Interview de Jean-Pierre Serre

Bonjour à toutes, et bonjour à tous. En ouverture de notre conférence "Curves over Finite Fields : Past, present and future", nous avons le plaisir de recevoir Jean-Pierre Serre, plus jeune médaillé Fields et premier prix Abel, à l'occasion de la sortie de son dernier livre "Rational Points on Curves over Finite Fields" dans la collection Documents mathématiques de la Société Mathématique de France. Serre, merci beaucoup.

Eh bien, de rien, j'ai le plaisir d'être ici. Mais quel genre de questions avez-vous envie de me poser... ? Parce qu'on m'a souvent posé des questions, alors...

Oui, je sais que ce n'est pas la première fois que vous faites une interview, et on va essayer de ne pas se répéter, et de poser des questions un peu nouvelles, et aussi un peu centrées sur la conférence, le livre.

On va essayer.

On va essayer.

Est-ce que ?... *(désignant des mains ses deux interlocuteurs).*

On va alterner les questions. C'est Elisa qui va commencer.

Par quoi aviez-vous envie de commencer ?

La première question, je pense que c'est naturel, concerne le livre dont nous parlons aujourd'hui, il est tiré d'une série de cours donnés à Harvard...

Oui, oui, bon, un cours que j'ai donné en 85, et sur un sujet où je venais juste de travailler, parce que j'ai commencé à m'intéresser à ça en 83, 84, à peu près. Alors, il n'y a pas grand chose à dire sur le cours à Harvard lui-même, ça s'est très bien passé, ça se passait toujours très bien, à Harvard, il y avait un public très agréable, il n'y a pas de problème. C'est plutôt est-ce que vous avez envie que je vous raconte comment je suis venu à ce sujet-là peut-être...

Oui, par exemple.

Parce que c'est un peu compliqué. C'est un peu compliqué, j'y ai réfléchi ces temps-ci, je crois qu'au début, ce qui m'a attiré, ça a été ce résultat de Golod-Shafarevich sur les tours de corps de classes parce que ça montrait que les discriminants des corps de nombres, contrairement à ce qu'on pouvait penser, pouvaient rester bornés, ou du moins le root discriminant, c'est-à-dire la racine qu'il faut du discriminant pouvait rester bornée dans des tours, alors que visiblement les anciens, disons Schur par exemple, avaient des exemples qui montraient au contraire que le disciminant croît, que la racine n-ième croît. Et ça, ça a été une grande surprise, et du coup, je me suis mis à m'intéresser aux discriminants. Ensuite, il y a eu quelque chose aussi d'intéressant : Stark s'est aperçu que les bornes de discriminant que donne la géométrie des nombres, à savoir Minkowski, pouvaient s'améliorer par les fonctions zeta. Ça c'était très frappant qu'en travaillant juste sur l'équation fonctionnelle de zeta, et par de petites opérations analytiques pas difficiles, il obtenait de meilleures bornes que Minkowski. Ah ! Ça, c'était amusant et Odlyzko avait amélioré ça, ce sont les années 70, 74, quelque chose comme ça, et je me suis rendu compte à ce moment-là qu'en fait tous ces gens utilisaient ce qu'André Weil appelait les formules explicites de la théorie des nombres, c'est-à-dire les formules où vous mettez en relation les valeurs de certaines fonctions pour les nombres premiers d'une part, et pour les zéros de la fonction zeta de l'autre et en gros, c'est une transformation de Fourier qui va de l'un à l'autre. Alors je me suis rendu compte de ça parce que ça, Odlyzko ne l'avait pas vu. Alors

Interview menée à Neuchâtel, le 15 avril 2021, par Elisa Lorenzo-Garcia et Christophe Ritzenthaler, dans le cadre de la conférence "Curves over Finite Fields : Past, present and future".
Cette interview est visionnable ici : https://www.youtube.com/watch?v=hPm7$_x0DP8Q$.
Transcription Denise Vella-Chemla, juin 2021.

du coup, je me suis mis à faire des calculs et c'était très amusant parce que vous obteniez des bornes avec l'hypothèse de Riemann et des bornes sans l'hypothèse de Riemann et je me suis mis à apprécier la force de l'hypothèse de Riemann parce que si je regardais des corps de nombres de degrés 4, 5, des choses comme cela, je m'apercevais que je pouvais en faire qui étaient très voisins de la borne de l'hypothèse de Riemann. Elle était donc ex..., en fait, j'ai même un exemple, je me suis même fait un exemple où je construisais un corps dont la borne "battait" l'hypothèse de Riemann. Heureusement j'ai eu suffisamment de bon sens pour chercher où je m'étais trompé, je m'étais effectivement trompé. Et ça a été un jeu et à ce jeu, j'ai joué beaucoup avec Lenstra par correspondance : on a fait une petite compétition tous les deux, est-ce que tu arrives à faire un corps de tel degré de tel discriminant, oui, oui, oui, j'y arrive, et on a échangé comme ça des lettres, on n'a rien publié là-dessus mais c'était très amusant. Alors après, il y a eu... Alors qu'est-ce qui a commencé, sur les courbes ? Alors, il y a eu Stark et Stark, c'est assez ancien, c'est 60 et quelques, il avait utilisé la méthode p-adique de Stepanov, c'était Stepanov qui avait travaillé là-dessus, c'est ça ? (*interrogeant ses interlocuteurs du regard*), il avait fait une variante de Stepanov où il démontrait mieux que Weil dans certains cas. Alors l'exemple qui m'avait frappé, c'était courbes de genre 2 sur le corps à 13 éléments. Alors comme cette courbe de genre 2, elle revêt une droite qui a au plus 14 éléments, donc elle a au plus 28 éléments et 28 était permis par Weil. Et Stark montrait que non, il n'y est pas. Alors (*il fait la grimace*). Moi, je suis moralement un élève de Weil, ça m'est désagréable qu'une borne de Weil ne soit pas la meilleure. Bon j'ai déjà légèrement amélioré une fois une borne de Weil mais ça, c'est pas sérieux, mais quand même ! Ensuite, il est arrivé, nettement après, un mathématicien, là montrant, mais c'était moins surprenant, qu'on ne peut pas avoir une borne trop près de la borne de Weil parce que ça aurait entraîné des nombres négatifs de points, ça, c'était effectivement un argument magnifique. Finalement, il y a eu cet article, il y a eu Tsfasman-Vlăduţ. Tout ça, c'est vers vers 83 à peu près, quelque chose comme ça. Et puis surtout, il y a eu cet article de Manin qui avait un si beau titre "Combien peut avoir de points une courbe de genre g sur F_2 ?" C'est beaucoup plus beau de demander ça sur F_2 que sur F_q parce qu'il y a un paramètre, là, 2, combien, une courbe de genre 10, de genre 5 ? Combien ?

