

Conjecture de Goldbach : une heuristique probabiliste, son erreur, et sa correction

d'après les notes de Denise Vella-Chemla (2019)

Résumé

On reconstruit ici, dans une forme unifiée et formelle, le cheminement de trois notes consacrées à une approche probabiliste de la conjecture de Goldbach. L'idée centrale — minorer le nombre de décomposants de Goldbach d'un entier pair n en multipliant une minoration de $\pi(n/2)$ par la probabilité qu'un nombre premier $x \leq n/2$ ne partage aucun résidu avec n modulo les petits nombres premiers — est juste dans son principe. La première formulation commet cependant une erreur de identification : un produit eulérien fini est confondu avec la valeur régularisée $\zeta(-1) = -1/12$. Une note ultérieure (l'annexe) corrige cette erreur en revenant à une minoration rigoureuse de type Mertens, via les travaux de Rosser et Schoenfeld. On explique pourquoi cette correction est la bonne direction, et pourquoi, même corrigée, l'approche ne peut constituer une démonstration de la conjecture — elle rejoint, par une voie indépendante, l'heuristique classique de Hardy–Littlewood, avec les mêmes limites de principe (problème de parité du crible).

1 Le dispositif commun aux trois notes

Définition 1 (Décomposant de Goldbach) *Soit n un entier pair, $n > 2$. Un nombre premier x avec $3 \leq x \leq n/2$ est un décomposant de Goldbach de n si $n - x$ est également premier.*

Constat 1 (Caractérisation modulaire) *Soit x premier, $3 \leq x \leq n/2$. Alors $n - x$ est premier si et seulement si, pour tout nombre premier $p \leq \sqrt{n - x}$,*

$$n - x \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \not\equiv n \pmod{p}.$$

Le programme commun aux trois notes est le suivant : on commence par exiger que x soit premier (probabilité $\pi(n/2)$, rapportée à l'intervalle $[3, n/2]$), puis on demande, pour chaque petit nombre premier $p \leq \sqrt{n}$, que x évite la classe résiduelle $n \pmod{p}$ — ce qui, par le Constat 1, est nécessaire pour que $n - x$ soit premier.

Remarque 1 (Une condition nécessaire, non suffisante) *Comme le souligne explicitement la première note, le fait que x et $n - x$ évitent toute congruence commune modulo les petits premiers $p \leq \sqrt{n}$ est une condition nécessaire mais non suffisante à la primalité de $n - x$: elle écarte les diviseurs $\leq \sqrt{n}$, pas les diviseurs plus grands. L'exemple donné est éclairant : pour $n = 98$, les entiers 17 et $81 = 98 - 17$ sont tous deux premiers à 98 (au sens de $\gcd = 1$), mais $17 \equiv 98 \equiv 2 \pmod{3}$, donc 17 n'est pas un décomposant de Goldbach de 98, bien qu'aucun des deux ne soit nul modulo un petit premier. La condition retenue est donc un crible, non une caractérisation exacte.*

2 Première formulation : le calcul de probabilité et son erreur

2.1 La probabilité d'évitement modulo p

Fixons un nombre premier $p \leq \sqrt{n}$ et supposons x déjà premier. Par construction $x \not\equiv 0 \pmod{p}$. Il reste à x , modulo p , $p - 1$ classes résiduelles possibles parmi lesquelles une seule, $n \pmod{p}$, est interdite (ou bien aucune, si $p \mid n$ et x a déjà exclu 0). En distinguant les deux cas et en minorant uniformément :

- Si $p \mid n : n \equiv 0 \pmod{p}$, déjà exclu par primalité de x ; $p - 1$ issues favorables sur $p - 1$ possibles.
- Si $p \nmid n : n \pmod{p} \neq 0$ est une classe résiduelle supplémentaire à éviter parmi les $p - 1$ classes non nulles ; $p - 2$ issues favorables sur $p - 1$ possibles.

