

Sur la question de fond - pourquoi HR (l'hypothèse de Riemann) ne “tranche” pas la conjecture de Goldbach mécaniquement, malgré le lien que Hilbert lui-même établit dans le 8e problème, IA claude, 20 juin 2026

Laissez-moi vérifier ce que dit précisément la littérature avant de répondre, pour ne pas vous donner une intuition non vérifiée sur un point aussi précis. C'est exactement le point qu'il faut clarifier, et la recherche confirme précisément la nuance que je voulais vous apporter - pas une intuition, un fait technique établi.

Ce que HR donne réellement à la conjecture de Goldbach, et où ça s'arrête

Le résultat solide (Bhowmik-Ruzsa, et la lignée Granville) est : la relation entre l'ordre moyen de la fonction génératrice de la conjecture de Goldbach et l'hypothèse de Riemann a été établie par Granville, et il y a une équivalence entre de bonnes asymptotiques sur la fonction génératrice de la conjecture de Goldbach et l'hypothèse de Riemann. Mais regardez bien la nature de ce résultat : c'est un énoncé sur la moyenne du nombre de décompositions de la conjecture de Goldbach, $R(n)$, sommée sur tous les $n \leq x$ - pas sur un n individuel. C'est-à-dire : HR (ou son équivalent) contrôle très précisément le comportement statistique d'ensemble de $R(n)$, mais ne dit rien sur le cas particulier où $R(n) = 0$ pour un n donné.¹

Pourquoi ce saut “en moyenne \rightarrow pour chaque n ” est précisément le mur

C'est très exactement votre intuition juste : la conjecture de Goldbach n'a besoin que d'une seule décomposition par n , donc c'est un énoncé “au moins 1” pour chaque n individuellement (un quantificateur $\forall n \exists p$, donc universel sur les n , existentiel sur les décompositions) - alors que HR contrôle des sommes et des moyennes (des énoncés asymptotiques, donc qui autorisent par construction des exceptions isolées, à condition qu'elles soient suffisamment rares). C'est exactement la distinction qui apparaît dans le résultat de Springer que j'ai trouvé : sous l'hypothèse de Riemann généralisée, tous les entiers pairs d'un intervalle $[x, x + H]$ sont somme de deux premiers, à l'exception d'au plus $O(H^{1/2} \log^3 x)$ d'entre eux. Voyez la formulation : HR généralisée donne la conjecture de Goldbach pour presque tous les n d'un intervalle, avec un nombre d'exceptions explicitement borné - mais non nul. HR ne garantit jamais directement qu'il n'y a aucune exception, parce que sa force est analytique (contrôle des zéros, donc des moyennes et des restes d'erreur), pas combinatoire (existence pour chaque entier précisément).

Donc, pour répondre directement à vos trois hypothèses

Ce n'est ni que la conjecture de Goldbach soit “plus facile” parce qu'elle ne demande l'existence que d'une seule décomposition, ni que travailler pair par pair réduise ou augmente la complexité en soi. C'est plutôt que HR et la conjecture de Goldbach posent des questions de nature logique diffé-

1. *Note de la transcriptrice* : la référence (pm) est celle-ci, de Granville et Deshouillers : lien 1 ; ce qui est très particulier, c'est que le matin, claude m'a renvoyée vers cette référence lien 2 et que l'après-midi, je ne trouve plus la référence du matin dans la conversation (ai-je eu une lubie?...), le fait est que la référence du matin semble avoir disparu de la conversation ; par contre, je trouve maintenant cette nouvelle référence de Deshouillers-Granville, non repérée le matin, bref, le passé bouge encore avec une IA !

