

## Une théorie générale des spectres I

M.H. Stone

La théorie mathématique des spectres traite du problème de la valeur caractéristique (Eigenwertproblem) pour les opérateurs linéaires, et fournit un traitement général unifié pour les cas typiques du problème survenant en mathématiques appliquées. Au cours des dernières années, la tendance à accentuer les aspects algébriques de la théorie spectrale est devenue de plus en plus prononcée. Cette tendance est tout aussi évidente dans les applications que dans les développements purement mathématiques, étant une caractéristique de la théorie quantique et du calcul de Heaviside. Dans la présente note, nous esquissons de nouvelles étapes dans le sens d'une "algèbre" approfondie de la théorie spectrale : nous montrerons que sans la médiation d'aucune théorie d'intégration, il est possible de définir des fonctions générales des opérateurs et d'élaborer leur calcul.

On considère un système  $R$  d'éléments  $a, b, c, \dots$ , qui, à des fins d'illustration peuvent être interprétés comme des opérateurs, avec un sous-système  $P$  d'éléments dits "positifs". Les conditions suivantes sont exigées :

- (1) en termes d'addition et de multiplication,  $R$  est un anneau commutatif, et associatif avec unité  $e$  ;
- (2) pour chaque nombre naturel  $n$ , l'équation  $nx = e$  a une solution dans  $R$  ;
- (3) les sommes et produits d'éléments positifs sont positifs, mais  $a$  et  $-a$  ne sont tous deux positifs que dans le cas où  $a = 0$  ;
- (4) le carré de tout élément est positif ;
- (5) si  $a$  est donné, il existe un nombre naturel  $n$  tel que  $ne + a$  est positif ;
- (6) si  $e + na$  est positif pour chaque nombre naturel  $n$ , alors  $a$  est positif.

Ces propriétés conduisent à la fois à un certain nombre de résultats simples : les éléments de  $R$  admettent la multiplication par les nombres rationnels ; à chaque élément  $a$  peut être assigné un nombre réel  $\| a \|$  qui est sa norme ; les éléments de  $R$  peuvent être ordonnés partiellement en définissant  $a < b$  si  $b - a$  est positif et différent de 0. Nous exigeons en outre que :

- (7) avec la distance  $\| a - b \|$ , le système  $R$  est un espace métrique complet.

En fait, bien sûr, nous devons nous attendre à pouvoir obtenir la satisfaction de (7) par un processus de complétion de type familier, en adjoignant de nouveaux éléments à  $R$  de manière à obtenir un système élargi  $R^*$  avec une classe élargie  $P^*$  d'éléments positifs jouissant de toutes les propriétés (1)-(7). Cela se révèle être le cas. Ce que

---

Source : Actes de l'Académie nationale des sciences des États-Unis d'Amérique, Vol. 26, n° 4 (15 avril 1940), p. 280-283.

Ministère des mathématiques, Université de Harvard  
Communiquée le 12 mars 1940

nous pouvons maintenant établir est la chose suivante : le système  $R$  décrit ci-dessus est algébriquement isomorphe à l'anneau de TOUTES les fonctions réelles continues sur un certain espace de Hausdorff bicomact  $S(R)$ , les éléments positifs correspondant précisément aux fonctions non-négatives ; et  $S(R)$  est déterminé de façon unique modulo les équivalences topologiques<sup>1</sup>. Puisque les fonctions réelles continues sur tout espace de Hausdorff bicomact constituent un système vérifiant les propriétés (1)-(7), il s'ensuit que ces propriétés caractérisent en termes algébriques et ordinaux de telles classes de fonctions réelles<sup>1</sup>. Pour prouver ces résultats, on combine des principes généraux d'algèbre et de topologie aux informations concernant l'existence et les propriétés des racines carrées dans le système donné  $R$ . Sans entrer dans les détails, il est intéressant de noter que la détermination de la racine carrée positive d'un élément positif  $a \leq e$  est effectuée de la manière la plus efficace grâce à l'algorithme de fraction continuée utilisé pour convertir l'équation  $x^2 = a$  dans la forme équivalente  $(e+x)x = a+x$  et en écrivant cette dernière, d'abord dans un sens purement formel, comme  $x = e - (e-a)/(e+x)$ .

