Transcription du Problème VIII de la liste des 23 problèmes de 1900 de David Hilbert [1]

VIII. - Problèmes sur les nombres premiers.

La théorie de la distribution des nombres premiers a reçu, dans ces derniers temps, une impulsion essentielle sous l'influence des travaux de MM. Hadamard, de la Vallée-Poussin, H. von Mangoldt et autres. Pour résoudre complètement le problème posé dans le Mémoire de Riemann *Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une quantité donnée*, il est encore nécessaire de démontrer l'affirmation si importante de Riemann que *les zéros de la fonction* $\zeta(s)$, qui est représentée par la série

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots,$$

ont tous leur partie réelle égale à $\frac{1}{2}$, abstraction faite des zéros connus, qui sont des nombres entiers négatifs. Une fois cette démonstration obtenue, le problème ultérieur sera la discussion plus précise de la série infinie de Riemann pour le nombre des nombres premiers, et il faudra en particulier *reconnaître si la différence entre le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité* x *et le logarithme intégral de* x *devient effectivement infinie avec* x *d'un ordre inférieur à* $\frac{1}{2}$; il faudrait ensuite reconnaître si les termes de la formule de Riemann qui dépendent des premiers zéros complexes de la fonction $\zeta(s)$ sont la cause véritable de la condensation par places des nombres premiers, remarquée par les dénombrements empiriques.

Après avoir épuisé ce sujet de la discussion de la formule de Riemann relative aux nombres premiers, on pourrait peut-être donner une réponse rigoureuse au problème de Goldbach [2] où l'on se demande si tout nombre pair est représentable par une somme de deux nombres premiers ; vient ensuite cette question connue : Y a-t-il une infinité de couples de nombres premiers ayant comme différence le nombre 2 ? Et ce problème plus général : L'équation linéaire de Diophante

$$ax + by + c = 0$$

où les coefficients $a,\ b,\ c$ sont des nombres entiers donnés dont deux sont premiers entre eux, est-elle toujours résoluble en nombres entiers premiers $x,\ y$?

Mais un problème d'intérêt non moindre et qui me semble peut-être d'une importance encore plus considérable est le suivant : *Transporter les résultats obtenus pour la distribution des nombres premiers rationnels à la théorie de la distribution des idéaux premiers d'un corps de nombres donné* k. C'est là un problème qui revient à l'étude de la fonction

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s},$$

1. Sur les problèmes futurs des mathématiques, par M. David Hilbert (Göttingen), traduite par M. L. Laugel, édition Jacques Gabay, 1990, texte de la conférence de David Hilbert parue dans le Compte-rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiques tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, publié par Gauthier-Villars en 1902. Une note de M. L. Laugel : l'original de la traduction a paru en allemand dans les Göttinger Nachrichten, 1900.

2. *Comparer* M.-P. Stackel, *Ueber Goldbach's empirisches Theorem (Göttinger Nachrichten* ; 1896), et M. Landau, *loc. cit.* ; 1900.

relative au corps k, et où la somme doit être étendue à tous les idéaux $\mathfrak{j}$ du corps de nombres donné k et où $n(\mathfrak{j})$ désigne la norme de l'idéal $\mathfrak{j}$.

Je citerai encore trois problèmes particuliers de la Théorie des nombres, à savoir un problème sur les lois de réciprocité, un autre sur les équations de Diophante, enfin le dernier appartenant au domaine des formes quadratiques.