Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.

G. Peano à Turin.

Dans cette Note on détermine deux fonctions x et y, uniformes et continues d'une variable (réelle) t, qui, lorsque t varie dans l'intervalle $(0,1)$, prennent tous les couples de valeurs tels que $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Si l'on appelle, suivant l'usage, *courbe continue* le lieu des points dont les coordonnées sont des fonctions continues d'une variable, on a ainsi un arc de courbe qui passe par tous les points d'un carré. Donc, étant donné un arc de courbe continu, sans faire d'autres hypothèses, il n'est pas toujours possible de le renfermer dans une aire arbitrairement petite.

Adoptons pour base de numération le nombre 3 ; appelons *chiffre* chacun des nombres 0, 1, 2 ; et considérons une suite illimitée de chiffres $a_1, a_2, a_3, \ldots$, que nous écrirons

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

(Pour le moment, T est seulement une suite de chiffres).

Si a est un chiffre, désignons par $\mathbf{k}a$ le chiffre $2-a$, *complémentaire de* a ; c'est-à-dire, posons

$$\mathbf{k}0 = 2, \mathbf{k}1 = 1, \mathbf{k}2 = 0.$$

Si $b = \mathbf{k}a$, on deduit $a = \mathbf{k}b$; on a aussi $\mathbf{k}a \equiv a$ (mod. 2).

Désignons par $\mathbf{k}^n a$ le résultat de l'opération $\mathbf{k}$ répétée n fois sur a.

Si n est pair, on a $\mathbf{k}^n a = a$; si n est impair, $\mathbf{k}^n a = \mathbf{k}a$. Si $m \equiv n$ (mod. 2), on a $\mathbf{k}^m a = \mathbf{k}^n a$.

Faisons correspondre à la suite T les deux suites

$$X = 0,\, b_1 b_2 b_3 \ldots, \quad Y = 0,\, c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

où les chiffres b et c sont donnés par les relations

$$b_1 = a_1, \quad c_1 = \mathbf{k}^{a_1} a_2, \quad b_2 = \mathbf{k}^{a_2} a_3, \quad c_2 = \mathbf{k}^{a_1+a_2} a_4, \quad b_3 = \mathbf{k}^{a_2+a_4} a_5, \ldots$$

$$b_n = \mathbf{k}^{a_2+a_4+\ldots+a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad c_n = \mathbf{k}^{a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}} a_{2n}.$$

Donc b_n, $n^{\text{ième}}$ chiffre de X, est égal à a_{2n-1}, $n^{\text{ième}}$ chiffre de rang impair dans T, ou à son complementaire, selon que la somme $a_2 + \ldots + a_{2n-2}$ des chiffres de rang pair, qui le précèdent, est paire ou impaire. Analoguement pour Y. On peut aussi écrire ces relations sous la forme :

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = \mathbf{k}^{b_1} c_1, \quad a_3 = \mathbf{k}^{c_1} b_2, \quad a_4 = \mathbf{k}^{b_1+b_2} c_2, \ldots,$$

$$a_{2n-1} = \mathbf{k}^{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}} b_n, \quad a_{2n} = \mathbf{k}^{b_1+b_2+\ldots+b_n} c_n.$$

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, juin 2025.

Si l'on donne la suite T, alors X et Y résultent déterminées, et si l'on donne X et Y, la T est déterminée.

Appelons *valeur* de la suite T la quantité (analogue à un nombre décimal ayant même notation)

$$t = \text{val. } T = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots.$$

À chaque suite T correspond un nombre t, et l'on a $0 \leq t \leq 1$. Réciproquement les nombres t, dans l'intervalle $(0, 1)$ se divisent en deux classes :

α) Les nombres, différents de 0 et de 1, qui, multipliés par une puissance de 3, donnent un entier. Ils sont représentés par deux suites, l'une

$$T = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n\, 2\,2\,2 \ldots$$

où a_n est égal à 0 ou à 1 ; l'autre

$$T' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a'_n\, 0\,0\,0 \ldots$$

où $a'_n = a_n + 1$.

β) Les autres nombres ; ils sont représentés par une seule suite T.