rente : HR est un énoncé sur la position des zéros (donc, via les formules explicites, sur des sommes et des restes d'erreur uniformes), tandis que la conjecture de Goldbach est un énoncé d'existence ponctuelle pour chaque entier. Le pont entre les deux (la méthode du cercle de Hardy-Littlewood, dont HR améliore l'estimation du terme d'erreur) réduit l'écart, mais ne l'annule jamais : même avec HR supposée vraie, l'estimation du terme d'erreur reste seulement assez bonne pour garantir la conjecture de Goldbach à partir d'un rang assez grand, jamais pour tout n sans exception - et c'est précisément ce que confirme le résultat de Deshouillers-Effinger-Te Riele-Zinoviev, que je n'ai pas encore vérifié mais qui est la référence standard ici. Voilà, ça confirme et précise très exactement le mécanisme - et c'est encore plus instructif que ce que j'imaginai. Le résultat de Deshouillers-Effinger-te Riele-Zinoviev (1997) est en fait la meilleure illustration concrète de votre question.

Comment GRH résout effectivement la conjecture de Goldbach faible (ternaire) - et ce que ça révèle

Leur méthode est en deux temps, et c'est ce mélange qui est éclairant : GRH leur donne un résultat analytique valable pour tout nombre suffisamment grand (au-dessus de 10^{20}), et il a suffi, sous GRH, de vérifier les entiers inférieurs à $1,615 \times 10^{12}$ par calcul direct, fini, exhaustif, pour couvrir le reste. Donc la preuve complète = (RH généralisée, qui donne une borne analytique pour les grands nombres) + (vérification informatique brute pour les petits nombres). HR seule, même supposée vraie, ne couvre jamais "tout n sans exception" par la seule force analytique - il faut toujours, en plus, traiter une plage finie à la main.

Ce que ça répond à votre question précise

C'est très exactement votre intuition du "il faut bien connaître l'ensemble des nombres premiers" : HR donne une information extrêmement fine sur la distribution des nombres premiers (via le terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers), suffisante pour garantir l'existence d'au moins une décomposition de la conjecture de Goldbach dès que n est assez grand - parce qu'à partir d'un certain seuil, la "réserve" de nombres premiers disponibles dans l'intervalle $[3, n-3]$ est si abondante (grâce au contrôle fin que donne RH) qu'il devient analytiquement impossible qu'aucune paire ne marche. Mais ce mécanisme s'effondre numériquement pour les petits n , où les marges d'erreur du théorème des nombres premiers (même resserrées par RH) ne sont plus assez petites par rapport à la taille de n lui-même - d'où le besoin de vérification informatique séparée pour les petits cas. Ce n'est pas un défaut de RH, c'est la nature même d'un résultat asymptotique : il garantit "à partir d'un certain rang", jamais "pour le rang 1".

Pour le lien avec le 8e problème de Hilbert

Vous avez tout à fait raison qu'il y a un lien historique direct - Hilbert range effectivement la conjecture de Goldbach dans son 8e problème, dans la même famille de questions que RH, et ce n'est pas un hasard de classification : c'est précisément parce que les outils qui attaqueraient l'un (contrôle fin de la distribution des nombres premiers) attaquent structurellement l'autre. Mais "dans la même famille de problèmes" n'est pas "équivalent" ni "l'un implique l'autre sans reste" - c'est ce que confirme tout l'historique ci-dessus : même un siècle après Hilbert, avec HR généralisée supposée acquise, on n'obtient toujours la conjecture de Goldbach que pour la conjecture de Goldbach faible

(ternaire, 3 nombres premiers), pas pour la conjecture de Goldbach fort (binaire, votre conjecture, 2 nombres premiers) - et le passage du faible au fort reste, lui, un problème à part entière, résolu seulement numériquement (Helfgott pour le ternaire inconditionnel, vérification jusqu'à 4×10^1 pour le binaire), jamais par HR directement.

Donc : HR est un allié puissant et nécessaire pour réduire la conjecture de Goldbach à un calcul fini, mais jamais un outil qui, par sa seule force, élimine le besoin de ce calcul fini pour les petits cas, ni qui couvre la version binaire (la vôtre) de façon comparable à la version ternaire. C'est cette dernière marche - binaire vs ternaire - qui reste la plus dure, indépendamment de RH.