Ah ! Alors je partais en vacances à ce moment-là et je sais que j'ai passé un mois, je crois que c'était à Ceillac, à me régaler, à essayer de faire ça pour $g = 2, 3, 4$, au fur et à mesure, on y va quoi. Et c'est à ce moment-là que je me suis rendu compte du lien que ça avait avec le jeu sur les discriminants auquel j'avais joué avec Lenstra, qu'il y avait une analogie entre discriminant et genre... Pas aussi évidente que les analogies habituelles, par exemple, que le degré du corps correspond dans cette analogie au nombre de points de la courbe. Alors pourquoi ? Parce qu'en fait, si on a des points rationnels, on les met à l'infini en quelque sorte et ils vont jouer le même rôle que les points à l'infini et sur un corps de nombres, les places à l'infini correspondent au degré à peu près. Alors j'étais moralement préparé à faire ça, à utiliser la formule explicite de Weil que je connaissais bien dans ce cas-là, qui est beaucoup plus facile en plus, donc je me suis beaucoup amusé. Alors amusé... et obligé de temps en temps... (*sifflant entre ses dents pour donner une idée de la difficulté*) de résoudre des problèmes théoriques parce que, par exemple dans le cas de Stark, je tenais beaucoup à comprendre pourquoi il avait réussi à battre Weil, parce que depuis cette époque-là, on avait le théorème de Honda-Tate, donc on savait que toutes les valeurs propres satisfaisant aux conditions de Weil sont possibles pour la variété abélienne. Donc là, j'avais une variété abélienne de dimension 2 qui refusait d'être une jacobienne. Alors, la littérature de cette époque était un peu flottante. On nous disait "les variétés abéliennes, principalement polarisées de dimension 2 sont des jacobiennes, celles de dimension 3 aussi". C'était à peu près ça qu'on entendait. Bon alors, il y avait des petits discours du genre "oui bah, évidemment on accepte un produit de deux courbes elliptiques", c'était comme ça. Hou ! (*se frottant les mains en signe de difficulté*). Ou alors le cas où ça m'a été vraiment utile, ça a pas été tellement le cas de Stark, celui-ci est arrivé assez facilement, mais ça a été le cas de la courbe de genre 7, où... Jusque-là, j'étais arrivé à construire, j'avais trouvé des bornes, j'avais une petite calculette de poche, je pouvais quand-même programmer des petits trucs...

Des nombres de points...

Non, non, non, ça, je ne pouvais pas, non non ça, je ne pouvais pas, non,. Mais je pouvais calculer ce que mes polynômes explicites donnaient, comme bornes, alors je modifiais un petit peu les coefficients, je mettais un 0.1 ici, j'essayais un machin, j'essayais d'arranger, oh, c'était très rigolo. Et simplement pour le genre 7... Alors si je me souviens bien, est-ce que vous vous souvenez, est-ce que la borne, c'est... sur F_2, est-ce que la borne, c'est 11 ? Ou est-ce que c'est 10 ? C'est l'un des deux *(interrogeant du regard ses interlocuteurs, indécis)*. Peut-être que c'est 11, c'est possible, par mes bornes et les formules. C'était quand-même un polynôme d'assez gros degré, pour moi, calculant à la main quoi ! Bon, j'ai fini par arriver à coincer ce polynôme. J'ai été aidé par Cartan. Cartan était tout content, de..., Cartan... Quel âge il avait à l'époque ? Il avait 70 et quelques, ce qui est horriblement vieux comme vous savez *(Serre rit, ayant lui-même 94 ans)*. Mais il aimait bien travailler, il avait une calculette, il m'a aidé, et finalement, j'ai fini par trouver que le polynôme caractéristique, il n'y en avait qu'un de possible, a priori. Pourquoi en fait, il *n'était pas* possible, hou ! Une variété abélienne de dimension 7, ben, j'ai regardé, je me suis dit "ah !", j'ai réussi à le partager en deux morceaux, de 4 et 3 sauf erreur, et qui étaient de résultant 1, ils n'avaient pas de racine commune même modulo p, et donc couper la variété abélienne, oh, ouf ! Ça, je savais quand-même qu'une jacobienne n'est pas coupable, munie de sa polarisation et tout *(murmurant "du Frobenius...")*. C'est comme ça que j'ai appris d'ailleurs un certain nombre de choses sur les courbes, les choses dont j'ai eu besoin. J'ai eu besoin donc de ça, que les variables abéliennes ne sont pas coupables. J'ai eu besoin ensuite pour d'autres choses de regarder si la jacobienne pouvait être un produit de courbes elliptiques. Et là, il y avait des vieux résultats de japonais là-dessus. Bref, j'ai fait mon éducation sur le tas en quelque sorte. Et donc j'ai appris des choses, grâce aux courbes sur les corps finis. Bon, je ne veux pas trop en parler...

Oui, mais donc, juste pour dire, dans ce que vous dites, en fait, dès le départ, en fait, l'aspect asymptotique et l'aspect "on fixe plutôt le genre et on cherche à q", en fait déjà, vous aviez les deux questions un peu mélangées en même temps, en fait ?

Oui, oui, j'ai, bien sûr, oui, oui.

Vous n'avez pas focalisé sur une des choses en vous disant "après, on pourrait inverser"...

