

CHAPITRE X
LAGRANGE
Une haute pyramide

“*J’ignore.*”

J.-L. LAGRANGE.

“Lagrange est la haute pyramide des sciences mathématiques” ; tel est le jugement réfléchi de Napoléon Bonaparte sur le plus grand et le plus modeste mathématicien du XVIII^e siècle, Joseph Louis Lagrange, que l’empereur a fait Sénateur, Comte de l’Empire, et Grand Officier de la Légion d’Honneur. Le roi de Sardaigne et Frédéric le Grand ont, eux aussi, honoré Lagrange, mais avec moins de prodigalité que Napoléon.

Lagrange était de sang français et italien, le premier en plus grande proportion. Son grand-père, capitaine de cavalerie français, était entré au service de Charles-Emmanuel II, roi de Sardaigne, et en s’installant à Turin avait pris femme dans l’illustre famille Conti. Le père de Lagrange, Trésorier de Guerre de Sardaigne, épousa Marie-Thérèse Gros, l’unique file d’un riche médecin de Cambiano et en eut onze enfants : de cette nombreuse lignée un seul, le plus jeune, Joseph-Louis, né le 25 janvier 1736, survécut au delà de l’enfance ; le père était riche, mais c’était aussi un spéculateur incorrigible et à l’époque où son fils allait hériter, toute la fortune de la famille était réduite à rien. Plus tard, Lagrange considérait ce désastre comme le bonheur de sa vie. “Si j’avais hérité d’une fortune, je ne me serais probablement pas occupé de mathématiques”.

Au collège, Lagrange s’intéressa d’abord aux classiques et c’est plus ou moins par hasard qu’il se passionna pour les mathématiques. Tout en poursuivant ses études classiques, il prit connaissance des travaux d’Euclide et d’Archimède en géométrie, ceux-ci ne paraissent pas l’avoir impressionné outre mesure. Ensuite, un mémoire de Halley, l’ami de Newton, vantant la supériorité du calcul différentiel et intégral sur les méthodes synthétiques des Grecs, tomba entre les mains du jeune Lagrange : il fut captivé et converti. En un temps incroyablement court, il apprit tout seul ce qu’on savait à son époque de l’analyse. À l’âge de seize ans (d’après Delambre, il y a peut-être là quelque inexactitude), Lagrange fut nommé professeur de mathématiques à l’École Royale d’Artillerie de Turin : c’était le commencement d’une des plus brillantes carrières de l’histoire des mathématiques.

Dès le début, Lagrange fut un analyste, il ne devint jamais un géomètre. Nous voyons en lui le premier exemple marquant de cette spécialisation qui devait devenir presque une nécessité dans les recherches mathématiques. Ses préférences pour l’analyse apparaissent nettement dans son chef-d’œuvre, la *Mécanique analytique*, dont il a conçu le plan dès l’âge de dix-neuf ans à Turin, mais qui n’a été publié qu’en 1788, à Paris, quand Lagrange avait cinquante-deux ans. “On ne trouvera dans cet ouvrage aucune figure, dit-il dans sa préface ; et en offrant, tout en plaisantant à demi, des

Référence :

<https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?lg=fr-FR>.

Transcription : Denise Vella-Chemla, août 2023.

libations aux dieux de la géométrie, il fait remarquer que la mécanique peut être considérée comme la géométrie d'un espace à quatre dimensions, les trois coordonnées cartésiennes et une coordonnée temps suffisant pour déterminer l'emplacement d'une molécule mobile à la fois dans l'espace et le temps ; ce n'est autre chose que la manière de considérer la mécanique devenue populaire depuis 1915, lorsque Einstein l'a exploitée dans sa théorie de la relativité généralisée.

L'application de l'analyse à la mécanique par Lagrange marque la première rupture complète avec la tradition hellénique. Newton, ses contemporains, ses successeurs immédiats trouvaient les figures utiles pour l'étude des problèmes de mécanique ; Lagrange montra que l'on obtient une plus grande souplesse et une puissance incomparablement supérieures si l'on emploie dès le début les méthodes analytiques générales.

À Turin, tous les élèves du jeune professeur étaient ses aînés. Bientôt il forma avec les plus capables une Société d'études, qui donna naissance à l'Académie des Sciences de Turin. Le premier volume des rapports de cette Académie parut en 1750, alors que Lagrange avait vingt-trois ans : il est habituellement admis que la plupart des meilleurs travaux publiés dans ce premier volume sous diverses signatures avaient pour auteur le modeste et discret Lagrange. Un rapport signé Foncenex était si bon que le roi de Sardaigne nomma l'auteur supposé au Ministère de la Marine ; les historiens des mathématiques se sont quelquefois étonnés que le nom de Foncenex n'ait plus jamais reparu depuis son premier succès en mathématiques.

Lagrange publia sous son nom un mémoire sur les maxima et minima de calcul des variations, dont nous avons parlé aux chapitres IV et VIII), il y annonce qu'il traitera le sujet à fond dans un ouvrage où l'on trouvera l'ensemble de la mécanique, celle des solides comme celle des liquides. Ainsi donc, à vingt-trois ans (et en réalité plus tôt, Lagrange avait conçu son chef-d'œuvre, la *Mécanique analytique*, qui est à la mécanique générale ce que la loi de la gravitation universelle de Newton est à la mécanique céleste. En écrivant, dix ans plus tard, au mathématicien français d'Alembert (1717-1783), Lagrange dit qu'il considère son travail de jeunesse, le calcul des variations, conçu quand il avait dix-neuf ans, comme son chef-d'œuvre : c'est au moyen de ce calcul que Lagrange unifia la mécanique et, selon le mot de Hamilton, en fit "une sorte de poème scientifique".

La méthode de Lagrange, une fois qu'on l'a comprise, est presque une banalité. Comme certains l'ont remarqué, les équations de Lagrange qui régissent la mécanique sont le plus bel exemple scientifique de l'art de tirer quelque chose de rien. Mais, si nous réfléchissons un moment, nous voyons que tout principe scientifique dont le caractère de généralité va jusqu'à unir tous les vastes univers des phénomènes, doit nécessairement être simple ; un principe d'une extrême simplicité peut dominer une multitude de problèmes divers qui, même examinés de près paraissent individuels et distincts.

