

Sur la théorie du corps de classes

André WEIL

On notera A_k l'extension abélienne maximale d'un corps de nombres k (extension de $\mathbb{Q}$ de degré fini) ; par I_k le groupe des idèles de k , muni de sa topologie "naturelle" ; par P_k le groupe des idèles principaux ; par $C_k = I_k/P_k$ le groupe des classes d'idèles de k ; par D_k la composante connexe de l'élément neutre de C_k . Le théorème fondamental de la théorie du corps de classes établit un isomorphisme canonique entre G'_k , groupe de Galois de A_k sur k , et C_k/D_k .

On ne connaît pas actuellement d'interprétation arithmétique de C_k lui-même, analogue à celle que fournit le théorème en question pour C_k/D_k . Ou en d'autres termes : alors que la théorie du corps de classes permet d'identifier les caractères du groupe C_k/D_k avec les coefficients des séries L liées à la décomposition des idéaux premiers de k dans les extensions cycliques de k , on ne connaît (sauf dans un petit nombre de cas particuliers, cf. [4]) aucune interprétation analogue pour les caractères de C_k , non égaux à 1 sur D_k .

En attendant de telles interprétations, on peut se demander si divers résultats relatifs aux groupes G'_k , évidents ou du moins faciles à démontrer en raison de la définition de ces derniers comme groupes de Galois, peuvent se "remonter" aux groupes C_k . Par exemple : si K est une extension galoisienne de degré fini de k , et qu'on désigne par $g(K/k)$ son groupe de Galois, le groupe de Galois $G'_{K,k}$ de A_k sur k est une certaine extension de G'_k (sous-groupe) par $g(K/k)$ (groupe quotient), complètement déterminée. Est-il possible, de même, de déterminer d'une manière unique une extension $G_{K,k}$ de C_k par $g(K/k)$ au moyen de propriétés intrinsèques ? Ceci, naturellement, impliquera entre autres l'existence d'une classe de systèmes de facteurs (classe de cohomologie !) privilégiée déterminant (à un isomorphisme près) la structure de l'extension en question.

La réponse est affirmative. Plus précisément, le mémoire [3], qui fait l'objet du présent exposé, définit, pour chaque couple k, K de corps tels qu'il a été dit ci-dessus, (a) un groupe topologique $G_{K,k}$ localement compact, et même produit direct d'un groupe isomorphe à R et d'un groupe compact ; (b) un isomorphisme f de C_k sur un sous-groupe invariant fermé de $G_{K,k}$; (c) un homomorphisme de $G_{K,k}$ sur le groupe de Galois $G'_{K,k}$ de A_k sur k , de manière que :

1. Le noyau de φ soit $f(D_k)$, image par f de la composante connexe de l'élément neutre dans C_K ;
2. $\varphi \circ f$ soit l'homomorphisme canonique de C_K sur le groupe de Galois de A_K sur K , résultant de la théorie du corps de classes pour K .
3. Il y ait entre les groupes $G_{K,k}$ et $G_{K,k'}$, chaque fois que k' est intermédiaire entre k et K , et entre les groupes $G_{K,k}$ et $G_{K',k}$ chaque fois que K' est une extension de K galoisienne de degré fini sur k , les relations auxquelles on s'attend a priori ($G_{K,k'}$, s'identifiant avec un sous-groupe

Référence : https://www.numdam.org/item/SB_1951-1954__2__313_0.pdf.

Transcription en $\text{\LaTeX}$: Denise Vella-Chemla, novembre 2025.

de $G_{K,k}$, et $G_{K,k}$ avec un groupe quotient de $G_{K',k}$, exactement de la même manière que les groupes de Galois correspondants).

4. Le “transfert” t (Verlagerung) de $G_{K,k}$ dans C_K induise sur C_k le “bon” isomorphisme de C_k dans C_K et d’autre part détermine, après passage au quotient, le “bon” isomorphisme de $G'_{K,k}$ dans G'_k .

Le problème ainsi posé a une solution et une seule, à un isomorphisme près. La démonstration est pénible et d’ailleurs peu intéressante (elle conduit toutefois à analyser, de plus près qu’il n’avait été fait jusque là, la structure des groupes intervenant dans la question, et en particulier à la détermination complète de la structure de la composante connexe D_k). Les conditions imposées déterminent en particulier d’une manière unique une certaine classe de systèmes de facteurs de $g(K/k)$ dans C_K ; cette classe peut d’ailleurs aussi être caractérisée d’une manière plus simple, par des propriétés de nature plus algébrique et moins arithmétique (cf. les travaux de HOCHSCHILD et NAKAYAMA) ; mais la connaissance de cette classe, si elle détermine la structure du groupe $G_{K,k}$ à un isomorphisme près, n’est cependant pas équivalente à la résolution du problème posé plus haut, puisqu’elle laisse encore subsister une indétermination dans le choix de l’homomorphisme ci-dessus désigné par φ .

L’analogie entre les propriétés de $G_{K,k}$ et celles du groupe de Galois $G'_{K,k}$ peut être poussée plus loin on peut notamment définir, à des automorphismes intérieurs près, des sous-groupes de $G_{K,k}$, attachés respectivement aux idéaux premiers de k , et qui ont des propriétés tout à fait analogues à celles des groupes de décomposition et d’inertie dans $G'_{K,k}$, des valuations de A_k prolongeant les valuations attachées aux idéaux premiers de k . Cette définition permet de transposer, presque sans changement, la théorie d’Artin relative aux séries L “non-abéliennes” et à la décomposition des séries L ordinaires sur K (celles qui sont attachées aux extensions cycliques de K) en produits de séries L “non-abéliennes” sur k . Exactement de même, on obtient ici une décomposition en facteurs des séries L de Hecke sur K (formées au moyen des caractères de C_K non égaux à 1 sur D_K) les facteurs étant attachés aux classes de représentations du groupe $G_{K,k}$.

Ici encore, par application du théorème de Brauer, on démontre que ces facteurs sont des fonctions partout méromorphes (vraisemblablement même des fonctions entières) ; celles-ci satisfont naturellement à des équations fonctionnelles, dont la détermination explicite (sauf en ce qui concerne les facteurs constants qui y figurent) vient d’être obtenue par TAMAGAWA [1] et [2].

Bibliographie

- [1] TAMAGAWA TSUNEO. On the theory of ramification groups and conductors, Japan. J. of Math., t. 21, 1951, p. 197-215.
- [2] TAMAGAWA TSUNEO. On the functional equation of the generalized L -function, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Sect. 1, t. 6, 1953, p. 421-428.
- [3] WEIL ANDRÉ. Sur la théorie du corps de classes, J. math. Soc. Japan, t. 3, 1951, p. 1-35. [Cet article contient une bibliographie].
- [4] WEIL ANDRÉ. Jacobi sums as “Grössencharaktere”, Trans. Amer. math. Soc., t. 73, 1952, p.

487-495.