# Le rôle des mathématiques

John von Neumann

Je devrais vraiment parler des développements probables des mathématiques dans un futur pas trop lointain. Lors de la présentation du document précédent, j'ai beaucoup admiré et envié le professeur Spitzer qui, dans son domaine, pouvait le faire ; il pouvait parler des développements probables en astronomie à un public scientifique et universitaire général, sans trop entrer dans les détails, qui sont d'un fort attrait pour les astronomes, mais non pour le grand public. En astronomie, c'est possible.

En mathématiques, c'est très difficile. Si l'on commence à parler de la substancielle matière des mathématiques, tout particulièrement lorsqu'on spécule sur l'avenir, on pénètre très rapidement dans des sujets qui évoqueront quelque chose seulement chez les mathématiciens.

Je vais donc m'orienter différemment et parler du rôle des mathématiques dans la vie intellectuelle et dans la société.

Dès le début, il faut répondre à une question qui se pose réellement dans toutes les branches de la science et dans toutes les branches de l'érudition. Cependant, en mathématiques, vous faites face à cette question sous une forme particulièrement définie et extrême. C'est la question de l'utilité des mathématiques ; et de l'utilité de cette utilité ; de l'importance de cette utilité ; la science mathématique doit-elle être poursuivie en soi ou doit-elle être poursuivie selon son utilité pour la société. Beaucoup peut être dit à ce sujet. je pense que le mieux que l'on puisse faire à cet égard en dix minutes est de souligner à quel point il est difficile, et combien il est dangereux, de porter des jugements trop rapides à ce sujet.

Permettez-moi de vous citer une épigramme du poète allemand Schiller. Il décrit une conversation fictive entre Archimède et un disciple. Le disciple exprime au Maître son admiration pour la science et veut être initié à “cette science divine qui vient de sauver l'État”, c'est-à-dire ces techniques qui ont aidé pendant le siège de Syracuse par les Romains. Je veux dire que les mathématiques ont aidé les habitants de Syracuse lors d'un siège par l'armée romaine.

---

Dr. John A. von Neumann est Professeur de Mathématiques, à l'Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey.

Cet article est la traduction de l'article page 640 du Compendium consacré aux travaux de John von Neumann.
Réimpression des Œuvres de John von Neumann, ed. A. Taub, Vol. VI, p. 477-490.

Archimède fait alors un discours quelque peu étouffant dans lequel il souligne auprès de l'admirateur que la science *est* divine, mais qu'elle était divine *avant* d'aider l'État ; et qu'elle est divine, qu'elle ait ou non aidé l'État.

Maintenant, cette position est assez importante et pertinente. La science n'est probablement pas un iota plus divine parce qu'elle a aidé l'État ou la société. Cependant, si l'on souscrit à cette position, on devrait en même temps envisager la double proposition, que si la science n'est pas un iota plus divine sous prétexte qu'elle est utile à la société, peut-être qu'elle n'est pas un iota moins divine si elle lui nuit. La question n'est pas du tout triviale. Un dernier point à considérer dans cette conférence est aussi que la science n'est pas un iota moins divine, bien qu'elle n'ait absolument pas sauvé l'État, parce que Syracuse a en fait été prise par les Romains peu de temps après.

Je parlerai donc de cette question de l'utilité malgré toutes les difficultés d'évaluation dans ce contexte, de l'importance de son utilité dans la vie de tous les jours, de son utilité pour la société, sans discuter de la place des mathématiques dans la société et des effets qu'elles ont sur nous en général ; et tout particulièrement, des effets qu'elles peuvent avoir en dehors du groupe des professionnels.

Il est également très intéressant de considérer ses effets au sein du groupe des professionnels. Ces effets au sein du groupe de professionnels sont très différents de ceux qu'on pourrait penser. En ce qui concerne les effets généraux et externes, il est parfaitement clair que les mathématiques fournissent quelque chose de très important, à savoir qu'elles établissent certaines normes d'objectivité, certaines normes de vérité ; et cela est assez important qu'elles semblent donner un moyen d'établir ces normes plutôt indépendamment de tout le reste, plutôt indépendamment des émotions, plutôt indépendamment des questions morales. Il est très important de réaliser cela : des critères objectifs de vérité sont possibles, un tel but n'est pas contradictoire, n'est pas inhumain en un certain sens. Cette perspicacité n'est ni évidente ni particulièrement ancienne ; et ce prestige ou la logique per se, cette science per se, sont probablement liés au rôle de la science dans nos vies, et au rôle des mathématiques, dans leur forme la plus abstraite, dans la science.