Dans le même volume des rapports de Turin, Lagrange fit un autre pas sérieux en avant ; il appliqua le calcul différentiel à la théorie des probabilités. Et comme si cela n'était pas suffisant pour ce jeune géant de vingt-trois ans, il dépassa Newton et s'en sépara radicalement dans sa théorie mathématique du son ; il mit cette théorie sous la dépendance de la mécanique des systèmes de molécules élastiques (plutôt que de la mécanique des fluides), en étudiant comment se comportent toutes les molécules d'air disposées en ligne droite sous l'action d'un choc transmis le long de la

ligne, de molécule à molécule. Dans le même ordre d'idées général, il a mis fin à une controverse irritante qui avait duré des années, entre les grands mathématiciens au sujet de la mise en forme correcte du problème d'une corde vibrante, question d'une importance fondamentale dans toute la théorie des vibrations. À vingt-trois ans, Lagrange était reconnu comme l'égal des plus grands mathématiciens de l'époque, Euler et les Bernoulli.

Euler jugeait toujours très généreusement les travaux des autres ; la manière dont il a agi à l'égard de son jeune rival Lagrange est un des plus beaux exemples de désintéressement dans l'histoire de la science. Âgé de dix-neuf ans, Lagrange envoya à Euler quelques-uns de ses travaux ; le célèbre mathématicien en reconnut tout de suite les mérites et engagea le jeune débutant à continuer. Lorsque quatre ans plus tard, Lagrange communiqua à Euler la vraie méthode de traitement des problèmes des isopérimètres (le calcul des variations, dont nous avons parlé à propos des Bernoulli), Euler, dont les méthodes semi-géométriques n'avaient pas réussi à résoudre ces problèmes, écrivit au jeune homme pour lui dire que sa nouvelle méthode lui avait permis de surmonter les difficultés qui l'avaient arrêté et au lieu de publier tout de suite cette solution depuis si longtemps poursuivie, Euler la mit de côté jusqu'à ce que Lagrange eût publié la sienne, "de manière à ne pas vous priver de la part de gloire qui vous est due".

Des lettres privées, pour si élogieuses qu'elles fussent, n'auraient été d'aucun appui pour Lagrange ; le comprenant fort bien, Euler, dans son ouvrage, paru après celui de Lagrange, fit une digression pour déclarer qu'il avait été arrêté par des difficultés qu'il n'avait pu surmonter que lorsque Lagrange lui en eût ouvert les voies. Finalement, Euler fit élire son jeune ami comme membre étranger à l'Académie de Berlin (2 octobre 1759), c'était le plus jeune de tous ; il n'avait que vingt-trois ans. Cette reconnaissance officielle fut d'un grand secours à Lagrange dans son pays. Euler et d'Alembert avaient projeté de faire venir Lagrange à Berlin : en partie pour des raisons personnelles, ils étaient désireux de voir leur brillant jeune ami installé à Berlin comme mathématicien de la Cour : après de longues négociations, ils y réussirent et Frédéric le Grand, qui fut légèrement joué dans toute l'affaire, en éprouva une joie enfantine, parfaitement justifiée d'ailleurs.

Nous profiterons ici de l'occasion pour parler un peu de d'Alembert, l'ami dévoué et l'admirateur généreux de Lagrange, ne serait-ce que pour faire ressortir le contraste agréable d'un côté de son caractère en regard du snobisme de Laplace, dont nous parlerons plus tard.

Jean Le Rond d'Alembert tirait son nom de la petite chapelle de Saint-Jean-le-Rond, proche de Notre-Dame de Paris. Fils légitime du Chevalier Destouches, d'Alembert avait été abandonné par sa mère sur les marches de l'escalier de Saint-Jean-le-Rond. Les autorités municipales confièrent l'enfant à la femme d'un pauvre vitrier, qui soigna le petit comme le sien propre : le chevalier fut obligé par une loi de payer pour l'éducation de son enfant naturel. Lorsque le génie de d'Alembert commença à se manifester, la véritable mère qui savait où il était, lui envoya dire qu'elle le prendrait volontiers avec elle, "Vous n'êtes que ma marâtre", répondit le garçon, "la femme du vitrier est ma vraie mère", et là-dessus il abandonna celle qui l'avait enfanté comme elle-même l'avait abandonné. Devenu célèbre, d'Alembert prit soin que le ménage du vitrier ne manquât de rien ; ceux-ci préférèrent rester dans leur humble logis : leur fils adoptif fut toujours fier de les proclamer ses vrais parents.

La place nous manque pour étudier d'Alembert à part ; signalons seulement qu'il fut le premier à donner une solution complète du problème important de la précession des équinoxes. Son travail le plus saillant en mathématiques pures concerne les équations différentielles partielles, particulièrement en connexion avec les cordes vibrantes.

D'Alembert encouragea son jeune correspondant Lagrange, trop modeste, à s'attaquer à des problèmes difficiles et importants. Il fit aussi de son mieux pour obtenir qu'il prit un soin raisonnable de sa santé, la sienne propre était mauvaise. Effectivement, Lagrange avait gâté son estomac par une alimentation tout à fait déraisonnable entre seize et vingt-six ans, et toute sa vie il dut se soumettre à un régime sévère, surtout en période de surmenage intellectuel. Dans une de ses lettres, d'Alembert chapitre le jeune homme pour son abus du thé ou du café pour se tenir éveillé ; dans une autre, il lui signale lugubrement un livre médical récent sur les maladies des savants : à tout cela, Lagrange répondait gaiement qu'il se portait bien et travaillait comme un fou. Mais à la fin, cela lui coûta cher au point de vue de sa santé.

D'un certain côté, la carrière de Lagrange forme un curieux parallèle avec celle de Newton. La concentration prolongée sur des problèmes supérieurs avait, vers le milieu de sa vie, lassé l'enthousiasme de Lagrange et, bien que son esprit eût conservé toute sa vigueur, il en était venu à considérer les mathématiques avec indifférence. Vers quarante-cinq ans, il écrivait à d'Alembert : "Je commence à sentir que mon inertie augmente peu à peu et je ne réponds pas que je fasse encore des mathématiques dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde et qu'à moins qu'on ne découvre de nouveaux filons, il faudra tôt ou tard l'abandonner."

Quand il écrivait ces lignes, Lagrange traversait une période de mélancolie et de maladie ; néanmoins il exprimait la vérité en ce qui le concernait. La dernière lettre de d'Alembert (septembre 1783) écrite un mois avant sa mort, exprime une opinion inverse à celle qu'il émettait dans ses premières ; il conseille à Lagrange le travail comme le meilleur remède à son découragement : "Au nom de Dieu, ne renoncez pas au travail, la plus forte pour vous de toutes les distractions. Adieu, peut-être pour la dernière fois. Conservez quelque souvenir de l'homme du monde qui vous chérit et vous honore le plus".