Non, pour moi c'est allé en parallèle. Mais j'ai souvent fait ça dans des cours. Par exemple, à Harvard, j'avais fait un cours sur les groupes finis, et c'était, disons, le mardi, la théorie habituelle des groupes finis et le jeudi, la théorie des caractères. J'avais fait aussi un cours sur groupes et algèbres de Lie, et je disais "tel jour, algèbre de Lie et tel jour, les groupes" parce que j'avais l'expérience de ces choses-là, je savais que si je démarrais les groupes de Lie par les algèbres de Lie, toute l'année y passait, c'est long. Tandis que si je faisais les deux en même temps, j'étais tranquille. Et j'ai fait pareil à Harvard, j'ai fait Petits corps F_2 pour un jour et l'autre jour, le genre, le genre fixé. C'était une façon d'être sûr qu'aucun des deux morceaux n'empiète sur l'autre, c'était une protection.

Vous avez dit que vous avez appris beaucoup de choses avec ce cours-là et c'était ça : une même motivation que vous avez pour faire les cours, vous forcer à apprendre, ou...

Je n'ai jamais de motivation.

(Rire d'Elisa).

Je fais ce qui m'amuse, et puis voilà. Et ça m'a amusé en particulier. Mais aussi par le fait que je pouvais exploiter des choses différentes auxquelles j'avais pensé avant, sur les discriminants.

Donc en fait, pour essayer de préciser les choses, il y a eu une invitation de Harvard et vous avez proposé ce cours ? C'est comme ça que ça s'est passé ?

J'avais une invitation plus ou moins permanente d'Harvard. Je pouvais y aller quand je voulais, et chaque fois, je faisais un cours, parce que c'est plus amusant, pour moi, de faire un cours et ils aimaient bien ça. Et c'était moi qui choisissais chaque année le sujet.

Donc la motivation, en fait, pour faire tant de cours, c'était simplement, en fait, que vous aimiez ça, c'était amusant, il y en a sans doute le contact personnel avec les gens... ?

Non, ça n'est pas ça, le plaisir pour moi était de raconter. Et il y avait un public, un très bon public, ça, c'était vraiment bien.

(Elisa, riant.) **En fait, nous avons une question sur ça.**

(Serre l'encourage.) Alors allez-y.

Dans une interview, à Lille, je pense, vous avez dit que les étudiants de Harvard, je ne sais pas si c'est ainsi qu'il faut le dire, étaient "meilleurs" que les étudiants normaliens.

Ce n'est pas ça, j'ai pas dit meilleurs, un !...

Mais dans quel sens ?

Ouf ! *(Soupir encore exaspéré).* Alors je vais vous raconter deux histoires, mais ça n'a pas beaucoup de rapport avec les courbes sur les corps finis, mais...

Avec les cours en tout cas...

Oui, ça a un rapport. J'ai donné un cours à l'École Normale, ce qui est devenu le Cours d'arithmétique, alors je ne fais aucun commentaire sur personne. Mais, ce qui arrivait, c'est que ce cours, je me rappelle, était le mercredi. C'était le mercredi matin, dans une des salles de l'École Normale et je commençais mon cours. Et puis au bout de 15, 20 minutes, arrivait un type, toujours le même. C'était le mercredi, il avait acheté le journal Le Canard enchaîné, il s'installait au premier rang, et il ouvrait son journal, pendant que je faisais mon cours. Je n'ai pas été assez courageux pour le mettre dehors. Eh ben, ça, à Harvard, ce n'était pas possible du tout. Et vingt ans après, à l'École Normale, ça ne s'était pas amélioré, je leur ai fait une série de cours sur un joli sujet chaque fois, chaque semaine, je prenais une jolie petite histoire de maths ; par exemple, les algèbres normées de Gelfand, quelque chose comme ça, un truc isolé, une heure et demi, je racontais, au début, un peu l'histoire du sujet, mais il n'y avait personne, pratiquement, il y en avait un à deux et en fait, en général, ils n'étaient pas de l'École Normale, c'étaient des étudiants d'Orsay qui avaient eu le droit de venir... Et les Normaliens arrivaient... dix minutes... un quart d'heure... une demi-heure... trois quarts d'heure en retard, et au milieu du cours. En plus, ils entraient à côté du tableau... Je me suis juré que je ne recommencerais plus à donner des cours à l'École Normale. Voilà...

D'accord. Bon après, moi, ce que j'espère, c'est qu'on a la dissolution de l'ENA, là, j'espère que vous n'allez pas provoquer la dissolution de l'ENS avec ce qu'on vient de dire maintenant.

(Rires et léger silence de réflexion).

Alors, on a envie de dire que malheureusement les élèves de Harvard payaient quelque chose ou leurs parents payaient assez cher et les élèves de l'École Normale étaient payés et ça, ça change un peu la psychologie, c'est un peu triste mais j'ai peur que ça soit l'explication... Il y avait de ça.

Si on revient un petit peu sur sur le cours, enfin plutôt sur le livre, et sur la manière dont ça s'est passé, donc comme Elisa l'a dit, c'était un cours que vous avez donné en 85, c'est un vieux serpent de mer de l'éditer mais donc, ça a duré un moment, et donc vous avez reçu, en fait, notre proposition de le transformer en livre, il y a à peu près 3-4 ans, comment ça s'est passé, pour vous, de revenir sur un travail qui avait été...

Aucune difficulté.

Comment ça a été de revenir sur un travail alors qu'il s'était écoulé un tel laps de temps, en fait, est-ce que c'était plaisant ?...

Ce laps de temps n'avait pas d'importance non. Quelque chose qu'on a bien compris se garde. Quand on a compris à moitié, ça tombe à zéro pour cent très vite. Mais si on l'a bien compris, ça va. Et ça, à l'époque, je l'avais vraiment bien compris donc je me suis remis dedans sans aucun problème... donc, ça, c'était... Et ça me faisait plaisir qu'il soit publié parce qu'effectivement, c'est un peu idiot d'avoir des choses qui sont juste photocopiées. Puis la rédaction, vous la connaissez, elle n'était pas très précise, la rédaction des notes de cours. Non, non, ça a été agréable, ce qui a été plus difficile pour moi, ça a été de me mettre dans le système de TeX qui était utilisé, qui est un système que je n'utilise jamais parce qu'il est trop savant pour moi, avec les propositions, avec des tas de symboles, et tout. Non, moi, je tape en TeX proposition 1, carrément, et je paye le prix ! C'est-à-dire que quand je change la numérotation... *(Rires).* C'est une catastrophe... ! Mais ça, ça a été dur, mais une fois que je m'y suis mis dedans, ils ont été très gentils. Qui est-ce qui m'a aidé, en particulier, sur TeX ?