Il est maintenant évident que, si  $a$  est un élément quelconque de  $R$  et  $F(\lambda)$  est n'importe quelle fonction réelle continue définie pour tous les réels  $\lambda$ , alors  $F(a)$  peut être interprété de manière unique comme un élément de  $R$  : car, si  $f$  est cette fonction continue sur  $S(R)$  qui représente  $a$  dans l'isomorphisme décrit ci-dessus<sup>2</sup> alors  $F(f)$  est aussi une fonction continue sur  $S(R)$  et représente donc un certain élément de  $R$  qui peut être désigné de manière appropriée par  $F(a)$ . Le développement d'un calcul opérationnel complet de telles fonctions d'éléments dans  $R$  peut être développé d'une manière évidente. Si  $F$  n'est pas continue,  $F(f)$  ne peut généralement pas être en corrélation avec un élément de  $R$ , mais a toujours une signification comme fonction sur  $S(R)$ . Par conséquent,  $R$  peut être tellement élargi que  $F(a)$  a un sens dans le système étendu même lorsque  $F$  n'est pas continue : par exemple, dans le traitement de fonctions bornées  $F$ , nous pouvons utiliser comme système étendu la classe de toutes les fonctions réelles bornées sur  $S(R)$ , pour lesquelles les propriétés (1)-(7) sont facilement vérifiées. Si l'on souhaite traiter des fonctions non bornées  $F$ , une procédure est possible mais l'extension de  $R$  employée ne peut en général pas avoir les propriétés (5) et (7).

Dans de nombreux cas, cependant, aucun élargissement de  $R$  n'est nécessaire pour mettre en place un calcul opérationnel en termes d'une large classe de fonctions discontinues  $F$ . Exigeons que, au lieu de la propriété (7),  $R$  ait la propriété (7') si  $\{a_n\}$  est une séquence d'éléments positifs avec un  $a_n \geq a_{n+1}$ , alors elle a une plus grande borne inférieure.

La propriété (7') implique la propriété (7) ; de plus, elle est équivalente à la propriété suivante de l'espace associé  $S(R)$  : chaque fonction de Baire bornée sur  $S(R)$  ne diffère que sur un ensemble de première catégorie d'une fonction continue qui lui est associée de façon unique. Dans la preuve de cette équivalence, nous établissons en outre que la

propriété (7') et la propriété de  $S(R)$  indiquées ci-dessus sont équivalentes à la propriété suivante :  $S(R)$  est l'espace booléen représentatif (3) d'une algèbre booléenne complètement additive, qui peut être réalisée au moyen des éléments idempotents de  $R$ . Revenant à l'interprétation de  $F(a)$ , on voit tout de suite que, quand  $R$  a la propriété (7') et quand  $F$  est une fonction de Baire bornée,  $F(f)$  est une fonction de Baire bornée sur  $S(R)$  déterminant une fonction continue unique et un élément correspondant unique de  $R$ , qui peut être désigné de manière appropriée par  $F(a)$ . On obtient ainsi un calcul opérationnel complet avec des fonctions de Baire bornées  $F$ , applicable entièrement *au sein du* système  $R$ . Il n'est pas difficile de voir que (7') est essentiellement une condition nécessaire et suffisante pour la constructibilité d'un tel calcul.