Heureusement pour les mathématiques, la crise de profonde dépression de Lagrange, avec son corollaire inévitable, l'idée qu'aucune connaissance humaine n'était digne du moindre effort, ne se produisit que vingt glorieuses années après que d'Alembert et Euler eurent conçu le projet de faire venir Lagrange à Berlin.

Parmi les grands problèmes que Lagrange aborda et résolut avant d'aller à Berlin, il y a celui de la libration de la Lune. Pourquoi ce satellite présente-t-il toujours la même face à la Terre, avec certaines légères irrégularités qui peuvent s'expliquer ? Le problème est un exemple du fameux problème des trois corps (dans ce cas particulier la Terre, le Soleil et la Lune) s'attirent mutuellement selon la loi du carré inverse des distances entre leurs centres de gravité. (Nous nous étendrons un peu plus sur ce problème à propos de Poincaré). Pour sa solution du problème de la libration, Lagrange obtint le grand prix de l'Académie des Sciences de Paris, en 1764 : il n'avait que vingt-huit ans.

Encouragée par ce brillant succès, l'Académie proposa un problème encore plus difficile, pour lequel Lagrange obtint encore le prix, en 1706. À cette époque, on n'avait découvert que quatre satellites de Jupiter, en sorte que le système de Jupiter posait un problème de six corps (la planète, le Soleil et ses satellites). La solution mathématique complète du problème, sous une forme adaptée au calcul pratique, dépasse nos moyens, même aujourd'hui mais du moins, Lagrange, en usant de méthodes d'approximation, a fait faire à ce problème un progrès notable en expliquant les irrégularités observées.

C'est aux applications de ce genre de la théorie de Newton que Lagrange apporta le plus d'intérêt au cours de sa vie active. En 1772, il remporta encore le prix de l'Académie de Paris pour son mémoire sur le problème des trois corps : en 1774 et 1778, il eut des succès semblables avec le mouvement de la Lune et les perturbations des comètes.

À la suite du premier de ces succès, qui fit quelque bruit, le roi de Sardaigne, en 1706, paya à Lagrange, alors âgé de trente ans, les frais d'un voyage à Paris et à Londres ; il était décidé qu'il accompagnerait l'ambassadeur de Sardaigne à Londres Caraccioli ; mais à Paris, à la suite d'un banquet trop copieux donné en son honneur, Lagrange fut gravement malade et obligé de rester là : pendant ce séjour, il rencontra tous les intellectuels de marque, y compris l'abbé Marie qui devait devenir plus tard un ami estimable. Le banquet en question enleva à Lagrange toute envie de s'établir à Paris et il regagna avec hâte Turin dès qu'il fut en état de faire le voyage.

Enfin, le 6 novembre 1700, Lagrange, à l'âge de trente ans, fut chaleureusement accueilli à Berlin par Frédéric, le plus grand roi d'Europe, comme le monarque se désigne modestement lui-même, qui serait honoré d'avoir à sa Cour le plus grand mathématicien ; la dernière partie de la phrase au moins était vraie, Lagrange fut nommé directeur de la section physico-mathématique de l'Académie de Berlin, et pendant vingt ans, il ne cessa de remplir les volumes des rapports de l'Académie d'un grand mémoire après l'autre. Il n'était pas tenu de faire des cours.

Au début, le jeune directeur se trouva dans une situation quelque peu délicate. Naturellement, les Allemands étaient mécontents de voir des étrangers leur passer par-dessus la tête et étaient portés à traiter les importations de leur roi avec un peu moins qu'une froide politesse ; en fait, ils étaient fréquemment tout à fait outrageants. Mais Lagrange, en outre de ses dons de mathématicien de premier ordre, avait un caractère aimable et réfléchi et possédait la qualité inappréciable de savoir dans quel cas il faut garder bouche close. Dans les lettres à ses amis de confiance, il savait dire ce qu'il pensait, même à propos des Jésuites, que d'Alembert et lui semblent ne pas avoir aimés, et dans ses rapports officiels aux Académies sur des travaux scientifiques il disait franchement tout. Mais dans ses contacts sociaux il s'occupait de ses propres affaires et évitait de blesser, même si l'attaque pouvait paraître justifiée. Jusqu'à ce que ses collègues se fussent accoutumés à sa présence, il évita de se trouver sur leur chemin.

Ce principe avéré de se tenir à l'écart de toute controverse valut à Lagrange une bonne situation à Berlin. Euler, lui, ne faisait que passer d'une discussion philosophique ou religieuse à une autre : Lagrange, quand on le serrait de trop près, commençait par répondre, selon sa formule sincère : "J'ignore !" ; cependant, lorsque ses convictions intimes étaient attaquées, il savait se défendre courageusement, en donnant ses raisons.

Somme toute, Lagrange avait la sympathie de Frédéric qui était parfois irrité des joutes soutenues par Euler à propos de problèmes de philosophie dont ce dernier ignorait tout. “Notre ami Euler, écrivait-il à d’Alembert, est un grand mathématicien, mais un assez mauvais philosophe.” En une autre occasion, à propos de l’effusion de moralisation pieuse d’Euler dans les fameuses *“Lettres à une princesse allemande”*, Frédéric qualifie de classique le “Commentaire d’Euler sur l’Apocalypse” faisant incidemment en sous-main une allusion à la faute que Newton avait commise lorsqu’il avait perdu le goût de la philosophie naturelle. “Il est incroyable, disait Lagrange en parlant d’Euler, qu’il ait pu être aussi plat et puéril en métaphysique” et en parlant de lui-même : “J’ai une aversion profonde des disputes.” Lorsque, dans ses lettres, il se laissait aller à philosopher, c’était avec une pointe inattendue de cynisme qu’on ne retrouve nulle part dans les travaux qu’il a publiés, comme par exemple lorsqu’il écrit : “J’ai toujours remarqué que les prétentions de tout le monde sont exactement en raison inverse du mérite, c’est un de mes axiomes de morale”. En matière religieuse, Lagrange était, s’il était quelque chose, un agnostique.

Frédéric était enchanté de son acquisition et passait maintes heures cordiales avec Lagrange, lui exposant les avantages de la vie régulière. Ce qui plaisait particulièrement dans Lagrange à Frédéric, c’était le contraste frappant qu’il présentait avec Euler, dont la piété trop ostensible et le manque total de la finesse du courtisan l’irritaient : il était allé jusqu’à traiter ce pauvre Euler de lourd cyclope mathématicien parce qu’Euler était devenu borgne. À l’égard de d’Alembert, le roi se confondait en remerciements, en prose et en vers : “C’est à vos soins et à votre recommandation, que je dois le remplacement, à mon Académie, d’un mathématicien borgne par un mathématicien à deux yeux, ce qui sera particulièrement agréable à la section d’anatomie.” En dépit de saillies de ce genre, Frédéric n’était pas un mauvais diable.

