

Transcription d'un problème d'allumage d'ampoules (extrait de Frank Spitzer, *Principles of random walk*, éd. D. van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, 1963, Denise Vella-Chemla, juin 2026.

Extrait liminaire : [page 1]

Tout au long de ce livre, R représentera l'espace des entiers d -dimensionnel. En d'autres termes, R est l'ensemble des d -uplets (points du réseau)

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^d), \quad x^i \text{ est un entier pour } i = 1, 2, \dots, d.$$

[page 91]

Alors que E1, E2 et E3 ont été conçus pour établir ou réfuter la récurrence pour des marches aléatoires spécifiques, le dernier exemple vise à éclairer des principes généraux. Nous allons examiner brièvement l'analyse harmonique abstraite sur les groupes abéliens G et présenter une classe de fonctions $\chi_\lambda(g)$, $g \in G$, appelées les caractères de G , qui présentent exactement le même comportement que les fonctions exponentielles $e^{i\lambda x}$ sur R . En fait, nous ne discuterons que d'un seul groupe spécifique oup G , mais dont la structure diffère considérablement de celle du groupe des points du réseau R .

E4 Nous prenons pour G le groupe abélien dénombrablement infini suivant. Les éléments de G sont des suites infinies

$$g = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots)$$

où chaque $\epsilon_k = \epsilon_k(g)$ vaut soit 0, soit 1, et seul un nombre fini de 1 apparaît dans chaque g . L'addition est définie modulo 2; lorsque $g \in G$ et $h \in G$, $g + h$ est définie par

$$\epsilon_k(g + h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon_k(g) = \epsilon_k(h), \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque g dans G peut être exprimé de manière unique comme une somme finie de générateurs $g_k \in G$, g_k étant défini par

$$\epsilon_n(g_k) = \delta(n, k), \quad k \geq 1, \quad n \geq 1.$$

L'élément neutre de G sera

$$e = (0, 0, \dots).$$

Une fonction à valeurs complexes $\chi(g)$ sur G sera appelée un caractère de G , si

$$(1) \quad |\chi(g)| = 1, \quad \chi(g + h) = \chi(g)\chi(h) \text{ pour } g, h \in G.$$

Il découle de (1) que $\chi(e) = 1$ (en n'utilisant aucune des propriétés spéciales de G), et que $\chi(g)$ vaut soit +1 soit -1 pour chaque g dans G (car chaque élément de G est d'ordre 2).

Une collection de caractères (suffisamment grande pour être utile) sera maintenant construite comme suit. Soit I l'intervalle $[-1, 1]$. Chaque $\lambda \in I$ peut être représenté sous forme binaire (de manière unique si l'on adopte une convention appropriée concernant les décimales périodiques) comme

$$(2) \quad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2^k} \quad \text{avec chaque } \lambda_k = \lambda_k(\lambda) = +1 \text{ ou } -1.$$

On définit maintenant, pour chaque $\lambda \in I$,

$$(3) \quad \begin{aligned} \chi_\lambda(g_k) &= \lambda_k, \quad k \geq 1, \\ \chi_\lambda(e) &= 1, \\ \chi_\lambda(g) &= \chi_\lambda(g_{i_1})\chi_\lambda(g_{i_2}) \cdots \chi_\lambda(g_{i_n}), \end{aligned}$$

pour tout $g = g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_n} \in G$. Clairement, (3) implique que $\chi_\lambda(g)$ est un caractère.

L'analyse harmonique classique est basée sur l'orthogonalité des fonctions exponentielles de P6.1¹ L'analogue de cette proposition dans le cadre actuel est la relation d'orthogonalité

$$(4) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \chi_\lambda(g)\chi_\lambda(h) d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{si } g \neq h, \end{cases}$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue ordinaire sur I . Bien que la preuve de (4), basée sur (1), (2) et (3), ne soit pas du tout difficile, l'observation que de telles relations d'orthogonalité sont valables dans un cadre très général est suffisamment profonde pour avoir joué un rôle majeur dans le développement moderne des probabilités et de certaines parties de l'analyse². En continuant d'imiter le développement de la section 6, notre prochaine étape est la définition d'une "fonction de transition"

$$(5) \quad P(g, h) = P(e, h - g),$$

satisfaisant

$$P(e, g) \geq 0, \quad \sum_{g \in G} P(e, g) = 1$$

et de sa "fonction caractéristique"

1. (Note de la traductrice : il s'agit vraisemblablement cette propriété-là car elle s'appelle P1, elle est au début du chapitre 6, et elle traite de ce dont il est question) : Le résultat de base sous-tendant notre analyse de Fourier sera bien sûr l'orthogonalité des fonctions exponentielles

$$\mathbf{P1} \quad (2\pi)^{-d} \int e^{i\theta \cdot (x-y)} d\theta = \delta(x, y), \quad \text{pour tout couple } x, y \text{ de } R.$$