Encore une fois, la vérité intrinsèque de ces propositions peut même être débattue, mais il est tout à fait important que ces propositions puissent être faites, que l'on puisse avoir une image précise et détaillée de leur contenu. C'est possible, car on peut former, avec l'aide des mathématiques, une image de ce à quoi un tel système devrait ressembler.

En d'autres termes, indépendamment de la question de savoir si ces normes objectives de vérité données par les mathématiques sont réellement objectives, et que ces normes soient ou non réellement vraies, on peut donner beaucoup plus de sens à ce sujet *après* avoir expérimenté directement et *in vivo* ce à quoi ressemblerait un tel système s'il existait.

Il existe un certain nombre d'exemples mathématiques auxquels nous pouvons nous référer à cet effet. Comment concrétiser ces références ? Et également : Même si l'implémentation n'est pas immédiatement couronnée de succès, quel système d'idées les mathématiques sont-elles dans lequel des propositions si extrêmes sont valables ?

On peut en dire beaucoup plus sur ce sujet et sur ce rôle des mathématiques pour établir la possibilité de normes objectives. Permettez-moi de dire tout de suite quelles sont les objections à cela. L'objection selon laquelle, même si des normes absolues pouvaient être établies par les mathématiques, elles ne pourraient pas avoir une validité absolue pour le monde entier, cela a été abondamment discuté ; et je ne pense pas que je puisse vous dire beaucoup de nouvelles choses à propos de ça. Je pense que nous avons tous été confrontés à ce problème, et nous avons tous différentes méthodes pour le gérer, que nous en soyons satisfaits ou non. Je tiens à souligner, cependant, et il s'agit d'une question plus technique, que les propositions sous-jacentes de savoir si les normes de mathématiques sont vraiment objectives, peuvent également être mises en doute. En d'autres termes, il *n'est pas* nécessairement vrai que la méthode mathématique est quelque chose d'absolu, qui est révélé d'en haut, ou qui d'une manière ou d'une autre, une fois qu'il nous est révélé, était nécessairement juste et est resté bien évident depuis lors. Pour être plus précis, c'était peut-être évident juste après que ça ait été révélé, mais ça n'est certainement pas resté évident depuis, il y a eu de très sérieuses fluctuations dans l'opinion professionnelle des mathématiciens sur ce qu'est la rigueur mathématique. Pour mentionner une chose mineure : dans ma propre expérience, qui ne s'étend que sur une trentaine d'années, cette idée a fluctué si souvent que ma conviction personnelle et sincère de ce qu'est la rigueur mathématique a changé au moins deux fois. Et cela en si peu de temps de vie d'un seul individu ! Si vous prenez toute la période, disons depuis le début du XVIIIᵉ siècle, il y a eu des fluctuations encore plus sérieuses quant à ce qui constitue une preuve mathématique stricte.

Les grands analystes de la fin du XVIIIᵉ siècle acceptaient comme preuves mathématiques des choses que nous n'accepterions absolument pas comme telles. C'est vrai qu'ils les ont acceptées avec un certain sentiment de culpabilité ; mais dans de nombreux cas, le sentiment de culpabilité n'était pas trop évident. Il est aussi certainement vrai qu'au XIXᵉ siècle, il y avait des désaccords de bonne foi sur la question de savoir si une preuve donnée par un très grand mathématicien, Riemann, était vraiment une preuve ou non.