Peu de temps après s’être fixé à Berlin, Lagrange pria une jeune fille de ses parentes de Turin de venir le retrouver et l’épousa.

Il y a deux versions de l’événement. Voici la première : Lagrange à Turin, avait vécu dans la même maison que la jeune fille et ses parents et s’était intéressé à sa manière de faire les achats. Comme l’économie faisait partie de son caractère prudent, il était scandalisé de ce qu’il considérait comme des extravagances de la part de la jeune fille, et il s’était mis à lui acheter ses rubans lui-même : de fil en aiguille, il s’était vu contraint de l’épouser malgré lui.

L’autre version peut se déduire d’une lettre de Lagrange, certainement le plus étrange aveu d’indifférence qui ait jamais été fait par un jeune époux, par définition fort épris. D’Alembert avait plaisanté son ami. “On m’écrit de Berlin que vous avez fait ce qu’entre nous autres philosophes nous appelons le plongeon fatal... Un grand mathématicien doit avant toutes choses savoir calculer son bonheur, et je compte qu’après avoir fait ce calcul, vous avez trouvé le mariage pour solution”. Ou bien Lagrange prit le conseil au grand sérieux, ou bien il voulut battre d’Alembert à son propre jeu, et y réussit. Dans ses lettres, d’Alembert s’étonne que Lagrange ne lui ait pas fait part de son mariage, et ce dernier répond : “Je ne sais si j’ai bien ou mal calculé, ou plutôt je crois n’avoir point calculé du tout, car j’aurais peut-être fait comme Leibniz qui à force de réfléchir ne put jamais se déterminer. Quoi qu’il en soit, je vous avoue que je n’ai jamais eu de goût pour le mariage ;... j’ai cru devoir engager une de mes parentes que je connaissais depuis longtemps... à venir partager

mon sort et avoir soin tant de moi que de tout ce qui me concerne. Voilà l'histoire exacte de mon mariage. Si je ne vous en ai point fait part, c'est qu'il m'a paru que la chose était si indifférente en elle-même qu'il ne valait point la peine de vous en entretenir.

Cette union s'annonçait heureuse pour les deux époux, lorsque la jeune femme se mit à dépérir d'une maladie de langueur. Lagrange prit sur ses nuits pour la soigner lui-même : il eut le cœur brisé quand il la perdit.

Il trouva sa consolation dans ses travaux. "Mes occupations se bornent à cultiver les mathématiques, tranquillement, et en silence". Ensuite, il explique à d'Alembert le secret de la perfection de toutes ses œuvres, ce qui a fait le désespoir de ses hâtifs successeurs : "Comme je ne suis pas pressé et que je travaille plus pour mon plaisir que par devoir, je fais comme les grands seigneurs qui bâtissent : Je fais, je défais et je refais plusieurs fois jusqu'à ce que je sois passablement content de mon travail, ce qui néanmoins arrive très rarement". Et une autre fois, plaignant de maladie provoquée par le surmenage, il déclare qu'il lui est impossible de se reposer. "J'ai une mauvaise habitude dont il m'est impossible de me défaire ; c'est que je refais souvent mes mémoires, même plusieurs fois, jusqu'à ce que j'en sois assez content".

Tous les efforts de Lagrange au cours de ses vingt ans de séjour à Berlin n'ont pas porté uniquement sur la mécanique céleste et le polissage de son chef-d'œuvre. Une digression, dans le domaine de Fermat, a un intérêt particulier parce qu'elle peut donner une idée de la difficulté inhérente à certaines questions d'arithmétique qui paraissent simples. Et nous voyons le grand Lagrange lui-même surpris de l'effort inattendu que ses recherches d'arithmétique lui coûtaient.

Le 15 août 1768, il écrit à d'Alembert : "Je me suis occupé, ces jours passés, pour diversifier un peu mes études, de quelques problèmes d'Arithmétique, et je vous assure que j'y ai trouvé beaucoup plus de difficultés que je ne croyais. En voici un, par exemple, dont je ne suis venu à bout qu'avec beaucoup de peine. Un nombre quelconque entier, positif et non carré n étant donné, trouver un nombre entier et carré x^2 tel que $nx^2 + 1$ soit un carré. Ce problème est d'une grande importance dans la théorie des carrés [on dit aujourd'hui "formes quadratiques"] qui font le principal objet de l'analyse de Diophante... Au reste, j'ai trouvé à cette occasion de très beaux théorèmes d'Arithmétique dont je vous ferai part une autre fois, si vous le souhaitez."

Le problème dont parle Lagrange a une longue histoire qui remonte à Archimède et aux Hindous. Le mémoire classique de Lagrange sur la manière de faire de $nx^2 + 1$ un carré est un jalon qui marque dans la théorie des nombres. Lagrange a été aussi le premier qui ait démontré quelques-uns des théorèmes de Fermat, ainsi que le suivant de John Wilson (1741-1793) : si p est un nombre premier et si on fait le produit de tous les nombres entiers 1, 2, 3, etc... jusqu'à $p - 1$ et qu'on ajoute 1 au résultat la somme est divisible par p ; ceci n'est pas vrai si p n'est pas premier ; par exemple, soit $p = 5$; $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25$. Cette proposition peut se démontrer par un raisonnement élémentaire : c'est un autre test d'intelligence supérieure en arithmétique¹

¹Un espagnol a donné une démonstration ridicule qui est assez comique pour être citée ici. L'abréviation habituelle du produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ est $n!$. Or $p - 1 + 1 = p$ qui est divisible par p . Mettons partout le point d'exclamation : on écrit $(p - 1)! + 1! = p!$. La partie de droite est encore divisible par p ; donc $(p - 1)! - 1$ est divisible par p . Malheureusement, ceci s'applique également si p n'est pas premier.

Dans sa réponse, d'Alembert expose son idée que l'analyse diophantienne peut être utile dans le calcul intégral, mais il n'entre pas dans le détail ; chose curieuse, la prophétie a été réalisée vers 1870 par le mathématicien Russe G. Zolotareff.

