Skolem et le pessimisme à propos des preuves en mathématiques

Paul J. Cohen

Les attitudes par rapport à la formalisation et à la preuve ont fait de grands mouvements de balanciers durant les 150 dernières années. Nous brossons leur développement depuis la première formalisation de Frege, aux débats à propos de l'intuitionnisme et d'autres écoles, en passant par le programme de Hilbert et le coup de tonnerre du théorème d'incomplétude de Gödel. Un rôle essentiel est joué par le théorème de Skolem-Lowenheim, qui a montré qu'aucun système d'axiomes du premier ordre ne détermine un modèle infini unique. Skolem lui-même voyait cela comme un coup de boutoir à la croyance que les mathématiques ne peuvent être fondées de manière fiable qu'au-dessus de systèmes axiomatiques. Dans un article extrêmement visionnaire, il dessine même la possibilité de nouveaux modèles intéressants pour la théorie des ensembles elle-même, une chose qu'il a ensuite réalisée par la méthode du forcing. Ceci est en contradiction avec la croyance de Hilbert que les mathématiques pourraient résoudre toutes leurs questions. Nous discutons de cela pour la théorie des ensembles, ainsi que des questions dans la théorie des ensembles elle-même, et de leur pertinence, puis nous regardons en détail les conséquences de l'usage d'un raisonnement mathématique basé sur les méthodes du calcul des prédicats. La conclusion est qu'il n'y a pas de base raisonnable à l'assertion d'Hilbert. La grande majorité des questions, même en théorie élémentaire des nombres, et qui sont de complexité raisonnable, sont hors d'atteinte d'un tel raisonnement. Bien sûr, cela ne peut pas être prouvé et nous présentons seulement des arguments de plausibilité. Le grand succès des mathématiques est le rôle de nouveaux axiomes pour la théorie des nombres. Nous en arrivons à considérer des "problèmes naturels", ceux qui semblent présenter une bonne chance d'être résolus. Les grandes gloires du raisonnement humain, depuis la découverte de la géométrie par les Grecs, ont tenu contre cette vision pessimiste. Nous concluons en souhaitant une bonne santé aux mathématiques d'aujourd'hui et aux mathématiques des nombreux siècles à venir.

Introduction

Je voudrais remercier les organisateurs de la conférence de m'avoir invité à présenter mes idées sur la nature de la preuve mathématique. Ce que j'ai à dire peut être ressenti comme quelque peu anachronique, dans la mesure où j'étudierai un débat qui

Traduction en français d'un article de Paul J. Cohen, téléchargeable ici https://www.math.upenn.edu/ kazdan/proof/notes/Proof2005-PJCohen-2407-18.pdf.

a fait rage il y a presque un siècle, mais qui s'est calmé plus tard. Néanmoins, à la lumière de ce qui s'est passé, je crois que l'on peut aboutir à des conclusions raisonnables à propos de l'état actuel de la preuve mathématique. La plupart des références à la littérature la plus ancienne peuvent être trouvées dans l'excellente collection "De Frege à Gödel", éditée par Jean van Heijenoort (1971, cf. [5]).

Le titre de mon exposé fait allusion à la fois au travail de Thoralf Skolem, mais également, et peut-être encore plus, aux conclusions auxquelles il a abouti, assez tôt lors du développement de la logique mathématique.

Le travail en question est bien sûr le théorème célèbre de Lowenheim-Skolem, dont Skolem a donné une démonstration simplifiée, et qui est indubitablement le résultat le plus basique à propos duquel les systèmes axiomatiques généraux peuvent se voir donner des formulations diverses, mais la forme que Skolem lui-même attribue à Lowenheim est qu'une expression du "vraiment premier" ordre est soit contradictoire, soit satisfiable par un domaine infini dénombrable" (Skolem 1970, cf. [4]). Comme Skolem l'a montré, il y a une extension naturelle au cas de telles expressions dénombrables.