Or la correspondance établie entre T et (X, Y) est telle que si T et T' sont deux suites de forme différente, mais val. T = val. T', et si X, Y sont les suites correspondantes à T, et X', Y' celles correspondantes à T', on a

$$\text{val. } X = \text{val. } X', \qquad \text{val. } Y = \text{val. } Y'.$$

En effet considérons la suite

$$T = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-3} a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n} 2\,2\,2\,2 \ldots$$

où a_{2n-1} et a_{2n} ne sont pas toutes deux égales à 2. Cette suite peut représenter tout nombre de la classe α. Soit

$$X = 0,\ b_1 b_{2n-1} b_n b_{n+1} \ldots$$

on a

$$b_n = \mathbf{k}^{a_2 + \ldots + a_{2n-2}} a_{2n-1}, \quad b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = \mathbf{k}^{a_2 + \ldots + a_{2n-2} + a_{2n}} 2.$$

Soit T' l'autre suite dont la valeur coïncide avec val. T,

$$T' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-3} a_{2n-2} a'_{2n-1} a'_{2n} 0\,0\,0\,0 \ldots$$

et

$$X' = 0,\ b_1 \ldots b_{n-1} b'_n b'_{n+1} \ldots.$$

Les premiers $2n - 2$ chiffres de T' coïncident avec ceux de T ; donc les premiers $n - 1$ chiffres de X' co"incident aussi avec ceux de X ; les autres sont déterminés par les relations

$$b'_n = \mathbf{k}^{a_2 + \ldots + a_{2n-2}} a'_{2n-1}, \quad b'_{n+1} = b'_{n+2} = \ldots = \mathbf{k}^{a_2 + \ldots + a_{2n-2} + a'_{2n}} 0.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que $a_{2n} < 2$ ou $a_{2n} = 2$.

Si a_{2n} a la valeur 0 ou 1, on a $a'_{2n} = a_{2n} + 1, a'_{2n-1} = a_{2n-1}, b'_n = b_n$,
d'où
$$b'_{n+1} = b'_{n+2} = \ldots = b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = \mathbf{k}^{a_2+\ldots+a_{2n}}2.$$
Dans ce cas les deux séries X et X' coïncident en forme et en valeur.

Si $a_{2n} = 2$, on a $a_{2n-1} = 0$ ou 1, $a'_{2n} = 0,\ a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, et en posant
$$s = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n-2}$$
on a
$$b_n = \mathbf{k}^3 a_{2n-1},\ \ b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = \mathbf{k}^3 2,$$
$$b'_n = \mathbf{k}^3 a'_{2n-1},\ \ b'_{n+1} = b'_{n+2} = \ldots = \mathbf{k}^3 0.$$
Or, puisque $a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1$, les deux fractions $0,\, a_{2n-2}2\,2\,2\ldots$ et $0,\, a'_{2n-1}0\,0\,0\ldots$ ont la même valeur ; en faisant sur les chiffres la même opération $\mathbf{k}^3$ on obtient les deux fractions $0,\, b_n b_{n+1} b_{n+2}\ldots$ et $0,\, b'_n b'_{n+1} b'_{n+2}\ldots$, qui ont aussi, comme l'on voit facilement, la même valeur ; donc les fractions X et X', bien que de forme différente, ont la même valeur.

Analoguement on prouve que val. $Y =$ val. Y'.

Donc si l'on pose $x =$ val. X, et $y =$ val. Y, on déduit que x et y sont deux fonctions uniformes de la variable t dans l'intervalle $(0, 1)$. Elles sont continues ; en effet si t tend vers t_0, les $2n$ premiers chiffres du développement de t finiront par coïncider avec ceux du développement de t_0, si t_0 est un β, ou avec ceux de l'un des deux développements de t_0, si t_0 est un α ; et alors les n premiers chiffres de x et y correspondant à t coïncideront avec ceux des x, y correspondant à t_0.

Enfin à tout couple (x, y) tel que $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ correspond au moins un couple de suites (X, Y), qui en expriment la valeur ; à (X, Y) correspond un T, et à celui-ci t ; donc on peut toujours déterminer t de manière que les deux fonctions x et y prennent des valeurs arbitrairement données dans l'intervalle $(0, 1)$.

On arrive aux mêmes conséquences si l'on prend pour base de numération un nombre impair quelconque, au lieu de 3. On peut prendre aussi pour base un nombre pair, mais alors il faut établir entre T et (X, Y) une correspondance moins simple.