Laplace, lui aussi, s'intéresse à l'arithmétique pendant quelque temps : il dit à Lagrange que l'existence des théorèmes non démontrés de Fermat, tout en constituant une des plus grandes gloires des mathématiques françaises, était en même temps une tache flagrante, et qu'il était du devoir des mathématiciens français de la faire disparaître, mais il prévoyait de terribles difficultés. À son avis, la cause initiale de l'embarras est que les problèmes sur le "discret" (ceux qui en fin de compte traitent des nombres 1, 2, 3, 4. etc..) ne sauraient s'attaquer avec une arme de caractère général telle que la prévoit le calcul différentiel et intégral pour le "continu". D'Alembert, lui aussi, fait remarquer à propos de l'arithmétique qu'il l'a trouvée "plus difficile qu'elle ne paraît au premier abord". Ces expériences de mathématiciens comme Lagrange et ses amis peuvent permettre de conclure que l'arithmétique est réellement difficile.

Une autre lettre de Lagrange, du 28 février 1769, donne la conclusion de la question : "Le problème dont je vous ai parlé m'a occupé beaucoup plus que je ne le pensais d'abord ; enfin, j'en suis venu à bout et je crois n'avoir laissé presque rien à désirer sur le sujet des équations indéterminées du second degré à deux inconnues. Ici, Lagrange se montre trop optimiste, il y avait encore à entendre Gauss ; mais à cette époque il devait encore se passer sept ans avant que son père et sa mère fassent connaissance. Deux ans avant la naissance de Gauss (1777), Lagrange écrit, en pensant avec quelque pessimisme à ces travaux : "Les recherches en arithmétique sont celles qui m'ont causé le plus d'embarras et qui ont peut-être le moins de valeur."

Lorsqu'il était en bonne santé, Lagrange tombait rarement dans l'erreur d'estimer trop haut "l'importance" de son œuvre. Il écrivait à Laplace en 1777 : "J'ai toujours envisagé les mathématiques comme un objet d'amusement plutôt que d'ambition, et je peux vous assurer que je jouis beaucoup plus des travaux des autres que des miens, dont je suis toujours mécontent. Vous voyez par là que si vous êtes exempt de jalousie par vos propres succès, je ne le suis pas moins par mon caractère". Ces lignes répondaient à une déclaration quelque peu pompeuse de Laplace, disant qu'il travaillait les mathématiques uniquement pour satisfaire sa propre curiosité du sublime et qu'il n'avait aucun penchant pour les applaudissements de la multitude, ce qui, dans son cas particulier, était en partie du galimatias.

Une lettre de Lagrange à Laplace du 15 septembre 1782 a un grand intérêt historique, car elle parle de l'achèvement de la *Mécanique Analytique*. "J'ai presque achevé un traité de mécanique analytique, fondé uniquement sur le principe ou la formule que j'expose dans la première section du mémoire joint ; mais comme j'ignore encore quand et où je pourrai le faire imprimer, je ne me hâte pas d'y mettre la dernière main.

Legendre entreprit l'édition de l'œuvre pour l'impression et le vieil ami de Lagrange, l'abbé Marie, finit par persuader un éditeur de risquer sa réputation ; cet homme prudent consentit à se charger de l'édition seulement lorsque l'abbé se fut engagé à acheter le stock invendu après une certaine date. Le livre ne parut pas avant 1788, après que Lagrange eut quitté Berlin. Un exemplaire lui

fut remis à l'époque où il était devenu si indifférent à toute science et à toutes mathématiques qu'il ne se donna même pas la peine d'ouvrir le livre. Il n'avait cure de savoir si l'éditeur ne l'avait pas fait imprimer en chinois.

Une étude de la période que Lagrange passa à Berlin est de la plus haute importance au point de vue du développement de l'algèbre moderne : c'est le mémoire de l'année 1767 *Sur la solution des équations numériques*, et ses compléments successifs, qui traitent de la question générale de la possibilité de résoudre algébriquement les équations. La plus grande importance des recherches de Lagrange sur la théorie et la solution des équations est peut-être l'inspiration qu'elle a certainement fournie aux maîtres algébristes du début du dix-neuvième siècle. Nous allons voir peu à peu ces hommes venir à bout d'un problème qui avait arrêté pendant au moins trois siècles les algébristes, et cela grâce aux idées inspirées par Lagrange. Ce dernier n'a pas résolu la difficulté principale, qui consiste à établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation donnée puisse se résoudre algébriquement mais son travail contenait le germe de la solution. Comme le problème est, parmi les principaux de toute l'algèbre, un de ceux qui peut être exposé simplement, nous allons y jeter un coup d'œil en passant : il reviendra d'ailleurs plusieurs fois comme un leitmotiv au cours de l'étude des grands mathématiciens du XIX^e siècle, Cayley, Abel, Galois, Hermite et Kronecker, entre autres.

Tout d'abord notons qu'il n'y a pas de difficulté à résoudre une équation algébrique à coefficients numériques : sans doute, le travail peut être considérable si l'équation est de degré élevé, par exemple

$$3x^{101} + 17,3 x^{70} + x - 11 = 0$$

mais il existe maintes méthodes directes qui permettent de trouver, avec le degré d'approximation voulu, une racine d'une équation numérique de ce genre ; certaines de ces méthodes font partie des cours réguliers d'algèbre. Mais à l'époque de Lagrange, les méthodes uniformes pour résoudre les équations numériques avec tel ou tel degré d'approximation ne couraient pas les rues, si même il en existait ; c'est Lagrange qui a trouvé une méthode de cette espèce, mais seulement théoriquement et non pratiquement : de nos jours, aucun ingénieur n'ayant à résoudre une équation numérique ne songerait à user de la méthode de Lagrange.

Le véritable problème surgit lorsque nous cherchons la solution algébrique d'une équation à coefficients *en lettres*, par exemple $ax^2 + bx + c = 0$, ou $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ et ainsi de suite, au-dessus du troisième degré. Ce que l'on cherche, c'est une suite de formules exprimant l'inconnue en fonction des données a, b, c, \dots telles que si l'une de ces expressions de x est mise du côté gauche de l'équation, ce membre est réduit à zéro. Pour une équation de degré n , l'inconnue x a exactement n valeurs : ainsi, pour l'équation du second degré, les deux valeurs qui, substituées à x , annulent $ax^2 + bx + c$, sont :

$$\frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) \quad \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$$

Les valeurs de x cherchées doivent dans tous les cas être exprimées en fonction de a, b, c, \dots , uniquement au moyen d'un nombre fini d'additions, soustractions, multiplications, divisions et extractions de racines.