"Contradictoire" ici est défini en référence aux règles du calcul des prédicats, i.e. qui correspondent au raisonnement mathématique normal. La conclusion surprenante à laquelle Skolem est arrivé est le fameux paradoxe de Skolem, qui énonce que n'importe lequel des systèmes d'axiomes habituel pour la théorie des ensembles aura des modèles calculables, à moins qu'ils ne soient contradictoires. Dans la mesure où je ne peux supposer que mon audience n'est constituée que de logiciens experts, je rappellerai que bien que l'ensemble des réels ait un modèle calculable qui est calculable vu de l'extérieur, il n'y a pas de fonction "vivant dans le modèle" qui le mette en correspondance de façon bijective avec l'ensemble des entiers du modèle. Ce fait et d'autres considérations ont amené Skolem à ce point-de-vue.

> *Je croyais qu'il était si clair que l'axiomatisation en terme d'ensembles ne constituait pas un socle ultime de fondements satisfaisant des mathématiques, que les mathématiciens, pour la plupart, ne seraient pas très concernés par cette axiomatisation.*

Le point de vue que je présenterai diffère un peu de celui-ci, et est en un certain sens plus radical, notamment parce qu'il n'est pas raisonnable de s'attendre à ce que chaque raisonnement tel que ceux que nous appelons rigoureux en mathématiques puisse espérer tout résoudre mais puisse résoudre seulement la plus petite portion des questions mathématiques potentielles.

Le théorème de Lowenheim-Skolem a été la première découverte vraiment importante à propos des systèmes formels en général, et il en reste probablement la plus basique. Ce n'est pas un résultat négatif du tout, mais il joue un rôle important en mathématiques dans de nombreuses situations. Par exemple, dans la preuve de Gödel de la consistance de l'hypothèse du continu, le fait que l'hypothèse soit vérifiée dans l'univers des ensembles constructibles est essentiellement une application de ce théorème. Dans la présentation de Skolem du théorème de base, on le lit comme un théorème plausible, naturel en mathématiques, non encombré du jargon qui prévaut dans de nombreux papiers actuels, et, par dessus tout, dans les débats philosophiques concernant les fondements des mathématiques. Comme le lecteur peut le vérifier en se référant au livre de référence de van Heijenoort, tous les écrits de Skolem sur la logique et sur la théorie des ensembles sont d'une clarté et d'une simplicité qui est frappante. Même maintenant, il est vraiment réconfortant de lire ces papiers et de réfléchir à leur sujet.

Maintenant, aucune discussion de preuve ne manque de faire référence au théorème d'incomplétude de Gödel. Son résultat est qu'aucun système raisonnable de mathématiques ne peut prouver sa propre consistance, où ce dernier est établi comme un théorème à propos des preuves dans son propre système formel, et par conséquent, peut être construit comme un résultat en combinatoire ou en théorie des nombres. Le théorème d'incomplétude est un théorème de mathématiques, et non un énoncé philosophique. Ainsi, en ce sens, il est inattaquable, mais, dans un autre sens, puisqu'il fait référence à une question si spécifique, il n'est pas très pertinent pour la question que j'adresse dans cet exposé, notamment le fait qu'on puisse raisonnablement attendre qu'il soit répondu aux questions mathématiques par des raisonnements mathématiques. C'est bien sûr la première, et peut-être la seule, assertion prouvée qui soutienne le pessimisme de base du point de vue de Skolem.