Les concepts généraux décrits ci-dessus peuvent être illustrés ou appliqués de diverses façons. Les exemples de systèmes  $R$  qui conduisent à des interprétations et résultats sont : la classe de toutes les fonctions réelles continues sur un espace topologique arbitraire<sup>1</sup> ; la classe de toutes les fonctions bornées mesurables au sens de Lebesgue sur un domaine général, une fonction étant considérée comme positive si elle n'est négative que sur un ensemble de mesure zéro. On peut vérifier par des considérations tout à fait élémentaires que tout anneau abélien d'opérateurs auto-adjoints bornés dans l'espace de Hilbert est un système  $R$  qui possède la propriété (7') sous une forme plus forte. La présente théorie comprend donc comme cas particulier l'analyse spectrale simultanée d'un nombre quelconque d'opérateurs auto-adjoints bornés permutables avec le développement de leur calcul opérationnel. Afin de traiter les opérateurs non bornés, il suffit d'utiliser l'une des méthodes disponibles pour réduire le cas non borné au cas borné. En interprétant cette instance d'un système  $R$  en termes physiques, nous avons un traitement de tout système de quantités physiques réelles observables simultanément telles qu'envisagées dans la théorie quantique<sup>4</sup>. Les systèmes formels décrits par Steen<sup>5</sup> comme base pour un analogue abstrait de la théorie des opérateurs auto-adjoints peuvent être mise en proche relation avec la théorie présente, comme on pourrait s'y attendre ; mais il faut noter que les considérations de Steen restent à un niveau plus formel que les nôtres, dans le sens où elles ne servent pas à identifier les systèmes considérés. Là existent des liens similaires entre la présente note et une théorie initiée par von Neumann<sup>6</sup> ; mais nos résultats ne s'appliquent qu'aux sous-systèmes associatifs des algèbres non associatives de von Neumann. Dans le présent schéma, nous avons eu l'occasion de faire certaines références à la théorie des algèbres booléennes. Le fait que ces références ne soient ni accidentelles ni forcées provient du fait que la théorie générale de telles algèbres telle que nous l'avons développée ailleurs<sup>3</sup> est un cas particulier de la théorie présente : si l'on considère les formes linéaires formelles à coefficients rationnels construites à partir d'un anneau booléen abstrait  $A$  et qu'on les traite convenablement, comme si elles représentaient des "fonctions constantes par morceaux", on obtient un système  $R$  qui peut être complété de manière à vérifier les propriétés (1)-(7) ; l'espace de Hausdorff bicomact résultant est précisément l'espace booléen attaché à  $A$ . En fait, il est plus simple de

développer la théorie des algèbres booléennes indépendamment, car de nombreux aspects de la théorie générale décrite ici deviennent triviaux ou peuvent être contournés en traitant directement ce cas particulier. Enfin, nous observons que les concepts de la présente note éclairent (et introduisent même certaines simplifications techniques dans) les travaux récents de Bochner sur les intégrales additives finies<sup>7</sup> et ceux de Bochner et Wecken sur les fonctions quasi-périodiques<sup>8</sup>.

Dans une deuxième note, nous discuterons du parallèle entre la théorie actuelle et certains résultats de la théorie des réseaux linéaires. En particulier, nous montrerons que les principes généraux développés ici se prolongent pour donner un traitement sans intégration du calcul opérationnel de Riesz dans un réseau linéaire<sup>9</sup>.

1. Pour des discussions au sujet des propriétés des fonctions continues impliquées dans ce contexte, voir M. H. Stone, *Trans. Am. Math. Soc.*, **41**, 375-481 (1937), spécialement le Chapitre III; et Čech, *Ann. Math. (2)*, **38**, 823-844 (1937).
2. Le domaine de cette fonction  $f$  est le spectre de  $a$ .
3. Voir M. H. Stone, loc. cit., spécialement Chapitre I, et un travail précédent cité là.
4. P. A. M. Dirac, *Principes de la mécanique quantique*, 1931.
5. S. W. P. Steen, *Proc. Lond. Math. Soc (2)* **41** 361-392 (1936); **43**, 529-543 (1937); **44**, 398-411 (1938); **45**, 562-578 (1939). Les deux derniers articles traitent de systèmes non-commutatifs liés de façon proche à ceux cités dans la référence afférente 6.
6. J. von Neumann, *Matematicheskii Sbornik*, **1** (43) 415-484 (1936).
7. S. Bochner, *Ann. Math. (2)* **40**, 769-799 (1939).
8. S. Bochner, loc. cit.; F. J. Wecken, *Math. Zeit.*, **45**, 377-404 (1939).
9. F. Riesz, *Ann. Math. (2)* **41**, 174-206 (1940).