Tel est le problème. Est-il soluble ? La réponse à cette question n'a été donnée qu'environ vingt ans après la mort de Lagrange, mais la clef se trouve nettement indiquée dans son travail.

Comme premier échelon conduisant à une théorie étendue, Lagrange a procédé à une étude à fond de toutes les solutions, données par ses prédécesseurs, des équations générales des quatre premiers degrés, et a réussi à montrer que tous les stratagèmes ingénieux grâce auxquels des solutions avaient déjà été obtenues pourraient être remplacés par un procédé uniforme. Dans cette méthode générale, un détail contient la clef en question. Soit une expression algébrique contenant les lettres a, b, c, \dots ; combien d'expressions *différentes* peut-on tirer de l'expression donnée si on échange entre elles les diverses lettres de toutes les manières possibles ? Par exemple, de $ab + cd$, nous tirons $ad + cb$ en échangeant b et d . Ce problème en suggère un autre, qui lui est étroitement rattaché et qui fait aussi partie de la clef que cherchait Lagrange. Quelles sont les permutations de lettres qui laisseraient l'expression donnée *invariante* (sans changement) ? Ainsi, $ab + cd$ devient $ba + cd$ en échangeant a et b et l'expression n'a pas varié puisque $ab = ba$. C'est de là qu'est née la *théorie des groupes finis*. On a trouvé que c'était la clef de la possibilité de la résolution algébrique. Nous en reparlerons à propos de Cauchy et de Galois.

Les recherches de Lagrange font ressortir un autre fait important. Pour les degrés 2, 3 et 4, l'équation algébrique générale se résout au moyen d'une équation de *degré inférieur* à celle considérée. Ceci s'applique admirablement et uniformément aux équations du 2°, 3° et 4° degré ; mais lorsqu'on essaie d'appliquer le procédé à l'équation générale du 5° degré

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

l'équation *résolvante*, au lieu d'être d'un degré *inférieur* à 5, est du 6° degré ; on n'a fait que remplacer l'équation donnée par une autre plus difficile. *La méthode qui est valable pour les degrés 2, 3, 4, ne s'applique plus au degré 5*, et à moins qu'on ne trouve quelque moyen de tourner ce 6 gênant, la route se trouve barrée. En fait, nous verrons qu'il n'y a pas moyen d'éviter la difficulté ; autant vaudrait essayer la quadrature du cercle ou la trisection de l'angle par les méthodes euclidiennes.

Après la mort de Frédéric le Grand (17 août 1786), l'hostilité contre les étrangers et l'indifférence croissante à l'égard de la science, en Prusse, rendirent le séjour de Berlin peu confortable pour Lagrange et ses camarades étrangers de l'Académie. Il chercha à la quitter ; cela lui fut accordé à la condition qu'il continuerait à envoyer des mémoires pour les volumes de l'Académie pendant plusieurs années ; Lagrange y consentit. Il accepta avec plaisir l'invitation de Louis XVI de poursuivre ses travaux mathématiques à Paris, comme membre de l'Académie française. À son arrivée à Paris en 1787, il reçut un accueil des plus respectueux de la famille royale et de l'Académie ; on lui donna un confortable appartement au Louvre, où il vécut jusqu'à la Révolution ; Marie-Antoinette le tenait en grande faveur : la reine avait environ dix-neuf ans de moins que Lagrange, mais elle semblait le comprendre et elle fit tout son possible pour le distraire de la crise de dépression qu'il traversa.

À l'âge de cinquante et un an, Lagrange éprouva l'impression qu'il était à bout ; c'était un cas très net d'épuisement nerveux à la suite d'un surmenage intellectuel prolongé. Les Parisiens le trouvaient aimable et agréable en conversation, mais jamais il n'essaya de se mettre en avant. Il parlait peu et paraissait distrait, plongé dans une profonde mélancolie. Aux réunions de savants chez Lavoisier, il se tenait habituellement près d'une fenêtre, regardant au dehors et tournant le dos aux invités venus pour lui faire honneur. Il disait même que son enthousiasme était éteint et

qu'il avait perdu le goût des mathématiques : quand on lui faisait savoir que tel mathématicien était plongé dans une recherche importante, il répondait : "Tant mieux ; je l'avais commencée ; je n'aurai pas à la finir." La *Mécanique Analytique* resta sur son bureau pendant deux ans sans qu'il l'ouvrît.

Cette nausée à l'égard de tout ce qui avait une odeur de mathématiques poussa Lagrange vers les questions qu'il considérait de son véritable intérêt, comme Newton l'avait fait après ses *Principia* : métaphysique, évolution de la pensée humaine, histoire des religions, théorie générale des langues, médecine, botanique. Dans cette étrange diversité, il surprenait ses amis par ses connaissances étendues et la pénétration de son esprit en des matières étrangères aux mathématiques. À cette époque, la chimie était en train de devenir une science, contrairement à l'alchimie qui l'avait précédée, grâce surtout aux efforts de Lavoisier (1743-1794) qui était devenu un ami fidèle de Lagrange ; dans un certain sens qui sera apprécié de tout étudiant en chimie, Lagrange déclarait que Lavoisier avait rendu la chimie "aussi facile que l'algèbre".

Quant aux mathématiques, Lagrange estimait qu'elles étaient finies ou du moins arrivaient à une période de décadence ; il prévoyait que la chimie, la physique et la science, en général, seraient les branches les plus intéressantes dans l'avenir, et il allait jusqu'à prédire que les chaires de mathématiques dans les Académies et les Universités tomberaient bientôt au niveau peu relevé de celui de la langue arabe. Dans un certain sens, il avait raison : si Gauss, Abel, Galois, Cauchy et d'autres n'avaient pas insufflé un sang nouveau aux mathématiques, l'élan donné par Newton se serait épuisé vers 1850. Heureusement, Lagrange vécut assez longtemps pour voir la magnifique carrière de Gauss s'ébaucher et pour comprendre que ses pronostics étaient mal fondés. Nous pouvons aujourd'hui sourire devant le pessimisme de Lagrange, en pensant que l'ère qui a précédé 1800 n'était à l'époque de son apogée, que l'aurore des mathématiques modernes et que nous assistons maintenant à leur matin, en nous émerveillant de ce que sera leur midi, si toutefois il y en a un, et la prophétie de Lagrange doit nous servir de leçon pour éviter d'en faire d'analogues.

La Révolution française tira Lagrange de son apathie et galvanisa une fois de plus son intérêt pour les mathématiques ; la date de la prise de la Bastille, le 14 juillet 1789, peut nous servir de point de repère pour situer ce réveil.