D'après ma propre expérience, à deux autres reprises au début du XXᵉ siècle, des discussions de fond très sérieuses sur ce que sont les principes fondamentaux des mathématiques ont eu lieu quant à savoir si un grand chapitre des mathématiques est vraiment logiquement cohérent ou non. Et dans les années dix et vingt, une critique de ces questions a fait comprendre qu'il n'était pas du tout clair de savoir exactement ce que l'on entend par rigueur, et plus particulièrement, s'il faut se limiter à n'utiliser que les parties de mathématiques que personne n'a remises en question. Ainsi, assez remarquablement, dans une grande fraction des mathématiques, il existait en fait des divergences d'opinion ! Quelques mathématiciens ont dit qu'il n'était pas nécessaire de remettre en question une partie de ce qui est effectivement utilisé. Il y avait aussi un ensemble d'opinions, selon lequel on ne devrait pas utiliser davantage de concepts que ceux que le plus exigeant des critiques avait approuvés. Pourtant il y a eu un groupe important de mathématiciens qui a estimé que, même s'il y avait lieu de remettre en question certains domaines des mathématiques, il était bon de les utiliser. Ce groupe était tout à fait prêt à accepter quelque chose comme ceci : ces portions de mathématiques qui avaient été interrogées et qui avaient été clairement utiles, en particulier pour l'usage interne de la communauté - en d'autres termes, quand de très belles théories pouvaient être obtenues dans ces domaines - que les théories étaient après tous au moins aussi solides et probablement un peu plus solides même que les constructions de la physique théorique. Et après tout, la physique théorique allait bien ; alors pourquoi pas de tels domaines, qui avaient peut-être même servi à la physique théorique, même si ils ne correspondaient pas à 100 pour cent à l'idée que l'on avait de la rigueur mathématique, pourquoi ne seraient-ils pas des domaines légitimes en mathématiques ; et pourquoi les idées en question ne devraient-elles pas être poursuivies ? Cela peut sembler étrange, comme une dégradation des normes, mais cela a été cru par un grand groupe des gens pour qui j'ai de la sympathie, car je suis l'un d'eux.

Je ne veux pas entrer dans les détails de cette critique ; elle est liée à la très difficile question épistémologique de savoir s'il est légitime de discuter de collections d'entités dont le nombre n'est pas fini ; ou, si vous avez affaire à un collectif de concepts mathématiques qui est en nombre infini, que signifie exactement de faire une déclaration universelle à leur sujet, qu'est-ce que cela signifie exactement de dire que vous savez que quelque chose est possible au sujet d'une telle collection d'entités en nombre infini. Cela signifie-t-il que vous avez un exemple concret ? Ou bien est-ce que cela signifie que vous avez des méthodes pour montrer qu'un exemple existe ? En fait, existe-t-il un moyen d'établir l'existence d'un exemple sans le construire explicitement ? L'une des grandes surprises pour nous tous a été qu'il s'est avéré que les méthodes mathématiques généralement acceptées étaient en fait constituées d'un certain nombre d'astuces par lesquelles vous pourriez démontrer l'existence d'un exemple sans le construire. Il n'est pas facile d'imaginer comment cela peut se produire. Mais en fait, cela arrivait, et c'est une pratique mathématique normale.

Je voudrais donc dire qu'il y a ici des questions très difficiles et délicates, et on ne peut pas échapper à la conclusion selon laquelle, dans une certaine mesure, elles ressemblent à celles des fondements de la physique ; que l'on peut avoir un sentiment de plausibilité qui est assez commode, et qu'il n'est pas question d'une absolue fiabilité super-humaine qui est censée être l'un des attributs des mathématiques.

Il y a donc là un certain doute ; et pour évaluer le caractère et le rôle des mathématiques, il ne faut pas oublier que le doute existe.

Permettez-moi maintenant de parler plus en détail des fonctions des mathématiques dans notre réflexion. Il est courant que les mathématiques soient une excellente école de pensée, qu'elles vous amènent à la pensée logique, qu'après les avoir exercées, vous puissiez penser plus valablement qu'autrement. Je ne sais pas si toutes ces déclarations sont vraies, la première est probablement la moins douteuse. Cependant, je pense que cela a une très grande importance de penser à un domaine qui n'est pas si précis. Je pense que l'une des plus importantes contributions des mathématiques à notre réflexion est qu'elles ont montré une grande flexibilité dans la formation des concepts, à un degré de flexibilité qu'il est très difficile d'atteindre dans le mode de la pensée non-mathématique. On trouve parfois des situations un peu similaires en philosophie ; mais ces domaines de la philosophie emportent généralement beaucoup moins d'adhésion.

