Transcription en LaTeX de petits extraits du livre d'Yves Coudène, *Théorie ergodique et systèmes dynamiques*, EDP sciences, Denise Vella-Chemla, juin 2026.

[page 33]

3. Exemple de la multiplication par 2

On considère la transformation de $[0,1[$ dans $[0,1[$ donnée par :

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ 2x-1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

Montrons qu'elle préserve la mesure de Lebesgue et qu'elle est mélangeante.

Preuve. L'image réciproque d'un intervalle $[a,b]$ par T est une union disjointe de deux intervalles de longueur $(b-a)/2$, comme illustré sur la figure 2. La transformation conserve la mesure de Lebesgue.

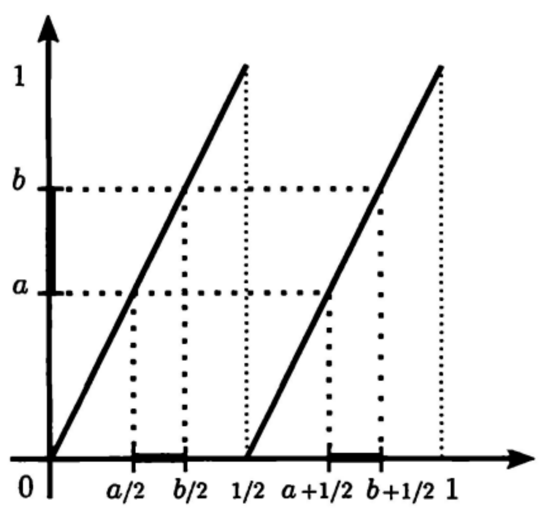

FIGURE 2. Multiplication par 2.

Pour démontrer le mélange, on peut se restreindre au cas où A est de la forme

$$[k/2^n, k+1/2^n[, n \in \mathbf{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1,$$

car ces intervalles engendrent la tribu des boréliens. L'ensemble $T^{-N}[k/2^n,(k+1)/2^n[$ est composé des 2^N intervalles suivants :

$$\frac{(k+i2^n)}{2^{n+N}}, \frac{k+1+i2^n}{2^{n+N}}.$$

Si $n+N > n'$, l'intersection de ces intervalles avec $B = [k'/2^{n'}, k'+1/2^{n'}[$ est constituée de $2^{N-n'}$ intervalles de longueur 2^{-n-N}, ce qui donne la relation recherchée : $\mu(B \cap T^{-n}A) = \mu(A)\mu(B)$. $\square$

[page 44-46]

3. Application aux automorphismes du tore

Appliquons cet argument aux automorphismes hyperboliques du tore $\mathbf{T}^n$, de façon à donner une nouvelle démonstration d'une proposition vue au chapitre précédent.

Proposition 7. Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients entiers de déterminant 1, sans valeurs propres sur le cercle unité. Cette matrice induit une application sur le quotient $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$ qui préserve la mesure de Lebesgue et qui est mélangeante.

Preuve. Notons E_s la projection sur le tore du sous-espace vectoriel associé aux valeurs propres de module inférieur à 1. Soit E_u la projection sur $\mathbf{T}^n$ du sous-espace associé aux valeurs propres de module supérieur à 1. Le cas de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est illustré sur la figure 1. Ces deux sous-espaces sont en somme directe et engendrent $\mathbf{R}^n$. Les feuilles stables et instables de l'application induite par la matrice sur le tore sont données par $W^{ss}(x) = x + E_s, W^{su}(x) = x + E_u$.