## Une théorie générale des spectres II

M. H. Stone

Dans la présente note, nous discuterons de la théorie des groupes abéliens ordonnés par un treillis et de sa relation avec une communication antérieure<sup>2</sup>. En particulier, nous dérivons le traitement sans intégration du calcul opérationnel de Riesz dans un réseau linéaire<sup>3</sup>, traitement qui avait été précédemment promis.

Nous désignons par 1-groupe tout système  $L$  d'éléments  $a, b, c, \dots$  satisfaisant la condition composée

- (1')  $L$  est un système avec deux opérations binaires,  $+$  et  $\times$ , qui
- (i) est un groupe abélien par rapport à  $+$  ;
  - (ii) satisfait aux lois commutative et associative par rapport à  $\times$  ;
  - (iii) satisfait à la loi de distributivité  $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$  de  $+$  par rapport à  $\times$  ;
  - (iv) satisfait à la loi d'idempotence  $a \times a = a$ .

La condition sur  $L$  est équivalente à l'exigence que  $L$  soit un groupe abélien ordonné par un réseau : en définissant que  $a \leq b$  si et seulement si  $a \times b = a$ , on peut facilement vérifier que  $a \times b$  est la plus grande limite inférieure (ou rencontre de réseau) de  $a$  et  $b$ . Par conséquent, la terminologie habituelle de la théorie des réseaux peut être appliquée à  $L$  sans plus de commentaire : par exemple, nous dirons qu' $a$  est un élément positif ou strictement positif selon que  $a \geq 0$  ou  $a > 0$ . Les parties séparées de (1') ressemblent étroitement aux postulats des anneaux commutatifs. En effet, en omettant (iv) et en remplaçant (iii) par la loi distributive  $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ , nous obtenons les postulats en question. De plus, en conservant (iv) et en remplaçant (iii) de la même manière, on obtient les postulats des anneaux booléens. Ainsi les 1-groupes diffèrent principalement des anneaux par une sorte d'inversion de la loi distributive. Par conséquent les extensions, homomorphismes et représentations pour les 1-groupes peuvent être obtenus par des arguments pas très différents de ceux utilisés dans la théorie des anneaux.

Sur un 1-groupe  $L$ , nous imposons une partie ou la totalité d'une série de conditions similaires à celles supposés en (I) pour les anneaux. Ce sont :

- (2') pour tout  $a$  et tout entier naturel  $n$ , l'équation  $nx = a$  a une solution dans  $L$  ;
- (5') pour un élément  $e$ , chaque  $a$  détermine un nombre naturel associé  $n$  tel que  $ne + a$  est positif ;
- (5'') pour un élément  $e$ , les relations  $a \geq 0$ ,  $e \times a = 0$  sont équivalentes à la relation  $a = 0$  ;

---

Source : Actes de l'Académie nationale des sciences des États-Unis d'Amérique, Vol. 27, 1941  
83 Page 2, Communiquée le 11 décembre 1940

(6') si  $b$  est positif et si  $b + na$  est positif pour tout entier naturel  $n$ , alors  $a$  est positif ;  
 (7) en termes de la distance de  $\| a - b \|$  (définie sur la base de (2'), (5') et (6') comme la plus grande borne inférieure des nombres rationnels  $\lambda$  tels que  $|a - b| < \lambda e$ ),  $L$  est un espace métrique complet ;

(7') si  $\{a_n\}$  est une séquence d'éléments positifs tels que  $a_n \geq a_{n+1}$ , alors elle a une plus grande borne inférieure.

En (5') et en (5''), l'élément spécial  $e$  doit être strictement positif ; et tout  $e$  satisfaisant (5') satisfait également (5''). Un 1-groupe avec la propriété (7') est dit complet. Un 1-groupe complet satisfait nécessairement la propriété (6') ; et un 1-groupe complet satisfaisant (2') et (5') satisfait également (7). Pour qu'un 1-groupe satisfasse (2'), (5'), (6') et (7), il est nécessaire et suffisant que  $L$  soit un treillis de Banach contenant un élément spécial  $e$  tel que les relations  $\| a \| \leq 1$  et  $\| a \| \leq e$  sont équivalentes.