Alp Bassa.

Oui, c'est ça, oui, il m'a bien aidé. Mais remettre les choses... J'ai été obligé de permuter certains morceaux par exemple. Et alors, un grand succès de ce bouquin, alors ça, j'en suis ravi, c'est que ça a amené Oesterlé a rédiger cette démonstration qui est vraiment compliquée. Et puis, il l'a joliment rédigée, cette démonstration, et ça s'est inséré, comme chapitre, ça, c'était parfait.

Vous voulez dire sur les formules explicites ? Je me souviens, je pensais à cette difficulté d'éditer un livre tellement longtemps après le cours, je me souviens de cette anecdote, à ce mail que j'ai vu passer où vous écriviez à Beauville : "Beauville, vous avez énoncé ce théorème..."

(L'interrompant pour corriger) "Tu, Tu", on a été à Bourbaki...

(Reprenant) **"Beauville, tu as énoncé ce théorème, à cette époque et d'où ça vient ?"**

(Riant) Oui, mais quelle importance ça a, en plus, je l'ai mis dedans, effectivement, bon, parce qu'aucun des deux ne sait lequel a fait quoi, et puis très bien, c'est parfait.

Et vous avez eu du plaisir aussi, parce que vous vous êtes relu, avec des choses que vous avez complétées, certains paragraphes, en vous disant "peut-être là, j'aurais pu aller un peu plus loin"...

Oui, il y a certains endroits effectivement, où j'ai essayé d'aller un peu plus loin, mais sans plus. Par exemple, j'ai un peu mieux compris les... Il y avait ce cas qui m'avait énormément amusé quand je m'en étais rendu compte. Par accident, je me suis rendu compte que les courbes de Deligne-Lusztig qui avaient été introduites pour des raisons complètement différentes donnaient de bons exemples. C'était d'autant plus drôle que les courbes de Deligne-Lusztig n'avaient aucun point rationnel telles qu'elles sont définies par Deligne-Lusztig. Ce sont des courbes affines, des variétés affines, aucun point. C'est d'ailleurs conforme à cette philosophie que les points rationnels sont les points à l'infini. Chez eux, c'était explicite comme ça. Et ce qLusue j'arrivais à faire... Je n'ai aucun souvenir de la façon dont j'arrivais à trouver les polynômes qui me donnaient les bornes que je voulais, ça... Dans le bouquin, elles sont introduites en disant "Posons".

Probablement, je tâtonnais, et ça, je ne garde pas de souvenir de ces choses-là. En tout cas, c'était là. À la révision, j'ai regardé ce que ça donnait pour d'autres genres qui étaient interdits par Deligne-Lusztig, et ça donne des bornes pas très jolies, mais explicites quand-même. Bon... Bon, continuons...

Bon, un peu en rapport avec la dernière question, est-ce qu'il y avait des questions que vous avez pensé à traiter pendant le cours et que vous n'avez pas eu le temps, ou... qui sont revenues plus tard ?

J'ai l'impression que dans le cours de Harvard, j'ai dit à peu près ce que j'avais envie de dire et que je n'ai rien laissé.

D'accord.

Les questions que j'ai laissées ouvertes, en général, elles le sont encore, alors, ça fait trente et quelques, combien ? *(Rire d'Elisa, qui répond 35.).* Trente cinq presque, oui, bon. Alors sur ces questions-là, peut-être que vous avez envie que j'en parle un peu, je ne sais pas...

Oui, avec plaisir, oui.

Celle que je trouve la plus jolie, c'est d'essayer de montrer que la borne de Weil n'est pas si mauvaise que ça, qu'à une constante près, elle est optimale. Ça, donc, le genre est fixé, par exemple 3, comme vous le savez... "What else ?" comme on dit *(Rires)* et... Ça me ferait plaisir, en quelque sorte, qu'elle soit optimale, mais je n'ai pas vraiment de raison de conjecturer ça. Bon la seule raison, si vous faites une conjecture, autant qu'elle soit jolie. Donc pour que ce soit joli, on aurait envie de conjecturer qu'elle est effectivement optimale mais c'est un peu sentimental comme raison, ce n'est pas de... *(s'adressant à Christophe)* Mais vous, qui avez travaillé dessus, est-ce que vous pensez que c'est optimal pour 3, pour 3 ?

Donc, vous voulez dire qu'on s'éloigne plus de 3, de la borne, mais est-ce que vous mettez 6 ?...

Moi, je sais que j'avais écrit 6 pour avoir de la marge, mais vous, vous savez, il n'y a pas de contre-exemple avec 3.

Non, il n'y a pas de contre-exemple avec 3.

Avec la borne de Weil, ou avec la borne de Weil modifiée.

Avec votre borne.

Ah, bon, alors je pense que mon 6 était relatif à la borne de Weil, c'est pour ça, je pense, que j'avais mis 6.

Non, il n'y a pas de contre-exemple, en même temps, enfin, comme vous dites, sans... C'est un petit peu... On joue un petit peu avec le futur, donc, il n'y a pas vraiment de raison de dire dans un sens ou dans l'autre...

Non, et c'est même un peu bête d'essayer de faire des conjectures dans des situations pareilles. Ça m'est arrivé souvent de faire des conjectures mais il faut un réseau de raisons... ou une harmonie. L'harmonie, là, elle y est, quand-même, je trouve, l'harmonie. Mais donc je n'oserais pas appeler ça une conjecture, vraiment, ça.

D'ailleurs, vous dites c'est une question, je crois, dans le livre.