Laissez-moi commencer en rappelant quelques faits concernant le développement de la méthode axiomatique, qui vous est, j'en suis sûr, familière. Avec le livre fondateur de Frege "Begrifischrift" en 1879, la notion de système formel a reçu sa forme définitive. Un important travail lié à cela a été effectué par Boole, et Pierce, et plus tard, Peano a présenté une approche similaire, mais le travail de Frege, pour la première fois dans l'histoire de la pensée humaine, la notion de déduction logique, a reçu une formulation complètement précise. Le travail de Frege ne contenait pas seulement la description du langage (que nous pourrions appeler de nos jours le “langage machine”), mais également une description des règles pour manipuler ce langage, ce que nous appelons de nos jours le calcul des prédicats. Maintenant les grecs avaient introduit la méthode axiomatique, et Leibniz avait émis des spéculations à propos d'un mécanisme déductif universel. Ainsi, comme avec beaucoup de grandes découvertes, la formulation précise de ce qui est signifié par un système formel, a grandi graduellement dans l'inconscient collectif, et de ce fait, elle n'est peut-être pas apparue à de nombreuses personnes comme une percée. Certainement aucune idée radicalement nouvelle ne fut introduite, et aucun problème particulièrement difficile n'a été surpassé. Mais c'était un point de repère majeur. Pour la première fois, on pouvait précisément parler de preuves et de systèmes axiomatiques. Le travail a été largement dupliqué par d'autres, e.g. Russell et Whitehead, qui ont donné leurs propres formulations et notations, et même Hilbert a fait quelques tentatives pour reformuler la notion de base d'un système formel. La variété de telles tentatives est reliée au fait de faire une distinction claire entre les axiomes qui sont déclarés comme étant le point de départ d'une théorie et les méthodes de déduction qui devront être utilisées. Le théorème de complétude de Gödel, que beaucoup pensent implicite dans le travail de Skolem, montre explicitement qu'il n'y a pas d'ambiguité dans les règles de déduction. Cela est très en contraste avec le théorème d'incomplétude, qui montre qu'aucun système raisonnable d'axiomes ne peut être complet.

Pendant tous ces développements, un vif débat a fait rage, continuant quasiment jusqu'à la seconde guerre mondiale, sur la validité ultime des mathématiques. Ce débat a montré l'émergence du formalisme, du logicisme et de l'intuitionnisme comme compétiteurs pour des fondements correcte des mathématiques. Je discuterai brièvement de ces philosophies concurrentes, en notant au début que chacune d'elles semble se focaliser sur les preuves plutôt que sur les modèles. De ce point de vue, les idées de Skolem était en total contraste avec celles de ses contemporains. Je crois qu'aujourd'hui, la situation est plutôt inverse, en partie à cause de mon propre travail, qui montre combien de modèles de la théorie des ensembles peuvent être construits en utilisant la notion de forcing (Cohen 1966). En effet, Skolem prévoyait même, dans son article de 1922, la construction de nouveaux modèles de la théorie des ensembles, du moins c'est ce qu'il déclare.

> *Ce serait dans tous les cas d'un bien plus grand intérêt si l'on pouvait prouver qu'un nouveau sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ pouvait lui être adjoint sans donner naissance à des contradictions ; mais cela “serait probablement très difficile”. Comme il le disait, en avance sur son temps, donc le désintérêt pour la question des modèles était peut-être l'un des points de vue les plus*

communs au sujet des fondements des mathématiques.

D'abord, je mentionnerai la croyance de Hilbert que les belles mathématiques, érigées au cours des siècles, était en quelque sorte sacro-saintes, et ne pourrait être défiées. Par exemple, il pensait que la connaissance mathématique était notre droit de naissance, et qu'en principe, le raisonnement humain pourrait décider de toutes les questions mathématiques. Il pensait nécessaire de défendre, à tout prix, les mathématiques des attaques de Kronecker et Bronwer. Dans son article de 1904, il résume les articles de Kronecker, Helmholtz, Christoffel, Frege, Dedekind et Cantor, trouvant des défauts dans leurs points de vue, et fournissant son propre traitement comme une alternative. Je ne suis pas très impressionné par ses efforts dans ce papier, mais j'admire grandement la ténacité avec laquelle il défend l'inviolabilité du raisonnement mathématique. Peut-être a-t-il lui-même réalisé les difficultés de donner des fondements quelconques satisfaisante, et s'est-il du coup rétracté, si je peux utiliser cette expression, sur une position plus modeste, qui est que si nous regardons les mathématiques comme un jeu formel sur des symboles, nous pourrions montrer que le jeu est consistant. Cela a été appelé le programme de Hilbert, et alors de nombreuses tentatives ont été faites dont peu ont été accomplies, et les raisons pour cela en devinrent claires quand Gödel prouva son théorème d'incomplétude. Le programme a survécu en une certaine forme, sous le nom de théorie de la preuve, et nous ferons plus tard référence au résultat exceptionnel de Gentzen dans cette discipline, le but de Hilbert fut informellement esquissé, puisque ce que l'on entendait par preuve de consistance n'était pas entièrement explicite. Sa conviction principale était qu'au-delà de tout doute, les mathématiques faisaient référence à une réalité existante, et que cela les mettait à l'abri de toutes les attaques philosophiques, et il apprécia sans aucun doute le soutien qui lui fut prodigué par une grande majorité de mathématiciens.