Tout 1-groupe  $L$  peut être étendu à un 1-groupe  $L^*$  (composé des "fractions formelles"  $a/n$ ) qui a la propriété (2') et aussi l'une des propriétés (5'), (5''), (6') possédée par  $L$ . De même tout 1-groupe avec les propriétés (2'), (5'), (6') peut être étendu (par complétion métrique) à un 1-groupe satisfaisant (2'), (5'), (6' et (7). Ainsi, tout 1-groupe  $L$  complet satisfaisant (5') peut être étendu à un 1-groupe  $L^*$  satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7) ; et nous verrons qu'en conséquence,  $L^*$  a aussi la propriété (7').

Les homomorphismes d'un 1-groupe sont étudiés au moyen de ses 1-sous-groupes normaux, que nous désignons ici par le terme 1-idéaux puisque leur rôle est analogue à celui des idéaux de la théorie des anneaux. Une sous-classe non vide  $\mathfrak{a}$  d'un 1-groupe  $L$  est ainsi dite être un 1-idéal si et seulement si, à chaque fois que  $a_1, \dots, a_p$  sont dans  $\mathfrak{a}$  et  $|b| \leq |a_1| + \dots + |a_p|$ , alors  $b$  est également dans  $\mathfrak{a}$ . Un 1-idéal est dit premier si  $|a_1| \times |a_2| \in \mathfrak{a}$  implique  $a_1 \in \mathfrak{a}$  ou  $a_2 \in \mathfrak{a}$  ; un 1-idéal  $\mathfrak{a}$  est premier si et seulement si le 1-groupe-quotient  $L/\mathfrak{a}$  est simplement ordonné. Associé à une sous-classe non vide arbitraire  $\mathfrak{a}$  d'un 1-groupe, on a  $\mathfrak{a}^*$  le plus petit 1-idéal contenant  $\mathfrak{a}$ , et le 1-idéal  $\mathfrak{a}'$  de tous les éléments  $b$  tels que  $|b| \times |a| = 0$  pour chaque  $a$  dans  $\mathfrak{a}$  ; pour eux, les relations  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{a}'$ ,  $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}''$ ,  $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^{*'} = \mathfrak{a}'$  sont facilement vérifiées. De plus,  $\mathfrak{a}^*$  est facilement identifiée comme la classe de tous les éléments  $b$  tels que  $|b| \leq |a_1| + \dots + |a_p|$  pour certains éléments  $a_1, \dots, a_p$  dans  $\mathfrak{a}$ . Dans un 1-groupe complet, les 1-idéaux  $\mathfrak{a}^*$  et  $\mathfrak{a}'$  sont des 1-groupes complets.

L'analyse des 1-groupes complets peut être facilement réduite à l'étude des 1-groupes complets satisfaisant (5'), comme nous allons le montrer maintenant. Si  $e$  est n'importe quel élément strictement positif dans un 1-groupe complet  $L$ , alors  $L$  est la somme directe des 1-idéaux  $\{e\}'$  et  $\{e\}''$  et le 1-idéal  $\{e\}''$  est essentiellement déterminé par le 1-idéal  $\{e\}^*$  : car, si  $a$  est n'importe quel élément positif dans  $L$ , alors  $a' = \inf\{a - (ne \times a)\} \in \{e\}'$ ,  $a'' = a - a' = \sup\{ne \times a\} \in \{e\}''$ , et  $ne \times a \in \{e\}^*$ . Nous avons donc une application homomorphe  $L \rightarrow L/\{e\}' = \{e\}''$  qui conserve la plus petite borne supérieure et plus grande borne inférieure (pour les séquences). Non seulement les 1-groupes  $\{e\}''$  et  $\{e\}^*$  sont tous deux complets, mais ils satisfont