Mais oui, je me méfie, parce que les gens sont tellement contents, ensuite, de publier un "contre-exemple à une conjecture de Serre". *(Rires).* Je me rappelle un article dans les Annals dont c'était le titre. Et je n'avais jamais conjecturé ça : j'avais dit "on ne sait pas si..." et puis et en fait, même mentalement, je n'avais absolument aucun choix. C'était tellement plus joli de dire "Contre-exemple...".

Mais alors, vous n'avez pas de conjecture, pour le genre 3 ? Parce que pour 4, ce n'est pas 4, ça, on a trouvé un contre-exemple, dans les tables, dans le mainpoint.
- Oui, après , quand on augmente le genre, effectivement...

Pour 4, vous ne pensez pas que c'est borné.

Ah non, on n'a pas dit ça, on a juste dit qu'en fait la règle simpliste qui voudrait dire que ça va être toujours plus petit que g, bon déjà, elle n'est pas vraie pour 2...

Non non non, écoutez, un grand O, on n'en est pas au point de mesurer le grand O, vous voyez, déjà, demander de démontrer que c'est un $O(1)$, c'est une conjecture très optimiste, alors autant dire que c'est pour plus tard...

Mais alors pour 3, si on revient au cas $g = 3$, on ne peut pas conjecturer quelque chose, mais en maths, il faut partir dans une direction. Si je devais partir dans une direction, ça serait la direction de prouver que ce n'est pas le cas.
- De trouver un contre-exemple...

Vous avez bien raison. *(Ils rient car JPS semblait dire qu'il était difficile de choisir).*

Ah vous voyez, quand-même !

Non, non non non, vous avez raison parce que quand on veut réfléchir à un sujet de ce genre, d'ailleurs Nagata disait ça, pour les anneaux commutatifs, pour les exemples et contre-exemples : il essayait de prouver les deux, soit que c'était faux, sont de construire un contre-exemple. Alors, il travaillait, il travaillait, finalement, il y en avait un en général qui gagnait, des deux... Mais travailler sur les deux, j'ai aussi un exemple comme ça, d'un théorème que j'ai démontré, ou quelques heures avant, je ne pouvais pas vous dire si j'allais démontrer que c'était vrai ou que c'était faux. J'essayais de trouver un contre-exemple, je croyais que j'avais trouvé un contre-exemple, et je m'apercevais "Ah ! Bon Dieu ! Non ! Ça ne peut pas marcher **parce que** quelque chose s'y oppose". Et du coup... Mais finalement, c'est le **parce que** qui a gagné et j'ai réfléchi et j'ai alors démontré ce que je voulais. Mais c'est grâce au jeu de balançoire entre les deux. Il y a d'ailleurs un jeu, qui était très à la mode à Princeton en 52, qui est exactement ça.

C'est un jeu qui est sur un grand losange et on dispose de pièces que l'on met, c'étaient des boules, des jaunes et des noires et les jaunes mettent leurs boules, l'un après l'autre, alternativement et il faut qu'ils connectent ce côté-ci avec ce côté-là, donc il faut qu'ils y arrivent ; les noirs doivent connecter *(geste pour désigner la perpendiculaire pour les pions noirs)* et là, c'est un jeu où l'on sait que l'un des deux gagne. Mais quand on y joue, on a constamment en tête les deux stratégies, c'est-à-dire d'empêcher l'autre de connecter et soi-même de connecter. C'est tout à fait analogue au jeu que nous jouons quelquefois, vous essayez de prouver et vous essayez de faire un contre-exemple. Malheureusement, nous ne sommes pas sûrs, nous, que l'un des deux côtés gagne.

Oh, mais c'est une très jolie métaphore. C'est vrai.

C'était Nash qui jouait à ce jeu-là ; on l'appelait le Nash, mais en fait, ce n'était pas lui qui l'avait inventé, ça se fait avec des hexagones, enfin, c'est un joli jeu.

Vous avez en tête d'autres questions comme ceci, qui sont dans le livre, et que vous aimeriez voir un jour résolues.

Sur le sujet des courbes sur les corps finis, il me semble que vous m'en aviez cité une autre, non ? Celle-là, c'est la principale, il n'y a aucun doute.

Il y a le cas asymptomatique, effectivement.

Oh, ils sont un peu moins... Ah ! Quand même, si, sur F_2. Ah oui, le fait que ces bornes sont ridicules, réellement, sur un nombre premier. Ah non, ça, c'est vraiment lamentable.

Vous voulez dire les bornes inférieures. Qu'on n'arrive pas à construire des bonnes familles qui se rapprochent suffisamment...

Oui, sur F_2, si je prends un genre qui est très grand, les exemples connus sont... Non, ça, c'est désagréable parce que, bien sûr, sur les carrés, c'est essentiellement optimal, mais même sur les puissances d'un nombre premier, quand la puissance n'est pas 1, les bornes ne sont pas mal ; tandis que sur 2, cette borne que j'ai fabriquée en log, c'est pas très malin comme méthode, c'est vraiment de la combinatoire facile, je suis même surpris que les combinatoristes n'arrivent pas à faire mieux. Mais de toute façon, un terme en log, alors qu'on attend une puissance... Alors ça, je serais vraiment curieux de savoir quelle est la vraie borne. Est-ce que, par hasard, ce log est correct. En tout cas, c'est une question à laquelle je n'ai aucune envie de réfléchir : j'y ai réfléchi dans le temps, j'ai vu que je ne pouvais rien faire, j'ai abandonné. Ça, c'est...

Vous voyez, là, autant sûrement effectivement c'est peut-être parce que c'est plus mon domaine, sur le genre 3, je dirais que je partirais dans un sens, mais là, savoir si les corps premiers F_p avec p premier, sont vraiment différents de F_{p^3} dans leur comportement.

Ça ne paraît pas normal.

Je n'oserais pas m'aventurer, ni dans un sens, ni dans l'autre.