La preuve évidente procède par réduction dans le cas uni-dimensionnel, puisque l'intégrale dans P1 peut s'écrire comme le produit de d intégrales uni-dimensionnelles sur l'intervalle réel de $-\pi$ à π . Par conséquent, l'intégrale est

$$\prod_{k=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_k(x^k - y^k)} d\theta_k = \prod_{k=1}^d \delta(x^k, y^k) = \delta(x, y),$$

qui dépend seulement du fait que pour tout entier n

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\pi\theta} d\theta = \delta(n, 0).$$

2. Voir Loomis [74]. Il existe des indications selon lesquelles une grande partie de la théorie de la marche aléatoire s'étend aux groupes abéliens arbitraires; il est même possible qu'une telle extension puisse apporter un nouvel éclairage sur les problèmes purement algébriques concernant la structure des groupes abéliens

$$(6) \quad \phi(\lambda) = \sum_{g \in G} P(e, g) \chi_\lambda(g), \quad \lambda \in I.$$

Nous pouvons maintenant généraliser les parties (a) et (b) de P6.3. Si nous définissons les itérés de $P(g, h)$ par

$$\begin{aligned} P_0(g, h) &= \delta(g, h), & P_1(g, h) &= P(g, h), \\ P_{n+1}(g, h) &= \sum_{f \in G} P(g, f) P_n(f, h), & n &\geq 0, \end{aligned}$$

alors P6.3 (a) devient

$$(7) \quad \phi^n(\lambda) = \sum_{g \in G} P_n(e, g) \chi_\lambda(g), \quad \lambda \in I, \quad n \geq 0,$$

et la partie (b) de P6.3 s'avère être

$$(8) \quad P_n(e, g) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \phi^n(\lambda) \chi_\lambda(g) d\lambda, \quad g \in G, \quad n \geq 0.$$

La preuve de (7) et (8) dépend de (4) de manière évidente.

À ce stade, nous avons tout ce qu'il nous faut pour associer une "marche aléatoire" sur le groupe G à une fonction de transition $P(g, h)$ sur G . Même les considérations de théorie de la mesure de la section 3 peuvent bien sûr être introduites sans aucune difficulté. Étant donné une fonction de transition, nous pouvons donc dire que la marche aléatoire correspondante est récurrente si

$$(9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e, e) = \infty,$$

et demander des critères pour que (9) soit vérifiée, comme cela a été fait dans cette section, en fonction de $\phi(\lambda)$, la fonction caractéristique. C'est facile, car l'équation (8) implique que (9) est vérifiée si et seulement si

$$(10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \phi^n(\lambda) d\lambda = \infty.$$

"Testons notre théorie" à l'aide d'un exemple très concret. Nous considérons une séquence infinie d'ampoules et une séquence infinie de nombres p_k tels que

$$p_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

À l'instant 0, toutes les ampoules sont éteintes. À chaque unité de temps ($t = 1, 2, 3, \dots$) par la suite, une des ampoules est sélectionnée (la k -ième avec une probabilité p_k), et son interrupteur est actionné. Ainsi, elle s'allume si elle était éteinte, et s'éteint si elle était allumée. Quelle est la probabilité que toutes les ampoules soient éteintes à l'instant $t = n$? Un instant de réflexion montrera qu'il s'agit d'un problème concernant une marche aléatoire sur le groupe G particulier en question, et que la probabilité recherchée est $P_n(e, e)$, à condition de définir la fonction de transition $P(g, h)$ par

$$(11) \quad P(e, g) = p_k \text{ si } g = g_k, \quad 0 \text{ sinon.}$$

(Plus précisément, la probabilité que les ampoules numérotées 3, 5, 7 et 11 soient allumées à l'instant n , et aucune autre, est $P_n(e, g)$ où $g = g_3 + g_5 + g_7 + g_{11}$, et ainsi de suite.)

Dans ce contexte "appliqué", la question du caractère récurrent des équations (9) et (10) présente un intérêt intuitif. L'équation (10) est équivalente à l'affirmation qu'avec une probabilité de un, le système d'ampoules sera infiniment souvent dans l'état où elles sont toutes éteintes, et nous voulons évidemment un critère en fonction de la séquence $\{p_k\}$ qui spécifie le problème. (Nous dirons que le système est récurrent si $\{p_k\}$ est tel que (10) est vérifiée.)