Lorsque les aristocrates et les hommes de science se rendirent un compte exact des événements, ils pressèrent Lagrange de retourner à Berlin où il serait accueilli à bras ouverts ; le gouvernement n'aurait fait aucune objection à son départ. Mais il refusa de quitter Paris, disant qu'il préférerait assister à "l'expérience" jusqu'au bout. Ni lui ni ses amis ne prévoyaient la Terreur et, lorsqu'elle arriva, Lagrange regretta amèrement d'être resté alors qu'il était encore temps de s'échapper. Ce n'est pas qu'il craignît pour sa vie : comme demi-étranger, il était raisonnablement à l'abri, et de plus il n'attachait pas beaucoup de poids à l'existence ; mais les cruautés révoltantes lui répugnaient et elles ne firent que détruire complètement le peu de confiance qu'il avait conservé à l'égard de la nature humaine et du bon sens. "*Tu l'as voulu*", répétait-il, en pensant, à chaque atrocité qui le révoltait l'une après l'autre, à l'erreur qu'il avait commise en voulant assister aux horreurs inévitables d'une révolution.

Les plans grandioses des révolutionnaires pour régénérer l'humanité et réformer la nature humaine

le laissaient froid. Lorsque Lavoisier fut guillotiné (ce qu'il aurait sans doute mérité si cela avait été simplement une question de justice sociale), Lagrange exprima son indignation à l'égard de la stupidité de cette exécution : "Cela n'a demandé qu'un instant pour faire tomber sa tête, alors qu'une centaine d'années ne suffirait pas pour créer la pareille !" ; mais les citoyens outragés et opprimés avaient déclaré au fermier-général Lavoisier que "le peuple n'avait pas besoin de sciences", lorsque la magnifique contribution du grand chimiste à la science avait été invoquée comme une raison de pur bon sens pour que sa tête resta sur ses épaules.

Bien que, pratiquement, toute la vie active de Lagrange eût été sous le patronage de la royauté, ses sympathies n'allaient pas aux royalistes, et pas davantage, d'ailleurs aux révolutionnaires ; il se tenait carrément et sans équivoque sur la base moyenne de civilisation que les deux partis avaient impitoyablement saccagé ; il sympathisait volontiers avec le peuple qui avait été opprimé au-delà de l'endurance humaine et lui souhaitait le succès dans la lutte menée pour obtenir des conditions d'existence convenables mais son esprit était trop réaliste pour être impressionné par les plans chimériques des meneurs du peuple en faveur de l'amélioration de la misère humaine ; il se refusait à croire que l'établissement de pareils plans fût la preuve indubitable de la grandeur de l'esprit humain, comme le proclamaient les guillotineurs. Il déclarait : "Si vous voulez voir un esprit humain véritablement grand, entrez dans le cabinet de Newton décomposant la lumière ou dévoilant le système du monde."

Le Gouvernement révolutionnaire le traita avec une remarquable tolérance : un décret spécial lui assura sa pension, et lorsque l'inflation et le papier-monnaie la réduisirent à rien, le Comité des Inventions fut invité à augmenter son traitement, ainsi que le Comité de la Monnaie. Lorsque l'École Normale fut créée, en 1795 (son existence ne devait être qu'éphémère), Lagrange y fut nommé professeur de mathématiques. Quand, après la fermeture de Normale, la grande École Polytechnique fut fondée, en 1797, Lagrange organisa le cours de mathématiques et en fut le premier professeur ; il n'avait, jusque-là, jamais enseigné à des jeunes gens peu préparés ; s'adaptant à cette matière à peu près vierge, Lagrange conduisit ses élèves, par l'intermédiaire de l'arithmétique et de l'algèbre, jusqu'à l'analyse, ayant plutôt l'air d'un des élèves que du professeur. Le plus grand mathématicien de l'époque devint un grand professeur, préparant la jeune et fougueuse couvée des ingénieurs militaires de Napoléon à jouer leur rôle dans la conquête de l'Europe. Cet exemple ébranlait la vieille superstition qu'un savant est incapable d'enseigner. Dépassant largement les éléments des mathématiques, Lagrange déroulait devant les yeux de ses élèves les nouvelles mathématiques ; sous peu, ils allaient pouvoir participer eux-mêmes aux progrès de celles-ci.

Deux des études de cette nature devaient exercer une grande influence sur l'analyse au cours des trente premières années du XIX^e siècle. Les élèves de Lagrange éprouvaient quelque difficulté à saisir les concepts de l'infiniment petit et de l'infiniment grand dont était imbue la forme traditionnelle du calcul différentiel et intégral ; pour éliminer ces difficultés, Lagrange entreprit l'exposé du calcul sans user des "infinitésimaux" de Leibniz ni de la conception particulière de limite suggérée par Newton. Cette théorie fut publiée en deux ouvrages : la *Théorie des fonctions analytiques* (1797), et les *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801) ; l'importance de ces travaux ne réside pas dans leur essence mathématicienne, mais dans l'impulsion qu'ils donnèrent à Cauchy et autres pour construire un calcul différentiel et intégral satisfaisant. En cette matière, Lagrange échoua complètement ; mais, ce disant, nous ne devons pas oublier que même de nos jours les difficultés auxquelles se

heurta Lagrange n'ont pas complètement disparu ; c'était du moins un essai remarquable et, pour l'époque, satisfaisant ; si les nôtres vivent aussi longtemps que les siens, c'est que nous aurons bien travaillé.

Le travail le plus important de Lagrange pendant la période de la Révolution fut sa large contribution au perfectionnement du système métrique des poids et mesures : c'est aux sarcasmes de Lagrange et à son bon sens que nous devons qu'on n'ait pas adopté 12 comme base du système métrique au lieu de 10 ; les avantages de 12 sont évidents, et le système duodécimal continue de nos jours à être soutenu, dans des traités impressionnants, par des partisans sérieux qui n'échappent que d'un cheveu à la fraternité de la quadrature du cercle. Mais superposer la base 12 à la base 10 de notre système numéral serait intruder une cheville hexagonale dans un trou pentagonal. Afin de faire sentir aux hésitants l'absurdité de la base 12, Lagrange proposa 11 comme étant meilleur, car tout nombre premier aurait l'avantage de donner à toutes les fractions, avec ce système, le même dénominateur. Les inconvénients, en réalité, sont nombreux et assez évidents pour quiconque comprend ce que c'est que la division exacte (sans reste). La Commission comprit l'ironie et opta pour 10.