Non, moi non plus, alors vraiment, alors, autant, j'aurais envie quand même, pour l'autre, que ce soit $O(1)$, que ça marche, tandis que pour 2, il faudrait deviner un ordre de grandeur, et ça, c'est beaucoup plus difficile, tandis que $O(1)$, n'importe qui peut deviner $O(1)$. Mais après, est-ce que c'est $O(p^{1/12})$ ou Dieu sait quoi, non.

Ou alors, il faudrait trouver une raison, je veux dire, presque intrinsèque pour laquelle...

(Il le coupe.) Vous trouvez une démonstration, les raisons... Je ne crois pas au terme de "raisons".

Une démonstration.

(Désignant le nombre élevé de questions sur la feuille de ses interlocuteurs) On ne va pas faire tout ça, à ce rythme.

Non, ne vous inquiétez pas, on y va en diagonale.

Essayez de choisir quelque-chose.

Je voulais juste vous demander, parmi les questions... Vous évoquez beaucoup de choses dans le livre et ça va un peu dans tous les sens, mais je trouve que ça fait vraiment un peu son charme dans le cours : il y a des morceaux de maths qui se recollent un petit peu partout, et à un moment, vous sortez des corps finis pour parler de ce problème des jacobiennes décomposables.

Ah oui, oui.

Vous allez le réaborder après avec Ekedal d'ailleurs, vous êtes revenu dessus plus tard.

Bon, dans mes livres et dans mes articles, j'essaye toujours de mettre des petites choses amusantes, pour qu'ils sortent un peu du thème, pour que ça ne soit pas trop lourd. Gide n'aimait pas beaucoup Romain Rolland. Romain Rolland écrivait des romans et Gide les comparait à ces gâteaux alsaciens un peu lourds et dans lesquels on trouve, de temps en temps, des petits grains de raisin. Et je me suis dit qu'il fallait mettre des grains de raisin dans les textes mathématiques, et de temps en temps, je mets des grains de raisin. Alors quelquefois, ils font sauter en l'air le lecteur qui ne connaît pas le sujet du tout, il se dit "mais qu'est-ce que ça vient faire ?..." C'est un grain de raisin. Et donc, là, le grain de raisin, ce sont ces curieuses questions, effectivement, qu'il y a des courbes de grand genre, dont la jacobienne se casse. Hou ! Elle n'a pas le droit de se casser avec sa polarisation, mais elle se casse, même à isogénie près, c'est déjà.... Et ça, nos ancêtres aimaient beaucoup ça, parce qu'ils étaient tout contents, parce que les intégrales qu'ils ne savaient pas calculer, de genres plus grands, se réduisaient aux intégrales elliptiques, alors ils étaient sur terrain... Oui, parce que c'est la même chose. Dans le livre, je l'ai dit pour les intégrales de première espèce, mais en fait je crois que c'est vrai aussi pour les intégrales de seconde espèce, elles se ramènent aussi aux intégrales elliptiques, je crois, quand la jacobienne est comme ça.

C'est bien possible.

Oui c'est une drôle de question. Avec Ekedal, on s'était amusé à faire des tas d'exemples.

Je crois que c'est 1200, le plus grand exemple, pour une courbe modulaire.

Alors, les deux grands exemples, c'est 1000 et quelques et 500 et quelques, et nous avons publié ensemble une Note aux Comptes-rendus. Et la note aux Comptes-rendus, on nous obligeait à écrire une note aux Comptes-rendus en français et une note aux Comptes-rendus en anglais. Alors dans la note aux Comptes-Rendus en français, j'avais écrit "Nous fabriquons des courbes jusqu'à 1000 machin..." et dans le compte-rendu anglais "des courbes jusqu'à 500 et quelques", oui, j'avais mis des bornes moins bonnes, dans le résumé anglais, pour m'amuser. correctes, bien sûr, mais donc pour m'amuser. Alors est-ce qu'il y en a pour des genres assez grands, est-ce qu'il faut faire des conjectures ? Si un machin marche jusqu'à 1000, il y a des trous d'ailleurs, il y a des trous vers trente et quelques. Là, je n'ose pas faire de conjecture là-dessus. Mais... ça m'avait intéressé d'un point de vue probabiliste parce que si vous cherchez les chances qu'une variété abélienne soit un produit de courbes elliptiques, c'est presque rien : la variété, c'est un truc immense, c'est quadratique en g, j'ai oublié combien c'est. Tandis que les modules de courbes, c'est linéaire en g, il y a énormément de variétés abéliennes, et pourtant en degré 1000, par exemple, vous en trouvez une.

En fait, la philosophie est un peu la même : quand vous cherchez à construire des courbes en partant de variétés abéliennes que vous savez exister par la théorie de Honda-Tate, c'est essayer de localiser si une de ces belles variétés que vous avez construites tombe dans le lieu des jacobiennes. Donc en fait, c'est un peu...

C'est sûr, dans le crâne, ça se loge dans le même genre d'endroit. *(Riant en montrant des endroits divers sur son front)* Cependant, cela n'a rien à voir avec les courbes sur les corps finis, ça, c'est plutôt sur les complexes. Ça chance de niveau d'ailleurs, même, sur les corps finis parce qu'il y a quand-même Frobenius qui a tendance à casser les choses en morceaux, sur $\mathbb{C}$.

Vous faites une remarque à ce sujet en disant qu'effectivement sur les corps finis, la situation est complètement différente, si on fixe les angles des Frobenius.

Oui, on peut aussi formuler... *(s'interrompant)* Bon, alors, est-ce que vous avez d'autres questions ?

Oui, si je peux, sur des questions mathématiques un peu plus précises ; c'était dans le dernier cours que vous avez donné, c'est celui à Taiwan.

Ce n'est pas mon dernier cours.

Ah, pardon.

Oui, peut-être que c'est le dernier, oui, je me suis beaucoup amusé.

Et le livre, avec les notes...