Par l'équation (11), nous obtenons à partir de (6)

$$\phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \chi_{\lambda}(g_k)$$

et en utilisant (3)

$$\phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \lambda_k,$$

de sorte que (10) devient

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k \lambda_k \right)^n d\lambda = \infty$$

Il semble impossible d'obtenir un critère général, en fonction de $\{p_k\}$, pour la validité de (12). Mais on peut obtenir des conditions simples qui sont soit suffisantes, soit nécessaires, mais pas les deux. À cette fin, nous décomposons I en sous-ensembles disjoints

$$I_j = [\lambda \mid \lambda \in I, \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_j = 1, \lambda_{j+1} = -1],$$

$$J_j = [\lambda \mid \lambda \in I, \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_j = -1, \lambda_{j+1} = 1], \quad j \geq 1.$$

Alors

$$\int_{-1}^1 \left(\sum p_k \lambda_k \right)^n d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{I_j} \left(\sum p_k \lambda_k \right)^n d\lambda + \int_{J_j} \left(\sum p_k \lambda_k \right)^n d\lambda \right].$$

Mais l'intégrale de gauche est nulle sauf si n est pair, et pour n pair, l'intégrale sur I_j est la même que celle sur J_j . Appelons

$$(13) \quad I_j(n) = \int_{I_j} \left(\sum p_k \lambda_k \right)^{2n} d\lambda.$$

Alors, selon l'équation (8),

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(e, e) \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_j(n) \leq \infty,$$

qui converge ou diverge selon que le système est transitoire ou récurrent. La mesure de I_j est clairement 2^{-j} , et si $f_j = p_{j+1} + p_{j+2} + \dots$, alors

$$(15) \quad 1 - 2f_{j+1} \leq \sum p_k \lambda_k \leq 1 - 2p_{j+1} \quad \text{pour } \lambda \in I_j.$$

Si nous choisissons M de sorte que $1 - 2f_{j+1} > 0$ pour $j \geq M$, alors

$$(16) \quad 2^{-j}(1 - 2f_{j+1})^{2n} \leq I_j(n) \leq 2^{-j}(1 - 2p_{j+1})^{2n} \quad \text{pour } j \geq M,$$

tandis que

$$(17) \quad I_j(n) \leq 2^{-j}c^{2n} \quad \text{pour } j < M,$$

où c est le maximum de $|1 - 2f_{j+1}|$ et de $|1 - 2p_{j+1}|$ pris sur tous les $j < M$. Si l'on suppose que tout $p_j > 0$ alors il s'ensuit que $c < 1$ (cette hypothèse n'aura aucune incidence ; si $p_j = 0$ pour un certain j , alors le j -ième terme peut simplement être omis dans les critères que nous allons obtenir). Si $c < 1$, alors les termes de (17) ne peuvent clairement pas affecter la convergence de la double somme dans (14). Compte tenu de (16)

$$\sum_{j=M}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 - (1 - 2f_{j+1})^2} \leq \sum_{j=M}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} I_j(n) \leq \sum_{j=M}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1 - (1 - 2p_{j+1})^2}.$$

Le système est donc récurrent si la borne inférieure est infinie, et transitoire si la borne supérieure est finie. En simplifiant ces bornes, on obtient

$$(18) \quad \text{une condition suffisante pour le caractère récurrent : } \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}(f_j)^{-1} = \infty;$$

et

$$(19) \quad \text{une condition suffisante pour le caractère transitoire : } \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}(p_j)^{-1} < \infty$$

En spécialisant encore davantage, supposons que

$$p_k = (1 - p)p^{k-1}, \quad \text{pour } k \geq 1, \quad \text{avec } 0 < p < 1.$$

Alors il découle de (18) et (19) que le système d'ampoules est récurrent si et seulement si $p \leq 1/2$.

Remarque : Le résultat général le plus intéressant, à ce jour, concernant la marche aléatoire sur les groupes est une généralisation de T1 due à Dudley [26]. Il considère les groupes additifs abéliens dénombrables G et se demande quels groupes admettent une marche aléatoire récurrente apériodique. En d'autres termes, sur quels groupes G peut-on définir une fonction de transition $P(x, y)$, $x, y \in G$, telle que $P(x, y) = P(e, y - x)$, et

(a) aucun sous-groupe propre de G ne contient $[x | P(e, x) > 0]$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(e, e) = \infty$,

où e est l'élément neutre et $P_n(x, y)$ est défini comme dans E4? La réponse est que G admet une marche aléatoire récurrente apériodique si et seulement s'il ne contient aucun sous-groupe isomorphe

à R_3 (le produit direct triple du groupe des entiers). Notez que, par conséquent, il est possible de définir une marche aléatoire récurrente apériodique sur le groupe additif des nombres rationnels!