On minore uniformément (le second cas étant le plus défavorable) la probabilité d'évitement par

$$\frac{1}{p - 1}.$$

En supposant l'indépendance de ces événements pour les différents p premiers $\leq \sqrt{n}$ — hypothèse heuristique, non démontrée — on obtient comme minorant de la probabilité conjointe d'évitement :

$$\Pi(n) := \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p < \sqrt{n}}} \frac{1}{p - 1}.$$

2.2 L'identification erronée à $\zeta(-1)$

La première note réécrit ce produit fini :

$$\prod_{p < \sqrt{n}} \frac{1}{p - 1} = \prod_{p < \sqrt{n}} \frac{1}{p^{-(-1)} - 1} = - \prod_{p < \sqrt{n}} \frac{1}{1 - p^{-(-1)}},$$

puis, en étendant formellement le produit à l'infinité des nombres premiers, identifie l'expression obtenue à $-\zeta(-1)$, via le produit eulérien

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad \text{évalué (formellement) en } s = -1.$$

Constat 2 (Pourquoi cette identification est erronée) *Le produit eulérien $\prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ ne représente $\zeta(s)$ que pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, domaine de convergence absolue. En $s = -1$, le produit eulérien diverge (chacun de ses facteurs $\frac{1}{1-p}$ croît en valeur absolue, et le produit infini n'a pas de limite finie au sens usuel) : il n'existe aucun sens analytique standard dans lequel $\prod_p \frac{1}{1-p}$ vaudrait $\zeta(-1)$. La valeur $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ provient exclusivement du prolongement analytique de ζ , c'est-à-dire d'une fonction définie sur $\operatorname{Re}(s) > 1$ par la série puis étendue par un mécanisme (équation fonctionnelle, formule d'Euler–Maclaurin, régularisation de la somme divergente $1 + 2 + 3 + \dots$) qui n'a plus de rapport avec le produit eulérien à $s = -1$.*

De plus, numériquement : le produit fini $\prod_{p < \sqrt{n}} \frac{1}{p-1}$ décroît vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ (chaque facteur supplémentaire est < 1), alors que $-\zeta(-1) = \frac{1}{12}$ est une constante fixe. Les deux quantités ne sauraient coïncider, même approximativement, pour n grand.

Remarque 2 La confusion est compréhensible et même féconde : l'écriture $p^{-(-1)} = p$ fait apparaître une analogie formelle frappante entre $\frac{1}{p-1}$ et le facteur eulérien $\frac{1}{1-p^{-s}}$ pris en $s = -1$. C'est une coïncidence d'écriture, pas une égalité de valeurs — le type d'erreur qui, historiquement, a aussi égaré nombre de manipulations naïves de séries divergentes avant la mise au point rigoureuse de la régularisation zêta par Riemann et ses successeurs.

3 La correction : retour à une minoration de Mertens

La note intitulée *Annexe à la proposition denitac.pdf* (23.7.2019) corrige explicitement ce point : « On ne peut pas faire référence à $\zeta(-1)$ comme on l'a fait ». Elle propose de remplacer le produit erroné par l'objet correct, le produit de Mertens

$$M(\sqrt{n}) := \prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

qui possède une interprétation probabiliste directe et rigoureuse : c'est la densité asymptotique des entiers premiers à tous les nombres premiers $\leq \sqrt{n}$, donc une minoration légitime (à un facteur près) de la probabilité, pour x donné, d'éviter toutes les classes résiduelles $n \pmod p$.

Théorème 1 (Mertens, forme effective ; Rosser–Schoenfeld 1962) *Pour tout $x > 1$,*

$$\frac{e^{-\gamma}}{\log x} \left(1 - \frac{1}{\log^2 x}\right) < \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

où γ est la constante d'Euler–Mascheroni. (Rosser, Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, *Illinois J. Math.* **6** (1962), corollaire (3.27) du théorème 7, p. 70.)

Théorème 2 (Minoration de $\pi(x)$, Rosser–Schoenfeld) *Pour tout $x \geq 17$,*

$$\pi(x) > \frac{x}{\log x}.$$

(Rosser, Schoenfeld, *op. cit.*, corollaire (3.5) du théorème 2, p. 69.)