CHAPITRE 4. L'ARGUMENT DE HOPF

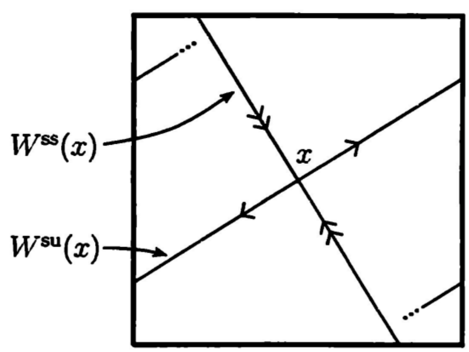

FIGURE 1. **Feuilles stables et instables de l'automorphisme du tore $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.**

On se place dans un système de coordonnées dirigé selon E_s et E_u, ce qui donne une carte $(x, y) \in U$ définie dans un voisinage U d'un point quelconque du tore. Dans cette carte, les feuilles stables sont horizontales, les feuilles instables verticales et la mesure de Lebesgue prend la forme $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Soient $f \in L^2(\mathbf{T}^n)$ une fonction définie sur le tore et g une valeur d'adhérence faible de la suite $f \circ T^n$. Nous avons montré que cette fonction g est invariante par W^{ss} et W^{su}. Dans le système de coordonnées (x, y), elle ne dépend donc pas de x et de y, en restriction à un sous-ensemble de U de mesure totale. Le lemme suivant montre qu'elle est constante presque partout sur U.

Lemme 3. *Soient $(X, T, \mu), (Y, S, \nu)$ deux espaces probabilisés et $f : X \times Y \to \boldsymbol{R}$ une fonction L^2. On suppose qu'il existe deux fonctions mesurables $\varphi_1 : X \to R$ et $\varphi_2 : Y \to R$ et un sous-ensemble*

$Z \subset X \times Y$ de $\mu \otimes \nu$-mesure totale, tels que :

$$\forall (x,y) \in Z, \quad f(x,y) = \varphi_1(x), \quad f(x,y) = \varphi_2(y).$$

Alors f est constante presque partout.

Preuve. D'après le théorème de Fubini, il existe $Y_0 \subset Y$ de mesure totale et $x_0 \in X$ tels que $\{x_0\} \times Y_0 \subset Z$. Pour tout $(x,y) \in Z \cap (X \times Y_0)$, le point (x_0, y) est dans Z, ce qui implique : $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(y) = f(x,y)$. Le lemme est démontré. $\square$

La fonction g est localement presque constante, en vertu du lemme que nous venons de démontrer. Il faut en déduire qu'elle est constante presque partout.

Lemme 4. *Soient X un espace métrique, μ une mesure dont le support est connexe et g une fonction localement presque constante. Alors g est constante pour presque tout $x \in \operatorname{supp} \mu$.*

Preuve. Pour tout $x_0 \in \operatorname{supp} \mu$, nous pouvons trouver un $r_{x_0} > 0$ tel que g est constante presque partout sur $B(x_0, r_{x_0})$, égale à C_{x_0}. Posons pour $x \in \operatorname{supp} \mu$:

$$\overline{g}(x) = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

La fonction $\overline{g}$ est localement constante sur supp μ, elle vaut C_{x_0} sur l'ensemble $B(x_0, r_{x_0}) \cap \operatorname{supp} \mu$. Par connexité du support, nous en déduisons que $\overline{g}$ est constante et que la constante C_{x_0} ne dépend pas de x_0 ; notons-la C.

Rappelons que le support d'une mesure finie est à base dénombrable : on peut trouver une famille dénombrable d'ouverts $\mathcal{D}$ telle que tout ouvert non vide s'écrit comme une union d'éléments de cette famille. Cette propriété classique est démontrée dans l'annexe C. Pour tout $x_0 \in \operatorname{supp} \mu$, on peut donc trouver $U \in \mathcal{D}$ tel que $x_0 \in U \subset B(x_0, r_{x_0})$. La famille des ouverts $\{U_{x_0}\}_{x_0 \in X} \subset \mathcal{D}$ ainsi obtenue est dénombrable, recouvre $\operatorname{supp} \mu$ et la fonction g est constante égale à C presque partout sur chacun de ces ouverts. On en déduit que g est constante presque partout sur $\operatorname{supp} \mu$. $\square$

On a montré que toute valeur d'adhérence g de $f \circ T^n$ est constante presque partout. Comme l'intégrale de g est égale à celle de f, nous voyons que $\int f \, \mathrm{d}\mu$ est la seule valeur d'adhérence de $f \circ T^n$ pour la topologie faible. Par compacité, cela implique la convergence de la suite $f \circ T^n$ vers la constante $\int f \, \mathrm{d}\mu$. La transformation est bien mélangeante relativement à la mesure de Lebesgue. $\square$

Le point clef dans cette preuve est l'existence d'un système de coordonnées dans lequel les feuilles stables et instables s'identifient aux horizontales et aux verticales, et tel que la mesure invariante est équivalente à une mesure produit. La mesure est dite absolument continue le long des feuilletages stables et instables.