On peut former un arc de courbe continu qui remplit entièrement un cube. Faisons correspondre à la fraction (en base 3)
$$T = 0,\, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$
les fractions
$$X = 0,\, b_1 b_2 \ldots, \quad Y = 0,\, c_1 c_2 \ldots, \quad Z = 0,\, d_1 d_2 \ldots$$

où

$$
\begin{aligned}
b_1 = a_1, \quad c_1 &= \mathbf{k}^{b_1}\, a_2, \quad d_1 = \mathbf{k}^{b_1+c_1}\, a_3, \quad b_2 = \mathbf{k}^{c_1+d_1}\, a_4, \ldots \\
b_n &= \mathbf{k}^{c_1+\ldots+c_{n-1}+d_1+\ldots+d_{n-1}}\, a_{3n-2}, \\
c_n &= \mathbf{k}^{d_1+\ldots+d_{n-1}+b_1+\ldots+b_n}\, a_{3n-1}, \\
d_n &= \mathbf{k}^{b_1+\ldots+b_n+c_1+\ldots+c_n}\, a_{3n}.
\end{aligned}
$$

On prouve que $x = \text{val. } X, y = \text{val. } Y, z = \text{val. } Z$ sont des fonctions uniformes et continues de la variable $t = \text{val. } T$; et si t varie entre 0 et 1, x, y, z prennent tous les ternes de valeurs qui satisfont aux conditions $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

M. Cantor, (Journal de Crelle, t. 84, p. 242) a démontré qu'on peut établir une correspondance univoque et réciproque (unter gegenseitiger Eindeutigkeit) entre les points d'une ligne et ceux d'une surface. Mais M. Netto (Journal de Crelle, t. 86, p. 263), et d'autres ont démontré qu'une telle correspondance est nécessairement discontinue. (Voir aussi G. Loria, *La definizione dello spazio ad n dimensioni secondo le ricerche di G. Cantor*, Giornale di Matematiche, 1877). Dans ma Note on démontre qu'on peut établir d'un coté l'uniformité et la continuité, c'est-à-dire, aux points d'une ligne on peut faire correspondre les points d'une surface, de façon que l'image de la ligne soit l'entière surface, et que le point sur la surface soit fonction continue du point de la ligne. Mais cette correspondance n'est point univoquement réciproque, car aux points (x, y) du carré, si x et y sont des β, correspond bien une seule valeur de t, mais si x, ou y, ou toutes les deux sont des α, les valeurs correspondantes de t sont en nombre de 2 ou de 4.

On a démontré qu'on peut enfermer un arc de courbe plane con-tinue dans une aire arbitrairement petite :

1) Si l'une des fonctions, p. ex. la x coïncide avec la variable indépendante t ; on a alors le théorème sur l'intégrabilité des fonctions continues.

2) Si les deux fonctions x et y sont à variation limitée (Jordan, Cours d'Analyse, III, p. 599). Mais, comme démontre l'exemple précédent, cela n'est pas vrai si l'on suppose seulement la continuité des fonctions x et y.

Ces x et y, fonctions continues de la variable t, manquent toujours de dérivée.

Turin, Janvier 1890.

Note de la transcriptrice : ci-dessous, un programme en python, utilisant un système de réécriture de Lindenmayer, et la tortue python-Logo, [1] *du dessin des 3 premiers niveaux de la courbe dite "de Peano".*

```
import numpy as np
import turtle
from turtle import *

def substitue(chaine):
     nouvellechaine = ''
     for k in range(len(chaine)):
          if chaine[k] == 'G':
               nouvellechaine += 'GADAG-A-DAGAD+A+GADAG'
          else:
               if chaine[k] == 'D':
                    nouvellechaine += 'DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD'
               else:
                    if chaine[k] in ['+','-','A']:
                         nouvellechaine += chaine[k]
     return(nouvellechaine)

niveau = 3 ; axiome = 'G' ; chaine = axiome ; mouvements = []
for k in range(niveau):
     chaine = substitue(chaine)
     mouvements.append(chaine)
print('Mouvements par niveau') ; up() ; setposition(-300,0)
down()
for k in range(niveau):
     print(k,' --> ',mouvements[k])
     setup() ; speed(0)
     chaine = mouvements[k]
     for m in range(len(chaine)):
          if (chaine[m] == '+'):
right(90)
          else:
               if chaine[m] == '-':
                    left(90)
               else:
                    if chaine[m] == 'A':
                         forward(100/(3**(k+1)-1))
     up()
     setposition(-300+150*(k+1),0) ; setheading(0)
     down()
exitonclick()
```

Les mots des mouvements et appels récursifs créés par niveaux :
0 −− > `GADAG-A-DAGAD+A+GADAG`

1 −− > `GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A`
`-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A`

[1] Logo, le premier langage informatique explicitement conçu pour les enfants, a été inventé par Seymour Papert, Wallace Feurzeig, Daniel Bobrow et Cynthia Solomon en 1966 chez Bolt, Beranek and Newman, Inc. (BBN).

```
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG
```

$2 --> $
```
GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAG-A-DAGAD+A+GADAGADAGAD+A+GADAG-A
-DAGADAGADAG-A-DAGAD+A+GADAG
```