Cette grande flexibilité, à laquelle je fais allusion, implique des choses telles que celles-ci : dans la terminologie habituelle, on considère un problème, qui a beaucoup préoccupé les philosophes tel que les lois qui régissent ce domaine sont de la nature suivante : chaque événement détermine directement l'événement qui le suit immédiatement. Ceci est l'approche causale. Alternativement, ces lois peuvent être téléologiques, ce qui signifie qu'un seul événement ne détermine pas l'événement suivant, mais qu'en quelque sorte, l'ensemble du processus doit être considéré comme une unité subordonnée à une loi générale, de sorte que le tout doit être pris comme un tout. Si je dis que cela a assailli les philosophes, je minimise. Cela a joué un très grand rôle et joue toujours un très grand rôle, par exemple en biologie.

Eh bien, je ne dis pas que c'est une mauvaise question, ou une question vide de sens, mais c'est une excellente question à traiter plus subtilement, en tout cas, qu'il n'y paraît ; parce qu'une bonne dose d'expérience mathématique montre qu'à moins d'être extrêmement prudent, la question n'a pas de sens.

L'exemple classique, l'exemple exceptionnel de cela, qui, je pense, mérite beaucoup plus d'appréciation que le cas général, se situe dans un domaine entre la physique théorique et les mathématiques, mais ce sont vraiment des mathématiques, à savoir le traitement mathématique de la mécanique classique. La mécanique classique fait bien sûr partie de la physique théorique ; mais une fois que vous êtes d'accord sur les principes de la mécanique, il reste la partie purement mathématique qui consiste à exprimer ces principes dans la terminologie mathématique et à rechercher mathématiquement comment trouver des solutions, combien il y en a, etc., et aussi, comment on peut énoncer le même principe de fond sous diverses formes mathématiques, toutes équivalentes les unes aux autres, car elles énoncent la même chose, mais qui peuvent formellement sembler très différentes et donnent donc des approches techniques complètement différentes pour résoudre le problème. Ce sont alors, de manière générale, différents aspects par lesquels on peut comprendre le problème.

Maintenant, l'un des faits les plus simples sur la mécanique est qu'elle peut être exprimée par quiconque sous plusieurs formes mathématiques équivalentes. L'une d'elle est la forme newtonienne où l'état du système n'est pas seulement la position de chacune de ses parties, mais aussi la vitesse de chacune de ses parties à un instant. L'état ainsi défini détermine alors de manière unique l'accélération, et donc ensuite la position et la vitesse à l'instant suivant. Par répétition, cela peut être utilisé pour dériver l'état du système à tout instant futur, et en fait aussi à tout instant passé. En d'autres termes, c'est strictement causal ; si vous connaissez le système maintenant, cela le détermine immédiatement après, et par répétition aussi pour tous les instants futurs.

Une deuxième formulation de la mécanique utilise le principe de l'effet minimum, que je ne décrirai pas mathématiquement mais qui dit ceci : si vous considérez l'histoire complète d'un système (par système, je veux dire toute entité mécanique, donc ça peut être une planète flottant dans l'espace, simplifiée jusqu'à être considérée comme un point ; ou un système d'une planète et d'un corps central ; ou quelque chose de la complexité de tout le système solaire ; ou de la complexité d'une locomotive ; ou toute autre chose que vous choisissez), si vous considérez son histoire complète entre deux moments (ça peut être de maintenant à dans cinq minutes, ou il y a entre trois milliards d'années et maintenant ou toute autre combinaison de moments) alors l'histoire complète vous permet de calculer certaines choses, et en particulier l'intégrale de l'énergie fois le temps. Et l'histoire réelle est celle qui rend cette quantité la plus petite possible. Il s'agit d'un principe clairement *téléologique*. En effet, ici l'histoire n'est pas déterminée par quelque chose qui se passe à un moment donné, mais vous devez considérer la totalité de l'histoire pour minimiser cette valeur numérique particulière d'une intégrale étendue sur toute l'histoire.

