \end{aligned}$$

Il y a donc

$$\boxed{k_{100} = 31}$$

points de transition.

Par conséquent,

$$N_{\text{nc}}(100) = \binom{31}{2} = 465.$$

Les transitions se répartissent en

$$16 \text{ de type } 1 \rightarrow 0$$

et

$$15 \text{ de type } 0 \rightarrow 1.$$

Le nombre 465 n'est donc pas un phénomène accidentel du dessin : il est imposé par la structure combinatoire du lieu des transitions.

5. Les quatre résultats possibles

Si $r = x$ et $s = y - 2$ sont deux transitions, alors

$$P(x + 2) = 1 - P(x), \quad P(y) = 1 - P(y - 2).$$

Par conséquent

$$A \star B = (P(x), P(y - 2))$$

et

$$B \star A = (1 - P(x), 1 - P(y - 2)).$$

Les deux résultats sont donc toujours complémentaires :

$$\boxed{B \star A = \overline{A \star B}}.$$

Il y a ainsi seulement quatre possibilités :

$$(a, d), \quad (d, a), \quad (b, c), \quad (c, b).$$

Pour $X = 100$, le calcul donne exactement

$(A \star B, B \star A)$	nombre
(b, c)	120
(c, b)	120
(a, d)	120
(d, a)	105

La non-commutativité n'est donc pas seulement "présente" : elle possède une organisation combinatoire très régulière.

6. Une image nouvelle : un graphe complet des transitions

Le résultat précédent suggère de remplacer le langage des quatre lettres par un objet plus petit.

Prenons les points de transition comme sommets :

$$\mathcal{T}_X = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_{k_X}\}.$$

À chaque paire

$$t_i < t_j$$

associons le trimino non commutatif correspondant

$$x = t_i, \quad y = t_j + 2.$$

Le lieu non commutatif est alors naturellement indexé par les arêtes du graphe complet

$$K_{k_X}.$$

Pour $X = 100$, on obtient donc

$$\boxed{K_{31}}$$

et ses

$$\binom{31}{2} = 465$$

arêtes.

Ce graphe n'est pas encore un groupoïde : la loi $\star$ n'impose pas de condition de source et de but permettant de composer seulement les flèches compatibles. Mais il fournit un candidat naturel pour chercher une structure de groupoïde : les transitions de primalité deviennent les objets, et les couples de transitions deviennent les morphismes potentiels.

7. Pourquoi cette piste est différente de la structure simple de bande rectangulaire

La table

$$(u, v) \star (x, y) = (u, y)$$

prise isolément ne contient aucune information arithmétique : elle est une bande rectangulaire.

En revanche, son implantation dans le treillis fait intervenir la suite

$$P(3), P(5), P(7), \dots$$

et, plus précisément, ses changements d'état

$$P(r) \neq P(r + 2).$$

La non-commutativité sélectionne alors exactement les couples de ces changements d'état.

On a donc la chaîne de dépendances

$$\boxed{\text{primalité} \longrightarrow \text{transitions} \longrightarrow \text{couples de transitions} \longrightarrow \text{lieu non commutatif.}}$$

C'est une information qui n'apparaît pas dans la table abstraite des seize règles.

8. Première piste vers un groupoïde

La structure obtenue rappelle un groupoïde de paires, mais il faut être précis.

Le groupoïde de paires sur un ensemble S possède une flèche

$$(r, s) : r \longrightarrow s$$

pour chaque couple ordonné (r, s) , avec composition

$$(r, s)(s, t) = (r, t).$$

Notre opération

$$(u, v) \star (x, y) = (u, y)$$

a exactement la même forme formelle : elle conserve l'extrémité gauche du premier objet et l'extrémité droite du second.

La différence essentielle est que, dans une bande rectangulaire, aucune condition

“extrémité droite du premier = extrémité gauche du second”

n'est imposée. Dans le triangle des décompositions non plus, voir notamment le trimino que j'ai entouré en vert en introduction à ce texte, aucune condition n'est imposée pour les valeurs “internes” des deux couples de nombres impairs.

La question pertinente devient donc :

Peut-on extraire du treillis une relation de compatibilité qui impose précisément cette condition ?

Si oui, le rectangular band pourrait ne plus être considéré comme l'objet final, mais comme la version “sans condition de raccordement” d'un véritable groupoïde de transitions.

C'est cette question qu'il paraît maintenant naturel d'étudier avant de construire une C^* -algèbre.

9. Limite du résultat

Le calcul jusqu'à 100 ne donne pas une preuve de la conjecture de Goldbach.

Il donne cependant un objet arithmétique nouveau et exactement calculable : le lieu de non-commutativité du pavage est déterminé par les transitions de la suite de primalité et, jusqu'à 100, il est isomorphe combinatoirement au graphe complet K_{31} .

La prochaine question n'est donc plus simplement

“la loi est-elle non commutative ?”

mais

“quelle structure porte le graphe des transitions de primalité lorsqu'il est plongé dans le triangle de Goldbach ?”