aussi les conditions respectives (5'') et (5') avec  $e$  comme élément spécial requis dans chaque cas. Si  $e$  est maintenant autorisé à parcourir la classe de tous les éléments strictement positifs dans  $L$  (ou simplement une classe d'éléments  $e_\alpha$  tels que  $\alpha \neq \beta$  implique  $e_\alpha \times e_\beta = 0$  tandis que  $e_\alpha \times |a| = 0$  pour tout  $\alpha$  implique  $a = 0$ ), alors aucun élément  $a$  autre que 0 a pour image l'élément nul de  $\{e\}''$  par *tout* homomorphisme  $L \rightarrow \{e\}''$ . En appliquant le principe de McCoy et Montgomery<sup>5</sup>, et en observant que la somme directe des 1-groupes complets satisfaisant (5'') est un 1-groupe du même genre, on obtient le :

**THÉORÈME 1.** *Un l-groupe complet peut se projeter de façon isomorphe, avec conservation des plus grande borne inférieure et plus petite borne supérieure (pour les séquences), en tant que l-sous-groupe dans une somme directe de l-groupes complets satisfaisant (5'') - et donc comme un l-sous-groupe dans un l-groupe complet satisfaisant (5'').*

Bien sûr, dans un 1-groupe complet  $L$  satisfaisant (5''), nous avons  $L = \{e\}''$  pour l'élément spécial  $e$  de (5'') et est donc laissé pour l'étude le 1-groupe complet  $\{e\}^*$ , qui satisfait (5').

En déplaçant notre attention vers le cas d' un 1-groupe  $L$  avec les propriétés (2'), (5'), (6') et (7), nous déduisons pour lui une représentation en théorie des fonctions due à Kakutani<sup>6</sup>; cette représentation est analogue à la représentation pour les anneaux donnée en (I). Un argument appliqué par Krull<sup>7</sup> dans le cas des anneaux commutatifs nous permet de construire un 1-idéal maximal en omettant  $e$ . Ce 1-idéal est nécessairement métriquement fermé et premier; et le 1-groupe-quotient simplement ordonné  $L/\mathfrak{a}$  est facilement identifiable avec le 1-groupe de nombres réels (avec leur ordre naturel). En particulier, si  $a$  est un élément arbitraire dans  $L$ , le 1-idéal  $\{\| a \| e - |a|\}^*$  ne peut pas contenir  $e$ ; et nous pouvons donc déterminer  $\mathfrak{a}$  pour qu'il contienne  $\| a \| e - |a|$ . L'application  $L \rightarrow L/\mathfrak{a}$  envoie alors  $|a|$  sur le nombre réel  $\| a \|$ . En appliquant le principe de McCoy et Montgomery, conjointement avec des compléments topologiques d'abord formulés en termes explicites par Kakutani<sup>8</sup>, nous obtenons le :

**THÉORÈME 2.** *(Théorème de Kakutani). Un l-groupe  $L$  satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7) est isomorphe au l-groupe de TOUTES les fonctions réelles continues sur un espace de Hausdorff bicomact déterminé de façon unique  $S(L)$ ; les éléments positifs de  $L$  sont représentés précisément par ces fonctions qui n'ont pas de valeurs négatives et l'élément  $e$  par la fonction constante 1.*

De (I) nous avons immédiatement le

**COROLLAIRE.** *Pour que  $L$  soit complet, il est nécessaire et suffisant que  $S(L)$  soit un*

*espace booléen qui est associé à une algèbre booléenne complètement additive.*

Ainsi, dans tout 1-groupe complet satisfaisant (2') et (5'), nous pouvons mettre en place un calcul opérationnel de la manière indiquée dans notre note précédente (I), ce qui permet d'obtenir, sans recours à l'intégration, des résultats similaires à ceux de Riesz.