Ah oui, ce n'était pas tellement différent. Mais d'abord ce n'étaient pas des courbes, c'étaient, en général, des variétés. Et le jeu n'était quand-même pas le même : on fixe la variété, on se la donne quand même, par exemple une courbe elliptique, et puis vous la regardez modulo tous les p donc et vous regardez comment ça varie, asymptotiquement, formule exacte, rapport avec Langlands, là, on tombe justement sur toutes les choses dans la philosophie de Langlands. Et c'est très différent mais il y a quand-même des petits rapports, par exemple, dans une question que je pose dans le... (est-ce que je l'avais posée à Harvard ou est-ce que je la pose seulement dans le texte de maintenant) : quand vous prenez une courbe elliptique, oui, c'est uniquement elliptique, et que vous la réduisez modulo p et vous vous demandez si vous trouvez une infinité de fois ou pas la borne de Weil.

Vous aviez posé la question à l'époque.

Et, semble-t-il, il a été démontré en multiplication complexe et j'aimerais vraiment, d'ailleurs, comprendre la démonstration, parce que je suis vraiment très surpris qu'on ait pu faire ça et ça, bon, ça avait sa place dans le bouquin, de dire ça. Mais ça a des rapports avec des choses assez différentes, qui m'avaient beaucoup impressionné, de Bhargava, Bhargava arrivant à estimer des nombres de points dans des régions, dans des situations où les méthodes standard de Minkowski ne marchent pas, parce que le truc est par exemple... *(décrivant la forme de la variété avec ses mains)*, il y a bien des pointes très fines, et si la taille de la pointe est plus petite que 1, vous ne pouvez pas remonter le nombre de points entiers en vous disant que c'est la surface, quoi, c'est pas... Mais, lui, il y arrive, à faire des choses comme ça, Bhargava. Mais là, on s'écarte un peu...

Non, non, pas du tout

Toutes ces choses forment un ensemble délicieux !

Dans ce cours-là, par exemple, vous parlez de la conjecture de Sato-Tate, des groupes de Sato-Tate et vous donnez des actions.

Alors ça, c'est quelque chose qui m'a intéressé depuis très très longtemps. J'ai finalement fait publier une lettre que j'avais écrite à Borel quand j'avais commencé à comprendre ces choses-là. *(Long soupir)* Ah ! Quelle est la grande période de ces choses-là ? C'est 76 ou 67, je ne me souviens plus, une erreur de dix ans, c'est embêtant ! Il y a eu... C'est 67, c'est ça, parce que vers 67 sont apparues 3 choses en même temps : la théorie des motifs de Grothendieck, la philosophie de Langlands, et la troisième chose, une chose de Sato-Tate, tout ça, ah, non, troisième chose : l'article de Weil. L'article de Weil, pour moi, s'est combiné avec le reste. Parce que voilà ce que faisait Weil : si vous prenez une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, un peu tout le monde pensait que la fonction L qu'on peut écrire a une équation fonctionnelle du type habituel. À l'époque, on n'avait pas une idée claire de la notion de conducteur, donc on ne savait pas à quel niveau. Mais ce qu'on savait, par la faute de Hecke, si j'ose dire, eh bien, c'est que dès que le conducteur était au moins 4 ou 5, il y avait une infinité de fonctions qui avaient cette équation fonctionnelle mais qui étaient plus moches les unes que les autres et qui n'étaient visiblement pas celles qu'on voulait. Ça, c'était très démoralisant, parce qu'on se disait "non, on n'arrivera jamais à montrer que...". Et puis Weil fait cet article "Caractérisation par leur Functionline Lineshungun".

Ne vous inquiétez pas, on est en suisse romande, ils ne vont pas vous attaquer pour ça.

J'ai le droit de toute façon. Gleichungen, parce qu'il avait repris le titre d'un article de Hecke, où c'était Gleichung... et ce que montrait Weil, c'est que... et c'était une de ses philosophies... que si une série de Dirichlet a un sens arithmétique et que vous la tordez par des caractères, vous mettez des petits $\chi(n)$ devant, elle doit aussi avoir de bonnes propriétés, l'équation fonctionnelle par exemple, et alors là, il montre que si on ajoute ça, si on ajoute qu'en tordant, il y a une équation fonctionnelle et un rabiot, un rabiot auquel vraiment personne n'avait pensé, ça ne suffit pas : il faut que la constante de l'équation fonctionnelle dépende de la torsion d'une façon complètement explicite assez subtile avec des sommes de Gauss. À ce moment-là, oui, c'est une forme modulaire. Alors ça, quand nous avons vu ça, on a... C'est pour ça que j'ai trouvé ridicule la controverse avec Shimura parce que Shimura n'avait rien fait dans cette direction-là. Il n'avait même pas cité la conjecture de Taniyama, mais c'est bien puisque Taniyama était un copain et puis, ça a été publé. Mais il n'avait rien fait. Tandis que Weil, là, en introduisant cette idée, ouh ! ! ! On était tous (Birts, Tandayer), tout ça, ça a été un énorme... Tout ça, c'est en 67, qui est pour moi une année-charnière en théorie des nombres. Et puis tout ça prenait en masse, avec les motifs qui devaient donner des formes modulaires, c'était merveilleux, c'est resté merveilleux.

Vous voulez dire que c'est encore le sujet ou le point mathématique qui vous qui vous émerveille le plus à l'heure actuelle, ces espèces de grands ensembles avec Langlands...

Oui, oui, je crois. D'autant plus que les derniers sujets passionnants. Prenez l'hypothèse de Riemann. L'ennui, c'est que si vous travaillez là-dessus, vous risquez de passer votre vie à ne pas la démontrer. Par exemple, Paul Cohen y a passé une bonne partie de sa vie, Halphen, tandis que le groupe de choses qui s'appelle la philosophie de Langlands se découpe en morceaux, en petits morceaux, petits morceaux qui ont l'avantage de, expérimentalement, on les voit qui se font petit à petit peu, même si ce sont des articles de 300 pages qui font les petits morceaux *(riant)*. Mais, mais au moins, les gens qui travaillent là-dessus arrivent en général à faire quelque chose, c'est beaucoup plus agréable pour des gens, c'est difficile. Mais surtout, c'est une unification extraordinaire, et puis des gens qui savent l'utiliser en déduisent des choses très concrètes, des gens comme Gross par exemple, ils ont des déduisent l'existence d'extensions de $\mathbb{Q}$ avec des groupes de Galois donnés, par exemple. Ça a eu des retombées qui n'étaient absolument pas prévues, par ça. Donc de loin, je dirais, du moins de ce que je connais des maths, je dirais que c'est ce qu'il y a de plus important. Mais je n'y travaille surtout pas, non non.