[pages 77-78]

Exemple. Posons

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [1/2, 1[, \end{cases}$$

c'est-à-dire $S(x) = 1 - |2x - 1|$ pour $x \in [0, 1[$. Un calcul direct montre que S est conjuguée à $T(y) = 4y(1 - y)$ sur $[0, 1[$ par le biais de l'homéomorphisme suivant :

$$y = \varphi(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} {[0,1[} \arrow[r, "x \mapsto 1-|2x-1|"] \arrow[d, "\varphi"'] & {[0,1[} \arrow[d, "\varphi"] \\ {[0,1[} \arrow[r, "y \mapsto 4y(1-y)"'] & {[0,1[} \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est illustré par la figure 1. Comme S est mélangeante relativement à la mesure $\mathrm{d}x$, T est mélangeante relativement à la mesure $\mathrm{d}y/(\pi\sqrt{y(1-y)})$. En effet, cette mesure est l'image de la mesure de Lebesgue par φ :

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = 2\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\mathrm{d}x = \pi\sqrt{y(1-y)}\mathrm{d}x.$$

La densité de la mesure invariante par T apparaît clairement sur la figure 2, qui a été obtenue à partir d'expériences numériques.

CHAPITRE 7. CONJUGAISON 81

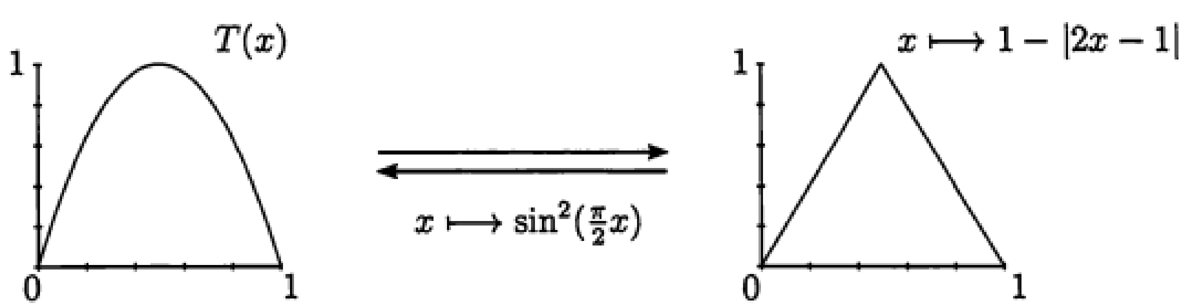

Figure 1. Conjugaison de $T(x) = 4x(1 - x)$ à l'application « tente ».

Cet histogramme comporte 100 bâtons de largeur 1/100. Il a été obtenu à partir du premier million d'itérés par T du point 0,9.

La distribution limite apparaît clairement sur l'histogramme.

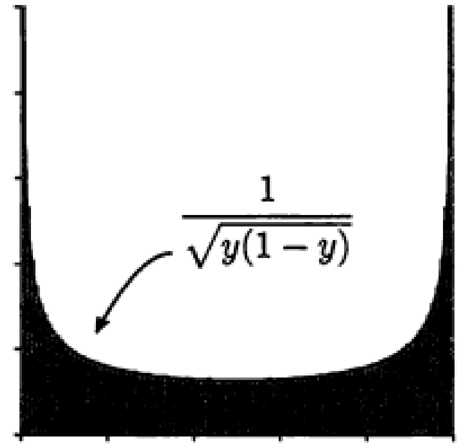

FIGURE 2. Comportement statistique des orbites de $T(x) = 4x(1-x)$.