La première approche est strictement causale et fonctionne d'un point à un autre dans le temps. La deuxième est strictement téléologique, et ne définit que l'histoire totale en vertu de certaines propriétés optimales, et non pas selon une partie de celui-ci. Pourtant, les deux sont strictement équivalentes ; l'histoire réelle pour les mouvements que vous dérivez dans un cas est précisément ce que vous trouvez dans l'autre cas ; et la question de savoir si la mécanique est causale ou téléologique (qui, en tout autre domaine serait considérée comme une question de fond importante appelant une réponse oui ou non) est un non-sens manifeste en mécanique, car il dépend uniquement de la manière dont vous choisissez d'écrire les équations. Je n'essaie pas d'être facétieux quant à l'importance de garder à l'esprit les principes téléologiques lorsqu'il s'agit de biologie ; mais je pense que l'on n'a pas commencé à comprendre le problème de leur rôle dans la biologie, jusqu'à ce qu'on se rende compte qu'en mécanique, si vous êtes juste un peu intelligent mathématiquement, votre problème disparaît et perd tout son sens. Et qu'il est parfaitement possible que si l'on comprenait un autre domaine, la même chose pourrait se produire.

C'est une idée qui n'aurait probablement jamais été obtenue sans la ruse mathématique de transformation des équations de la mécanique ; c'étaient purement des compétences mathématiques et les caractéristiques de flexibilité de la formulation mathématique et de sa reformulation, qui ont produit cette idée. Ce n'est pas de la pensée pure à un quelconque niveau abstrait, mais c'est une procédure spécifiquement mathématique.

Une autre chose que je voudrais mentionner dans ce contexte, c'est la chose suivante (je vais à nouveau mélanger la physique théorique avec les mathématiques, de la même manière que précédemment. L'exemple appartient à la physique théorique, mais le traitement technique qui produit les résultats auxquels je fais référence consiste vraiment en un certain nombre de manipulations mathématiques. Il a donc quelque chose à voir avec le rôle des mathématiques dans la compréhension, et non avec le rôle de la théorie physique dans la perspicacité, ce dernier étant assez important, mais différent du premier). Une déclaration qui est fréquemment et librement faite, en particulier avant que la matière n'ait été aussi bien analysée qu'elle ne l'est aujourd'hui, c'est qu'il y a un certain contraste entre les choses qui sont soumises à un traitement mathématique strict, et celles qui sont laissées au hasard.

Ceci est une déclaration plausible, et c'était très plausible, il y a environ 200 ans, à un moment où la théorie des probabilités a été découverte, ce qui a permis un strict traitement mathématique d'événements indéterminés et fortuits. Et encore faut-il un traitement mathématique pour réaliser que si un événement n'est pas déterminé par des lois strictes, mais laissé au hasard, jusqu'à ce que vous ayez clairement indiqué ce que vous entendez par là (et peut être clairement énoncé), il se prête tout autant à un traitement quantitatif moyen que s'il était rigoureusement défini. Bien sûr, ce qu'un traitement quantitatif vous dira ne sera pas ce qui se passera, car cela n'est pas censé être possible dans ce cas particulier, mais cela vous dira, par exemple, que si vous l'essayez un million de fois, vous obtiendrez probablement un résultat positif. Et cela vous dira aussi avec quelle précision cette probabilité sera renforcée si vous augmentez le nombre d'essais. De plus, quelles combinaisons des éventualités sont celles que vous pouvez ignorer, qui sont absurdes, malgré l'incertitude des lois générales.

La théorie des probabilités en fournit un exemple, mais encore plus frappant. Cet exemple, c'est la forme moderne de la mécanique quantique. Il s'avère que les processus impliquant des particules élémentaires, des atomes ou des particules subatomiques, en dépit de tout ce qui était connu auparavant, ne sont apparemment pas soumis à des lois comme celles de la mécanique, et certainement pas, parce que les lois de la mécanique dans leur forme causale vous disent que si vous connaissez l'état du système à un instant, vous pouvez dire exactement son état peu de temps après, et en répétant cela, vous pouvez dire à quoi il ressemblera à tout moment après. Il s'avère que pour les processus élémentaires, il ne semble pas qu'il en soit ainsi. La meilleure description que l'on peut donner aujourd'hui, qui peut ne pas être l'ultime description (cette ultime description pouvant même revenir à la forme causale, bien que la plupart des physiciens ne pensent pas que cela soit probable) mais en tout cas le mieux que l'on puisse dire aujourd'hui, c'est que vous n'avez pas une détermination complète, et que l'état du système ne détermine plus du tout ce qu'il sera immédiatement après ou plus tard. Bien sûr, un état peut maintenant être incompatible avec certaines autres hypothèses sur ce qu'il en sera du système une heure plus tard ; ou certains d'entre eux peuvent être extrêmement improbables. Mais il restera encore de nombreuses possibilités ; et on pourrait penser que c'est une idée qui ne se prête pas à une description par des moyens mathématiques précis.