J'allais dire, pour essayer justement un peu de positionner ces grandes théories mathématiques, les courbes sur les corps finis, en tout cas comme vous l'avez fait, on a l'impression, en tout cas, en lisant le livre, que vous avez un vrai plaisir en fait à manipuler différentes sortes de maths. De temps en temps, vous faites un exemple, de temps en temps, vous partez sur un théorème de théorie des nombres, de temps en temps, vous avez besoin d'un gros argument de théorie algébrique, et ce mélange, de dire, ben oui, que de temps en temps, on doit faire de l'algorithmique, de temps en temps on doit faire des exemples, de temps en temps on doit faire des choses expérimentales, c'est assez jouissif mais on a l'impression que c'est vraiment quelque chose qui vous plaît.

Alors le bouquin sur le cours de Taiwan, il est encore plus comme ça parce que il y a des théorèmes carrément sur les caractères des sous-groupes finis, il y a des fractures... Là, c'est un mélange parce qu'on est tout près de Langlands, là-dedans, justement, mais en même temps... *(Temps de réflexion)* Oui, vous donnez une idée de ce que je ne veux pas faire : j'ai été très choqué, une fois, Lang, nous expliquant dans un exposé, il avait fait avec quelqu'un d'autre une série d'articles sur un certain sujet. Et il nous avait dit en s'en vantant "Et nous avons essayé qu'il n'y ait qu'une seule idée par article." Alors je l'avais interrompu et je lui avait dit "at most one !"[1]. Mais ça, ça me dégoûtait, comme idée, l'idée que dans un article, il n'y ait qu'une idée originale, oh non non, si on pour mettre plus, ah ! J'aimais beaucoup les articles, j'en avais écrit un par exemple, sur le groupe $SL(2)$ et sur les groupes de congruence, où il y avait deux cas, et dans un cas, c'était de l'arithmétique assez difficile, et dans l'autre, c'était de la géométrie, c'étaient des géodésiques et des trucs comme ça et j'étais ravi que... Ah non,cette idée de Lang était, mmm !

Généralement, de créer des liens, en fait, entre les choses, en mathématiques, c'est ça qui est plaisant, qui est beau ?

Vous avez employé "créer"...

Elles sont là.

Les liens, ils existent, oui.

Alain Valette nous a raconté qu'il y a 10 ans, enfin ou quelque chose comme ça, vous aviez été invité, c'était à Lausanne, et en sortant, vous aviez trébuché mais apparemment, grâce à vos réflexes venant du judo, vous aviez réussi à faire une...

Je me souviens, c'était au Copernic, j'ai buté contre quelque chose par terre, et j'avais fait un tout petit peu de judo quand j'étais jeune, et le peu qu'on en avait fait, on m'avait appris uniquement à tomber et

1. Au plus, une. *(inclut 0)*

alors j'ai fait ce qu'on doit faire dans ces cas-là, j'ai laissé aller, j'ai fait un tour complet et puis voilà, je me suis redressé. Ils étaient un peu inquiets à l'idée qu'à 80 ans et quelques, ou quoi...

(Une quatrième personne (peut-être Alain Valette), collègue de Serre, dit sans qu'on le voie)

Oui, on s'était inquiétés.

Oui, vous vous étiez inquiétés, moi pas.

Mais vous citiez l'escalade, moi j'y vois souvent, quand même, en fait, on est confronté à un problème quand on fait de l'escalade.

Oui, oui oui, d'ailleurs d'ailleurs les anglais appellent "problème", ce que nous appelons une "voie d'escaladé", pour eux, ça s'appelle "problème", c'est ça le mot, oui, c'est très amusant. Parce que ce n'est pas comme l'escaladé en salle où il y a un nombre assez clair de prises, non non là, vous essayez de chercher si vous trouvez une astuce, vous mettez le pied un peu mieux, ça passe.

Donc c'est comme les maths ;

Oui, mais vraiment, mon niveau d'escaladé n'était vraiment pas haut. J'ai un affreux souvenir, affreux, parce que j'aurais pu causer un accident, céait il y a environ cinquante ans. Bombieri était venu à Paris et je lui avais dit "mais viens avec moi" (je ne me rappelle plus si je parlais français avec Bombieri, ou anglais) "viens avec moià Fontainebleau. Il est venu avec moi, il était habillé en veston, et tout ça, et puis il y avait un rocher qui montait *(mesurant au jugé en regardant le plafond)* pas tout-à-fait, je veux dire un peu moins que le plafond, mais pas beaucoup moins, un angle... Moi j'avais grimpé et je lui ai dit "tu peux y aller, tu peux y aller" Ouh ! ! ! En chaussures de ville ! Alors, il y va, il sort (de la voie) et me dit après ça "Plus jamais ! Plus jamais !". Alors l'histoire a une suite, à savoir que 30-40 ans après, je repasse à cet endroit, je n'aimais pas trop cet endroit, je me suis souvenu, j'ai fait faire ça à Bombieri en chaussures de ville, moi qui ai des chaussures comme il faut, je vais y aller, et c'était il y a cinq ans, j'avais donc un âge respectable, bon j'y vais, et puis tout à fait en haut, j'ai glissé et je suis tombé. En principe on a un tapis de sol, un crashpad, bien entendu, je suis tombé à côté du crashpad. Je suis tombé directement sur les pieds, je me suis tassé comme ça, le lendemain, je ne pouvais plus marcher et puis ça s'est arrangé et j'ai écrit à Bombieri, tu sais, il y a une justice divine *(Rires)*. Et Bombieri m'a répondu, non non non, je te le garantis, ce n'est pas la justice divine, c'est le diable, c'était rassurant... bon !

Eh bien merci en tout cas.

Merci d'avoir écouté.

C'était un plaisir.