**Extrait de *Logique modale* de Thierry Lucas, p. 599 et 600**

IV. Retombées et problèmes.

1. L'élargissement des perspectives sémantiques conduit naturellement à ce qu'on appelle la sémantique des voisinages de Scott [1].

L'idée est ici de structurer l'ensemble des indices non pas en donnant une relation binaire, mais en spécifiant pour chaque indice un ensemble d'ensembles d'indices qui sont considérés comme ses voisinages. Un exemple d'opérateur obéissant naturellement à cette sémantique est l'opérateur "être en train de". Ainsi,

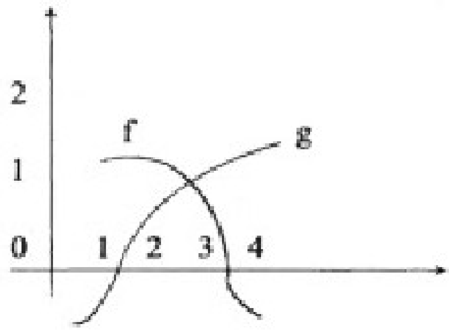
- il est en train de pleuvoir à l'instant $i$ revient à
- il existe un intervalle de temps autour de $i$ tel qu'il pleuve en chaque instant de cet intervalle,
  ou encore
- l'ensemble des instants où il pleut est un voisinage (au sens topologique) de $i$.

Dans cet esprit, on posera :

$\Box A$ vaut $V$ en $i$

si $\{j \mid A \text{ vaut } V \text{ en } j\} \in \mathscr{U}(i)$, où $\mathscr{U}$ est la donnée typique [2].

Cette sémantique est plus importante qu'il n'y paraît, car elle s'avère étroitement liée à la notion de topologie de Grothendieck, fondamentale dans l'étude de la géométrie [3]. Soit par exemple l'ensemble des nombres réels avec leur topologie et leurs voisinages ouverts usuels ; une famille de sous-ouverts de l'ouvert $U$ est un recouvrement de $U$ si leur réunion est $U$ tout entier. Dans le schéma suivant,




on a figuré deux fonctions, $f$ et $g$, définies sur l'ouvert $(1, 4)$, lequel est recouvert par les ouverts $(1, 3)$ et $(2, 4)$. Sur l'ouvert $(1, 4)$, ni $f$ ni $g$ ne sont globalement positives et

1. Voir par exemple les chapitres 7. 8 et 9 de Chellas, B.F., Modal Logic : An imroduction, Cambridge, Cambridge Universicy Pres, 1980.

2. la donnée typique en logique modale correspond au vrai en logique classique.

3. Voir Goldblatt, R.I., Grothendieck topology as geometric modaliy, in Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 27 (1981), p. 495-529.

l'assertion “il existe une fonction positive” est fausse sur cet ouvert. Par contre, il peut être intéressant de noter que sur l'ouvert $(1, 3)$ il existe une fonction positive, à savoir (la restriction de) $f$ et que sur l'ouvert $(2, 4)$, il existe aussi une fonction positive, à savoir (la restriction de) $g$. On dit que l'assertion “il existe une fonction positive” est *localement* vraie en $(1, 4)$. Plus généralement, la définition suivante montre que l'opérateur “est localement vrai” est bien du type que l'on a considéré ci-dessus :

$A$ est localement vrai en $U$

si l'ensemble des ouverts où $A$ est vrai forme un recouvrement de $U$.