Ensuite, une école de pensée démarra qui questionnait les méthodes de preuve impliquant ce qui pourrait être appelé le raisonnement non-constructif. Les premiers personnages de cette école de pensée furent Brouwer et Weyl, tous deux de très renommés mathématiciens. Les objections frappèrent l'utilisation du calcul classique des prédicats, en rejetant par exemple le principe du tiers-exclus et les preuves d'existence non-constructives qui lui étaient liées. L'école intuitionniste n'obtint probablement jamais beaucoup de crédit parmi les mathématiciens en exercice, mais elle a refait surface de façon répétée sous des formes variées, par exemple dans le travail de Errett Bishop sur l'analyse constructive. Dans certaines formes, cette école peut même complètement rejeter l'utilisation des systèmes formels, sur la base qu'ils ne sont pas pertinents pour le raisonnement mathématique.

Une question récurrente a été de savoir si la théorie des ensembles, qui parle d'ensembles infinis, fait référence à une réalité existante, et dans un tel cas, comment quelqu'un "sait-il" quels axiomes accepter. C'est là que la plus grande disparité d'opinions existe (et le plus grand nombre de possibilités d'utiliser différents systèmes consistants d'axiomes).

Questions concernant le calcul des prédicats

"La formulation, par Frege et d'autres, des mathématiques comme un système formel, doit certainement être considérée comme une étape dans l'histoire de la pensée humaine. D'une certaine manière, c'est une des réussites les plus curieuses, en ce qu'elle a seulement codifié ce qui était connu. Pourtant, comme structure complétée, réduire la pensée mathématique à ce que nous appelons aujourd'hui le langage machine, et par là en éliminer tout ce qui est vague, a été une étape historique. Peut-être que Frege et les premières personnes qui ont travaillé ainsi ne séparaient pas complètement la formalisation de la pensée logique et les règles logiques de déduction. Aujourd'hui, nous faisons cela clairement, et ces règles sont connues comme le calcul des prédicats. Concernant le calcul des prédicats lui-même, il n'y a pas de controverse, bien que les intuitionnistes et autres restreignent son utilisation. Le travail de Lowenheim et Skolem, et le théorème de complétude de Gödel montrent en effet qu'on a un invariant, la notion naturelle. Laissez-moi maintenant établir ces résultats.

D'abord, je revois la formulation du langage. On a des symboles pour les relations (d'arités variées) entre les objets. On a les connecteurs logiques, les quantificateurs, et quelques symboles utiles comme les parenthèses, les virgules, et finalement les symboles pour les variables individuelles et les constantes. Les règles pour la manipulation des connecteurs sont quelquefois appelées le calcul booléen ou le calcul propositionnel. Beaucoup plus utile, dans le sens où ils contiennent le nœud du raisonnement mathématique, il y a les quantificateurs. Ce sont les quantificateurs existentiels ("il existe") et les quantificateurs universels ("pour tout"). Les règles du calcul propositionnel sont élémentaires et bien connues. L'étape clef dans le raisonnement mathématique est que si l'on stipule qu'"*il existe un z ayant une certaine propriété $A(z)$.*", alors nous inventons un nom pour un tel objet et l'appelons une constante, et nous pouvons former des phrases avec le nom choisi.