Laplace et Lavoisier laissaient partie de la Commission telle qu'elle fut constituée au début, mais au bout de trois mois celle-ci fut expurgée et tous deux durent abandonner leurs sièges : Lagrange resta président. J'ignore pourquoi ils me gardent remarqué, ne prenant pas garde, selon sa toadestle coutu mine, que son den du senne avalt priservé non seulement sin siège, mais aussi un tete.

En dépit de tout son travail intéressant, Lagrange vivait solitaire, enclin au désespoir. Il fut sauvé de ce crépuscule entre la vie et la mort, à l'âge de cinquante-six ans, par une jeune fille qui avait quelque quarante ans de moins que lui, la fille de son ami l'astronome Lemonnier ; elle fut touchée par l'infortune de Lagrange et insista pour l'épouser. Lagrange consentit et, contrairement à toutes les lois qui régissent les relations d'un homme âgé avec une jeune fille, ce mariage fut idéalement heureux. La jeune femme se montra non seulement dévouée, mais habile à consoler son mari ; elle consacra sa vie à le tirer de sa mélancolie et à ranimer chez lui le désir de vivre. Pour sa part, Lagrange fit avec plaisir maintes concessions : il accompagnait sa femme au bal, où il n'aurait jamais pensé à aller seul ; bientôt, il lui fut insupportable de l'avoir longtemps loin de lui et pendant ses courtes absences, il était misérable.

Mais même au milieu de ce nouveau bonheur, Lagrange conservait son attitude curieuse de détachement pour l'existence et se montrait parfaitement sincère à l'égard de ses propres désirs. "Je n'ai point eu d'enfants de mon premier mariage", disait-il, "je ne sais si j'en aurai du second, je n'en désire guère". De tous ses succès, celui qu'il prisait le plus, comme il le disait simplement et sincèrement, c'était celui d'avoir trouvé une compagne si tendre et si dévouée.

Les Français lui prodiguèrent les honneurs. L'homme qui avait été un des favoris de Marie-Antoinette était devenu l'idole du peuple qui avait conduit la reine à la mort. En 1796, lorsque la France annexa le Piémont, Talleyrand reçut l'ordre de veiller aux moyens d'existence du père de Lagrange, qui vivait encore à Turin et de lui dire : "Votre fils, que le Piémont est fier d'avoir vu naître et la France de posséder, a fait bonneur à toute l'humanité par son génie". Quand Napoléon, entre deux campagnes, s'occupait des affaires civiles, il s'entretenait souvent avec Lagrange de

questions philosophiques et du rôle joué par les mathématiques dans l'État moderne ; il avait le plus profond respect pour l'homme à la parole aimable, qui réfléchissait toujours avant de parler et n'était jamais dogmatique.

Sous sa réserve paisible, Lagrange possédait un esprit ironique qui, à l'occasion, jaillissait d'une façon inattendue ; cette ironie était quelquefois si fine que des hommes moins subtils, Laplace par exemple, ne saisissaient pas la flèche qui leur était décochée. Un jour, en défendant l'expérience et l'observation contre les théoriciens distraits et imprécis, Lagrange fit la remarque suivante : "Ces astronomes sont singuliers, ils ne veulent pas croire à une théorie quand elle ne s'accorde pas avec leurs observations.". Remarquant combien il était absorbé à un concert, quelqu'un lui demanda pourquoi il aimait la musique : "Je l'aime parce qu'elle m'isole", répondit-il. "J'écoute les trois premières mesures ; à la quatrième je se distingue plus rien ; je me livre à mes réflexions ; rien ne m'interrompt, et c'est ainsi que j'ai résolu plus d'un problème difficile". Même son respect sincère pour Newton avait une légère teinte de la même ironie. "Newton", déclarait-il, "a assurément été l'homme de génie par excellence, mais nous devons reconnaître qu'il a été aussi le plus chanceux." "Quelle chance a eu Newton ! On ne trouve qu'une fois un système du monde à établir !".

Le dernier effort scientifique de Lagrange fut la révision et l'extension de la *Mécanique analytique*, pour en faire une deuxième édition. Toute son ancienne puissance lui revint, bien qu'il ait dépassé soixante-dix ans. Reprenant ses anciennes habitudes, il travaillait sans arrêt, mais il s'apercevait que son corps n'obéirait plus encore longtemps à son cerveau. Bientôt, il commença à éprouver des défaillances, en particulier en sortant du lit le matin ; un jour, sa femme le trouva sans connaissance sur le plancher ; sa tête avait, dans sa chute, heurté violemment le coin d'une table. Après cet accident, il modéra son ardeur au travail, mais sans abandonner ses études. Sa maladie, dont il n'ignorait pas la gravité, ne troublait pas sa sérénité ; toute sa vie, Lagrange a vécu comme un philosophe aimerait à vivre, indifférent à son sort.

Deux jours avant le décès de Lagrange, Monge et d'autres amis, sachant qu'il était mourant et désirait leur parler de sa vie, se rendirent auprès de lui. Ils le trouvèrent momentanément mieux, à part des défauts de mémoire qui lui faisaient oublier ce qu'il voulait leur dire. "Hier j'ai été bien mal, mes amis", leur dit-il. "Je me sentais mourir, mon corps s'affaiblissait peu à peu, mes facultés morales et physiques s'éloignaient insensiblement ; j'observais avec plaisir la progression bien graduée de la diminution de mes forces, et j'arrivais au terme sans douleur, sans regrets, et par une pente bien douce. Oh ! La mort n'est pas à redouter et quand elle vient sans douleur, c'est une dernière fonction qui n'est ni pénible, ni désagréable".

Il pensait que le siège de la vie est dans tous les organes, dans l'ensemble de la machine humaine et, dans son cas, toutes les parties de cet ensemble s'affaiblissaient également.

"Dans quelques instants de plus, il n'y aura plus de fonctions nulle part, la mort sera partout ; la mort n'est que le repos absolu du corps.

Je veux mourir ; oui ! je veux mourir et j'y trouve mon plaisir, mais ma femme n'a pas voulu ; j'eusse préféré à ce moment une femme moins bonne, moins empressée à ranimer mes forces et qui m'eût laissé finir doucement. J'ai fourni ma carrière, j'ai acquis quelque célébrité dans les

mathématiques : je n'ai haï personne, je n'ai point fait de mal et il faut bien finir, mais ma femme n'a pas voulu.”.

Cependant son désir fut vite satisfait. Une défaillance de laquelle il ne sortit plus le prit peu de temps après que ses amis l'eurent quitté. Il décéda au petit jour, le 10 avril 1813, dans sa soixante-seizième année.