Le fait est que cela a été découvert par la méthode de la physique théorique, et que cela a été depuis cristallisé, rendu précis, par des moyens mathématiques. En fait, des théories mathématiques très sophistiquées devaient être appliquées ; et les choses les plus particulières sont apparues.

Par exemple : un système, comme celui dont il est question ici, n'est pas causalement prévisible. Vous ne pouvez pas calculer à partir de son état actuel son état au moment suivant. Il y a cependant quelque chose d'autre qui est causalement prévisible, à savoir la fonction dite fonction d'onde.

L'évolution de la fonction d'onde peut être calculée d'un instant à l'autre, mais l'effet de la fonction d'onde sur la réalité observée n'est qu'une probabilité. Le fait qu'une combinaison puisse être élaborée, qu'elle puisse déchiffrer l'expérience, et même dériver de l'expérience, est quelque chose qui, encore une fois, aurait été complètement impossible si la méthode mathématique n'avait pas existé. Et à nouveau, une énorme contribution de la méthode mathématique à l'évolution de notre pensée réelle est qu'elle a rendu ces cycles logiques possibles, et qu'elle les a rendus très spécifiques. Cette méthode a permis de faire ces choses en toute fiabilité et dans une parfaite "douceur" (facilité) technique.

Une autre chose, que nous ne connaissons pas aujourd'hui autant que nous le souhaiterions, mais que nous connaissons bien, est qu'il aurait été tout à fait raisonnable de s'attendre à un cercle vicieux quand on essaie d'analyser le substrat qui produit la science, la fonction de l'intelligence humaine. L'ensemble des preuves de l'exploration dans ce domaine est que le système qui se produit dans la performance intellectuelle, en d'autres termes dans le système nerveux humain, peut être étudié avec des méthodes physiques et mathématiques. Il y a encore probablement une sorte de contradiction dans l'idée que tout le monde a qu'à un moment, un individu doit être complètement informé de l'état de son appareil nerveux à ce moment-là. Les chances sont que les limites absolues qui existent ici peuvent également être exprimées en termes mathématiques, et uniquement en termes techniques mathématiques.

Nous avons déjà vu des phénomènes de ce type. La physique théorique a déjà indiqué deux domaines du monde physique où existent des limites absolues à la connaissance. L'une est la relativité et l'autre est la théorie quantique. Ici, par les meilleures descriptions que nous pouvons donner aujourd'hui, il y a des limites absolues à ce qui est connaissable. Cependant, ces limites peuvent être exprimées très précisément mathématiquement, par des concepts qui seraient très déroutants si on tentait de les exprimer par tout autre moyen. Ainsi, tant en relativité qu'en mécanique quantique, il existera toujours des choses qui ne peuvent pas être connues ; mais vous avez une latitude considérable pour contrôler quelles sont les variables inconnaissables. En mécanique quantique, par exemple, l'assertion suivante est vraie : vous ne pouvez jamais savoir en même temps quelle est la position et quelle est la vitesse d'une particule élémentaire, mais vous pouvez vous adapter et savoir laquelle des deux vous pouvez découvrir. Toute information que vous obtenez sur l'une détériore les informations acquises sur l'autre. C'est certainement une situation d'un degré de sophistication qu'il serait complètement désespéré de développer ou de gérer par des méthodes autres que mathématiques, ou de parler de leur sens autrement que par des méthodes mathématiques ; et encore moins de faire quelque chose qui a déjà été fait, à savoir de les utiliser pour des prédictions, avec des méthodes mathématiques.

En venant à l'évolution des mathématiques, j'ai peur d'être trop précis. Mais j'aimerais faire quelques remarques générales à leur sujet. Je pense que les circonstances de leur évolution sont probablement plus instructives pour un public scientifique général que de considérer exactement ce qui s'est passé ; et encore plus que ce que tout le monde pense qu'il va se passer dans dix ans à compter d'aujourd'hui. Les circonstances de cette évolution sont très typiques et très instructives.

Encore une fois, en analysant le rôle de la science dans la vie ou dans les autres sciences, une chose est très visible. Il existe de vastes domaines des mathématiques qui ont été très utiles en pratique. Cette utilité pratique, cependant, est parfois une forme d'utilité pratique plutôt indirecte.