Inversement, si une assertion universelle stipule que "$A(z)$ *est vraie pour tout z.*" alors nous pouvons déduire $A(c)$ pour toutes les constantes. Par exemple, si nous avons une constante positive réelle a, et que nous savons qu'une racine carrée existe pour tout réel positif, alors nous inventons le symbole b pour la racine carrée de a.

Vues de cette manière, les règles deviennent extrêmement transparentes, si l'on évite les conflits entre noms pour les constantes et autre. La découverte fondamentale de Lowenheim et Skolem, qui est sans aucun doute la plus grande découverte en logique pure, est que l'invention (ou introduction) des "constantes" qui est présente dans le calcul des prédicats, est équivalente à la construction d'un "modèle" dans lequel les assertions sont vraies. Plus précisément, si l'utilisation du calcul des prédicats n'amène pas à une contradiction sur la base d'un ensemble S de phrases, alors l'usage répétée de ces règles résultera en un modèle pour le système S. De plus, la méthode assure que nous obtenons un modèle calculable si S est calculable. Et ainsi, nous parvenons au "paradoxe" de Skolem qui est que si un système d'axiomes du premier ordre est consistant alors il a un modèle calculable, parce que tous les systèmes courants de la théorie des ensembles ont un nombre dénombrable d'axiomes.

Dans mon for intérieur, je remarque que ce travail a reçu de manière étonnante très peu d'attention. Par exemple, Skolem remarque qu'il a communiqué ces résultats à des mathématiciens à Gottingen, et a été surpris de ce que, malgré le fait qu'il révélait une "déficience" dans la méthode axiomatique, il perdurait, dans son opinion, une foi injustifiée en le fait que la méthode axiomatique pouvait capturer la notion de vérité mathématique. C'est le pessimisme auquel je fais référence dans le titre. Plus loin, je ferai référence à un pessimisme encore plus profond, qui a trouvé peu d'expression dans la littérature.

Skolem avait un beau style d'écriture, intuitif, totalement précis, encore plus dans l'esprit du reste des mathématiques, pas du tout dans le style fantastiquement pédant de Russell et Whitehead. Ainsi, Hilbert avait même posé comme un problème le résultat que Skolem avait prouvé, et même Gödel, dans sa thèse dans laquelle il prouve ce qui est connu comme le théorème de complétude, ne semble pas avoir apprécié ce que Skolem avait fait, même si dans une note de bas de page, il reconnaît effectivement qu'"une procédure analogue a été utilisée par Skolem". Une explication possible de cela réside dans le fait que Skolem mettait l'accent sur les modèles, et était étonnamment d'avant-garde dans certaines de ses remarques concernant les preuves d'indépendance en théorie des ensembles. Une discussion sur la question de la priorité des résultats peut être trouvée dans les notes des Œuvres complètes de Gödel (Gödel 1986).

Gödel était absolument sincère dans sa croyance que sa preuve était en un certain sens nouvelle, et, au regard des ses contributions monumentales, je ne souhaiterais en aucune manière lui jeter une quelconque faute. Ce qui est intéressant, c'est plutôt la manière dont l'orientation plus philosophique des logiciens de cette époque, même pour le grand Hilbert, a créé une distorsion dans sa manière de voir le domaine et ses résultats. Quand Gödel a montré, dans son théorème d'incomplétude, que le programme de Hilbert était condamné, Hilbert (autant que je puisse en lire dans les comptes-rendus) ne l'a même pas invité à présenter ses résultats à Gottingen. Gödel n'avait pas de position permanente, et c'est seulement grâce à la perspicacité de mathématiciens américains, qui ont compris l'importance de son travail, qu'il a finalement été nommé à l'Institut pour les Etudes Avancées (IAS) à Princeton.