Rappelant maintenant que tout 1-groupe complet satisfaisant (5') peut être projeté dans un 1-groupe  $L^*$  satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7), on peut à la fois représenter  $L$  isomorphiquement comme un 1-sous-groupe  $L_0$  du 1-groupe des fonctions continues sur  $S(L^*)$ . En vertu de la construction explicite de  $L^*$  en fonction de  $L$ , nous voyons que chaque fonction continue sur  $S(L^*)$  peut être uniformément approximée par des combinaisons linéaires rationnelles de fonctions dans  $L_0$ . En couplant ce fait topologique<sup>9</sup> avec le fait que  $L_0$  est complet, nous pouvons montrer que  $S(L^*)$  est l'espace booléen représentatif d'une algèbre booléenne complètement additive, et donc que  $L^*$  est un 1-groupe complet. Maintenant, à tout point  $p$  de  $S(L^*)$ , les valeurs prises par les fonctions dans  $L_0$  constituent un 1-sous-groupe  $L_0(p)$  des nombres réels. Puisque ce 1-sous-groupe peut être discret, composé de nombres de la forme  $\pm k/n$  où  $n$  est fixé et  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , nous sommes amenés à considérer l'ensemble  $S_N(L)$  de tous les points  $p$  où le plus petit nombre strictement positif dans  $L_0(p)$  est de la forme  $k/N$ . Nous posons  $T_N(L) = S'_1(L)S'_2(L) \dots S'_{N-1}(L)S_N(L)$ <sup>1</sup>. Des investigations de nature topologique amènent alors :

**THÉORÈME 3<sup>10</sup>.** *Si  $L$  est un l-groupe complet satisfaisant (5'), alors il existe un espace booléen bicomact déterminé de façon unique  $S(L)$ , qui représente une algèbre booléenne complètement additive  $A$ , et une séquence déterminée de manière unique  $\{S_N(L)\}$  d'ensembles fermés dans  $S(L)$ , où  $S_M(L)S_N(L) = S_P(L)$  avec  $P$  le p.g.c.d. de  $M$  et  $N$  et où les ensembles ouverts complémentaires  $S'_N(L)$  représentent les idéaux complètement additifs dans  $A$ , de telle sorte que  $L$  est isomorphe au l-groupe  $L_0$  de toutes les fonctions réelles continues sur  $S(L)$  qui ne prennent sur chaque ensemble  $T_N(L)$  aucune valeur autre que  $\pm k/N, k = 0, 1, 2, \dots, N = 1, 2, 3, \dots$ ; et si le point  $p$  n'appartient à aucun ensemble  $S_N$ , alors  $L_0(p)$  est le l-groupe des nombres réels. Inversement, si  $S$  et  $S_N$  sont choisis arbitrairement sous réserve des conditions indiquées, alors il existe un l-groupe complet  $L$  satisfaisant (5') et les relations spécifiques  $S(L) = S, S_N(L) = S_N$  pour  $N = 1, 2, 3, \dots$*

Nous ne formulerons pas les théorèmes décrivant les représentations pour les 1-groupes complets satisfaisant (5'') et pour les 1-groupes complets sans restrictions, car les détails sont assez compliqués. Cependant, nous pouvons facilement voir de façon générale quelles sont les représentations possibles. Dans le traitement d'un 1-groupe complet  $L$  satisfaisant (5''), nous appliquons d'abord le théorème 3 pour obtenir une

---

1. pas de prime pour  $S_N(L)$ , erreur ?



représentation de  $\{e\}^*$ , où  $e$  est l'élément spécial donné en (5''). Nous utilisons ensuite cette représentation pour fournir des représentants pour les éléments qui sont dans  $L = \{e\}''$  mais pas dans  $\{e\}^*$ . En raison de remarques précédentes, il est aisément vérifiable que chacun de ces éléments a une fonction représentative unique  $F$  vérifiant les propriétés suivantes :

- ( $\alpha$ )  $F$  est finie et continue sauf aux points d'un ensemble associé fermé dense nulle part ;
- ( $\beta$ ) si  $n$  est un nombre naturel quelconque, il existe un voisinage de cet ensemble exceptionnel associé de telle sorte que  $F$  ne prend sur lui aucune valeur comprise entre  $-n$  et  $n$  ;
- ( $\gamma$ ) sur chaque ensemble  $T_N(\{e\}^*)$ , la fonction  $F$  ne suppose aucune des valeurs finies autres que celles de la forme  $\pm k/N$ .