Par exemple, un mathématicien exprime généralement qu'une théorie est directement utile si elle peut être utilisée en physique théorique. Après quoi, il doit encore dire que les avancées en physique théorique ne sont utiles que si elles sont utiles en physique expérimentale. Après quoi, on doit dire qu'un concept en physique expérimentale est, selon des critères ordinaires, utile s'il est utile en ingénierie. Même après l'ingénierie, vous pouvez faire un pas de plus. Donc, tous ces concepts d'utilité sont assez limités, et nous entendons seulement par là que chaque science devrait avoir des applications en dehors de son propre domaine, et qu'il existe une direction dans cette séquence d'applications vers des applications pratiques en vue d'une utilisation. Cependant, si l'on ne chipote pas sur la définition de l'utilité, cela signifie par exemple que selon les normes du mathématicien, tout ce qui n'est pas mathématique est utile, alors il faut dire que de grands pans de connaissance ont été utiles. Aussi, ces très grandes zones sont vraiment directement utiles par la somme de tous ces critères. En effet, ces choses ont vraiment fait une grande différence dans le monde dans lequel nous vivons, généralement un peu après leur entrée dans un autre domaine, mais toujours de telle manière que la partie mathématique est assez vitale de façon évidente.

Maintenant, il est très intéressant que la majorité de ces choses aient été développées avec très peu d'utilité et très souvent sans aucun soupçon de devenir utiles plus tard, pour des raisons d'un tout autre caractère. C'est une situation caractéristique. Je pourrais mentionner certaines formes d'algèbre, dans le domaine des matrices et des opérateurs, qui ont été inventées à des moments où il n'y avait aucune raison matérielle de soupçonner que de vingt à cent ans plus tard, elles joueraient un rôle en mécanique quantique (non encore existante). Il en va de même pour les découvertes du domaine de la géométrie différentielle, pour laquelle il n'y avait absolument aucune raison qu'un jour, il y aurait une théorie de la relativité générale, et que la théorie de la la relativité utiliserait ce type de géométrie. Pourtant, ces choses sont tout à fait vitales.

Les exemples pourraient être multipliés.

Je dois dire, cependant, qu'il existe également des exemples du contraire. Un exemple très important est que le calcul a certainement été inventé par Newton pour un but spécifique en physique théorique.

Mais une grande partie des mathématiques qui sont devenues utiles ont été développées sans aucun désir d'être utiles, et dans une situation où personne ne pouvait savoir dans quel domaine elles deviendraient utiles ; et il n'y avait aucune indication générale qu'il en serait jamais ainsi. Dans l'ensemble, il est uniformément vrai en mathématiques qu'il y a un laps de temps entre une découverte mathématique et le moment où elle est utile ; et que ce laps de temps peut aller de trente à cent ans, dans certains cas même plus ; et que l'ensemble du système semble fonctionner sans aucune direction, sans aucune référence à l'utilité, et sans aucune volonté de faire des choses qui sont utiles. Bien sûr, il faut également considérer que cela est vrai pour l'ensemble du cours de toute science ; en d'autres termes, vous devriez considérer par quels processus une grande partie de la science est arrivée à un point où elle affecte la société dans la vie de tous les jours : la science physique vient de la mécanique, et comme les découvertes originales en mécanique, elles étaient principalement liées à l'astronomie, et n'étaient absolument pas connectées aux domaines dans lesquels se trouvent les applications aujourd'hui.

Cela est vrai pour toute la science. Les succès sont largement dus à l'oubli total de l'objectif, ou si même on voulait quelque chose en fin de compte, en refusant de chercher à propos de sujets profitables et en se fiant uniquement à l'objectif d'élégance intellectuelle ; c'est en suivant cette règle que l'on a réellement pris de l'avance à long terme, bien mieux que n'importe quel cours strictement utilitaire ne l'aurait permis.

Je pense que ce phénomène pourrait très bien être étudié en mathématiques ; et je pense que tout le monde en science est bien placé pour se satisfaire de la validité de ces points de vue. Et je pense qu'il est extrêmement instructif de regarder le rôle de la science dans la vie de tous les jours et de noter comment, dans ce domaine, le principe du laissez-faire a conduit à des résultats étranges et merveilleux.