Sur une surface de révolution du quatrième degré dont les lignes géodésiques sont algébriques

par M. Jules Tannery

Dans la Note XV du *Traité de Mécanique* de Despeyrous, M. Darboux a donné une méthode pour obtenir les surfaces de révolution dont les lignes géodésiques sont fermées. En appliquant cette méthode, j'ai rencontré la surface dont l'équation est

$$16a^2(x^2+y^2) - z^2(2a^2-z^2);$$

les lignes géodésiques de cette surface sont, non seulement fermées, mais encore *algébriques.*

Les calculs qui permettent de vérifier ce fait sont d'une nature trop élémentaire pour qu'il vaille la peine de les développer ici ; je me contenterai d'indiquer les résultats.

La surface présente un point conique à l'origine et se compose de deux parties symétriques par rapport au plan des $x,\ y$; il suffira de considérer l'une d'elles, celle du bas, par exemple, qui a la forme d'une poire allongée dont la pointe serait tournée vers le haut. Le plan du parallèle maximum a pour équation $z=-a$. Si, en conservant l'axe des z, on prend pour plan des $x,\ y$ ce plan du parallèle maximum, on reconnaît que les différents points de la surface s'obtiennent en faisant varier u de $-\dfrac{\pi}{2}$ à $+\dfrac{\pi}{2}$ et θ de 0 à 2π dans les formules

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{i}\cos u \cos\theta,\\ y &= \frac{a}{i}\cos u \sin\theta,\\ z &= a\left(1-\cos\frac{u}{2}+\sin\frac{u}{2}\right); \end{aligned}$$

l'élément linéaire de la surface est alors

$$ds^2 = \frac{a^2}{16}[(a+\sin u)^2\ du^2 + \cos^2 u\ d\theta^2]$$

et l'équation différentielle des lignes géodésiques est

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\cos\alpha}{\cos u}\frac{\alpha+\sin u}{\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2 u}},$$

en désignant par α l'angle sous lequel la ligne géodésique coupe le parallèle maximum.

L'intégration se fait sans peine au moyen de la substitution

$$\sin u = \sin\alpha\sin\varphi$$

et la même substitution permet de rectifier la courbe.

On parvient ainsi aux équations suivantes dont l'une ou l'autre peut définir la ligne géodésique qui passe par le point où la partie positive du nouvel axe des x rencontre la surface : la constante d'intégration a, en effet, été déterminée de façon que θ et u puissent s'annuler en même temps

$$\sin(\theta-\alpha) = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2 u}}{\sin^2\alpha}\ \frac{2\sin u - \sin^2\alpha(1+\sin u)}{\cos u(1-\sin u)},$$

$$\cos(\theta-\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\ \frac{\sin^2\alpha(1+\sin u)-\alpha\sin^2 u}{\cos u(1-\sin u)}.$$

Retranscription de l'article du Bulletin des Sciences Mathématiques, Paris, 1892, p. 190-192

Supposons que l'on parte de la valeur $u = 0$, que α soit compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et que le radical soit d'abord positif ; quand u croît de 0 à α, θ croît de 0 à $\pi + \alpha$, z augmente continuellement et l'on obtient une première branche de courbe C_1 qui, en contournant la surface, s'élève au-dessus du parallèle maximum ; lorsque u décroît de α à 0, on doit changer le signe du radical, pour que θ continue de croître ; θ croît alors de $\pi + \alpha$ à $2\pi + 2\alpha$; la portion de courbe C_2 que l'on obtient ainsi est symétrique de C_1 par rapport au plan méridien de longitude $\pi + \alpha$; C_1 et C_2 se croisent en un point pour lequel on a

$$\theta = \alpha \qquad\qquad \sin u = \frac{\sin^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha}.$$

Lorsque u décroît de 0 à $-\alpha$, θ croît de $2\pi + 2\alpha$ à $3\pi + \alpha$; on obtient ainsi une portion de courbe C_3 qui descend au-dessous du plan des x, y jusqu'à ce que l'on soit dans le plan de symétrie : le point le plus bas de C_3 est sur la même parallèle à l'axe des z que le point le plus haut où se raccordent C_1 et C_2 : enfin, quand u croît de $-\alpha$ à 0, il faut encore changer le signe du radical ; θ croît de $3\pi + \alpha$ à 4π ; et l'on obtient une portion de courbe symétrique de C_3 ; la courbe totale est fermée. Elle présente la forme d'un 8 gauche : on peut se figurer le point double du 8 sur la partie antérieure de la surface, chacune des boucles passant derrière la surface, l'une en haut, l'autre en bas. Il est très aisé d'imaginer un fil fermé affectant cette forme et tendu sur la surface ; mais il y a plus : on vérifie sans peine que la longueur totale de la courbe est indpendante de α et qu'elle est, par conséquent, égale à deux fois la circonférence du parallèle maximum, ou encore à la longueur de la courbe méridienne : parallèle et méridienne sont en effet des courbes géodésiques limites, qui correspondent aux hypothèses $\alpha = 0; \alpha = \frac{\pi}{2}$. En sorte que le *même* fil, en se déformant de manière à rester tendu sur la surface, permettra de représenter toutes les lignes géodésiques. La construction d'un modèle qui permettrait de constater expérimentalement ces résultats n'offrirait évidemment aucune difficulté.

Enfin, si l'on projette la ligne géodésique sur son plan de symétrie, on trouve, en conservant le même axe des z et en prenant pour axe des x l'intersection du plan de symétrie avec le plan du parallèle maximum, l'équation

$$x = \frac{1}{4} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{[a^2 + z(\alpha a - z)]a^2 \sin^2 \alpha - \alpha(a^2 - z^2)^2}{a(a - z)^2} \ ;$$

la seule partie de cette courbe qu'il convienne de garder est celle qui est contenue à l'intérieur de la courbe méridienne ; il est à peine utile de dire que les deux courbes sont tangentes au point qui correspond au point double de la ligne géodésique.