Dans le calcul des sommes et des jointures de treillis de telles fonctions, on doit évidemment négliger les ensembles denses nulle part. Avec cette réserve, il n'est pas difficile de montrer que l'agrégation combinée de toutes ces fonctions continues et de toutes les fonctions (non bornées) vérifiant les propriétés ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) ci-dessus est en fait un 1-groupe complet satisfaisant (5'') ; et que  $L$  peut y être projeté de manière isomorphe sous la forme d'un 1-sous-groupe  $L_0$ . Clairement,  $L_0$  doit satisfaire la condition ( $\gamma$ ) mais *n'est pas en général caractérisé ainsi*. En combinant ce résultat de façon judicieuse avec le théorème 1, nous arrivons finalement à une représentation en théorie des fonctions d'un 1-groupe complet arbitraire.

Enfin, nous remarquons que le parallèle étroit entre la représentation par anneaux fournie en (I) et la représentation par 1-groupes fournie par le Théorème de Kakutani s'étend même aux arguments de preuves. Si  $R$  est n'importe quel anneau avec les propriétés requises en (I), nous pouvons le traiter également comme un 1-groupe satisfaisant (2'), (5'), (6') et (7), en vertu de la définition  $a \times b = 1/2(a+b) - 1/2\sqrt{(a-b)^2}$ . Une sous-classe non vide *fermée* de  $R$  est un idéal si et seulement si elle est un 1-idéal. Par conséquent, si les 1-idéaux premiers  $\mathfrak{a}$  utilisés ci-dessus pour prouver le théorème de Kakutani sont interprétés pour  $R$ , ils se révèlent être des idéaux fermés sans diviseur ; et les homomorphismes associés  $R \rightarrow R/\mathfrak{a}$  envoient  $R$  sur le corps des nombres réels. Inversement, la technique d'une discussion directe de  $R$  donne également une preuve du théorème de Kakutani. Ainsi, exceptée une construction préliminaire des racines carrées dans  $R$ , les arguments utilisés pour établir les représentations des anneaux et des 1-groupes sont essentiellement identiques.

1. Pour la théorie générale des treillis et sa terminologie technique, nous nous référons à Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*, New York, 1940.
2. M. H. Stone, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **26**, 280-283 (1940). Ce document sera cité ici comme (I).
3. F. Riesz, *Ann. Math.* (2), **41**, 174-206 (1940).
4. Riesz a discuté longuement des systèmes  $\mathfrak{a}^*$  et  $\mathfrak{a}'$  dans la réf. 3, ci-dessus.
5. Voir N. H. McCoy et Deane Montgomery, *Duke Math. Jour.*, **3**, 455-459 (1937).

6. Voir S. Kakutani, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**, 63-67 (1940). La preuve esquissée ici diffère de celle qui m'a été communiquée oralement par le Dr. Kakutani en octobre dernier ; elle implique quelques simplifications techniques, si je comprends correctement la situation. Voir également le dernier paragraphe de ce document.
7. Voir W. Krull, *Math. Annalen*, **101**, 729-744 (1929), en particulier la page 732.
8. Voir Kakutani, réf. 6, ci-dessus.
9. Voir M. H. Stone, *Trans. Am. Math. Soc.*, **41**, 375-481 (1937), en particulier le théorème 82 dont la preuve provient essentiellement de la théorie des treillis.
10. Je comprends que J. v. Neumann a également obtenu des résultats en contact étroit avec ceux énoncés dans le théorème 3 et ceux esquissés dans le paragraphe suivant, en particulier en ce qui concerne le "dédoublément" des 1-groupes discrets  $L_0(p)$  et du calcul modulo les ensembles nulle part denses que l'on trouve au paragraphe suivant. La nature précise des résultats de v. Neumann et dans quelle mesure leurs preuves sont reliées aux observations faites en (I) me sont tous inconnus.