3.1 Minoration corrigée du nombre de décomposants

Proposition 1 (Minoration heuristique corrigée) *Sous l'hypothèse heuristique d'indépendance des événements de non-congruence modulo les différents petits nombres premiers, le nombre $G(n)$ de décomposants de Goldbach de n vérifie, pour $n/2 \geq 17$,*

$$G(n) \gtrsim \pi\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{n/2}{\log(n/2)} \cdot \frac{e^{-\gamma}}{\log \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{\log^2 \sqrt{n}}\right).$$

Combiner le Théorème 2 appliqué à $x = n/2$ et le Théorème 1 appliqué à $x = \sqrt{n}$, sous l'hypothèse heuristique d'indépendance qui permet de multiplier la minoration du cardinal $\pi(n/2)$ par la minoration de la probabilité conjointe d'évitement de toutes les classes résiduelles interdites.

Remarque 3 *La note originale (23.7.2019) calcule que le minorant obtenu dépasse 1 à partir de $n = 24$ — un seuil bien plus précoce, et donc bien plus satisfaisant, que celui obtenu par l'identification erronée à $\zeta(-1)$ (qui ne dépassait 1 qu'à partir de $n = 92$, et de façon non rigoureuse).*

4 Pourquoi cette minoration, même corrigée, ne peut pas démontrer la conjecture

Remarque 4 (La nature heuristique de l'hypothèse d'indépendance) *Le point critique, dans les trois notes comme dans leur synthèse ci-dessus, est l'hypothèse : les événements « x évite la classe $n \bmod p$ », pour les différents nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$, sont indépendants. Cette hypothèse n'est démontrée dans aucune des trois notes ; elle ne peut d'ailleurs pas l'être par les méthodes employées (théorie élémentaire des cribles), pour une raison structurelle précise.*

Constat 3 (Lien avec le problème de parité de Selberg) *La quantité $\prod_{p \leq \sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, multipliée par $\pi(n/2)$, est exactement (à des facteurs constants près) l'estimation heuristique de Hardy et Littlewood pour le nombre de décompositions de Goldbach de n , qui prédit l'ordre de grandeur correct $G(n) \sim C_n \cdot \frac{n}{\log^2 n}$ (avec C_n une constante explicite dépendant des facteurs premiers de n). Cette estimation heuristique est très bien corroborée numériquement, mais elle repose sur une hypothèse d'indépendance probabiliste qu'aucune méthode de crible connue ne permet d'établir rigoureusement comme minoration inconditionnelle : c'est le contenu du problème de parité, formulé par Selberg, qui affirme qu'aucun crible n'est, à lui seul, capable de distinguer les entiers ayant un nombre pair de facteurs premiers de ceux en ayant un nombre impair, et donc de fournir une minoration non triviale du nombre d'entiers premiers dans un ensemble cherché par cette seule méthode.*

Remarque 5 (Conclusion) *La trajectoire de ces trois notes est donc la suivante : une intuition juste (minorer le nombre de décomposants par un produit de densités), une erreur de identification analytique (confondre un produit eulérien divergent en $s = -1$ avec la valeur régularisée $\zeta(-1)$), une auto-correction rigoureuse (revenir au théorème de Mertens effectif de Rosser–Schoenfeld), aboutissant à une reconstruction indépendante de l'heuristique de Hardy–Littlewood. Cette reconstruction, aussi correcte soit-elle une fois l'erreur corrigée, hérite des limites de toute approche par crible : elle minore plausiblement $G(n)$ sous une hypothèse d'indépendance non démontrée, mais ne peut, par la nature même de l'outil employé, constituer une preuve inconditionnelle de $G(n) \geq 1$ pour tout n pair suffisamment grand.*

Notes bibliographiques

- D. Vella-Chemla, *Conjecture de Goldbach, où l'on retrouve ζ autrement*, 26 janvier 2019.
<https://denisevellachemla.eu/denita.pdf>
- D. Vella-Chemla, *Conjecture de Goldbach, où l'on retrouve ζ autrement* (version révisée), 29 mai 2019.
<https://denisevellachemla.eu/annexedenita.pdf>

- D. Vella-Chemla, *Annexe à la proposition denitac.pdf*, 23 juillet 2019.
<https://denisevellachemla.eu/denitac.pdf>
- J. B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94.