Du coup, quelles sont les disputes impliquant les règles de la logique, étant donné que le théorème de complétude semble dire qu'elles rendent comptent de tout le raisonnement correct, dans la logique du premier ordre ? Je n'essaierai pas de caractériser les écoles diverses dans cette dispute, ni leurs principes philosophiques. Mais je pense que l'on peut dire sans se tromper que les différences concernent la notion de constructivisme, et la restriction des preuves d'existence est basé sur le raisonnement constructif. Beaucoup de personnes ont voué leurs efforts à développer différentes parties des mathématiques de manière constructive. Je pense que pour beaucoup, le problème crucial est déjà présent dans la partie la plus basique des mathématiques, la théorie des nombres. Puisque la théorie des ensembles est non constructive presque par définition, en cela qu'elle parle d'ensembles infinis, on attend grandement que des idées constructives aient du succès là (bien sûr, Gödel, dans sa preuve de la consistance de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix, preuve pour laquelle on peut dire qu'il y a un avant et un après elle, Gödel donc, utilise la notion de "constructibilité", mais c'est dans un sens étendu qui implique la référence aux ordinaux, et ainsi, la preuve est complètement naturelle dans la théorie des ensembles).

En théorie des nombres, la plupart des résultats sont obtenus constructivement, même si cela nécessite un certain travail de le voir. Laissez-moi fournir ce que je pense être le premier exemple d'une preuve vraiment non-constructive en théorie des nombres, de manière à ce que la lectrice, si elle n'est pas une logicienne, soit exposée à quelques-unes des subtilités que cela entraîne. C'est le fameux théorème du compatriote de Skolem, Thue, étendu par Siegel, et dans un sens complètement démontré par Roth. Il dit qu'un nombre algébrique peut seulement avoir un nombre fini de bonnes approximations par des nombres rationnels. Il n'y a pas besoin de préciser la signification de "bonne approximation" ici, l'idée de base étant que l'erreur d'appoximation devrait être inférieure à une certaine fonction du dénominateur du rationnel approximant. Le théorème a pour conséquence que certaines équations polynomiales en deux variables ont seulement un nombre fini de solutions entières.

Maintenant, toutes les preuves classique sont complètement “élémentaires” (même si elles sont ingénieuses), et sont constructives excepté dans les toutes dernières lignes de la preuve. Thue a montré qu'il ne pouvait y avoir deux approximations p/q and y/q', où à la fois p et q sont plus grands qu'un nombre c (constructivement donné), avec q plus grand qu'une puissance de 4. Alors il aboutit à la conclusion qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de bonnes approximations, puisque p/q est donné, il y a une limite pour toutes les autres approximations p'/q. C'est une déduction parfaitement correcte, mais si l'on ne connaît pas une solution, alors on n'est pas en mesure de limiter les autres. C'est un problème plus difficile, et, bien que le travail de Baker ait amené des estimées constructives dans quelques cas, on semble loin d'obtenir des limites constructives en général. Depuis l'époque de Thue, d'autres exemples ont été trouvés, mais pas plus d'une douzaine. Bien sûr on n'a pas de preuve que des limites constructives n'existent pas. Même si on est incertain à propos des limites exactes de cette notion, on peut, et on le fait d'ailleurs, demander s'il y a des limites récursives générales, ou des primitives récursives meilleures.

Comme je ne partage pas l'idéologie intuitionniste, ou aucune de ses variantes, je ne ferai pas l'objection qu'ils feraient, mais clairement tout mathématicien doit se sentir mal à l'aise par rapport à la preuve ci-dessus. Il est simplement souhaitable d'avoir une preuve plus constructive.

Il y a des personnes qui sont plus extrêmes, et qui prétendent que toute preuve inductive (telle que celle ci-dessus) basée sur des prédicats avec trop de changements de variables (de telle façon qu'aucune instance ne soit immédiatement vérifiable) ne devrait pas être autorisée. L'opinion la plus extrême, défendue par un mathématicien au moins d'une université respectable, est qu'une contradiction finira par être trouvée en théorie élémentaire des nombres.

Laissez-moi expliquer pourquoi je ne peux pas accepter de telles limitations à l'utilisation du calcul des prédicats. La raison se trouve dans les procédures du calcul des prédicats, parce qu'en un certain sens, toute assertion est prouvée par contradiction. La forme de la preuve peut varier mais, par essence, le théorème de complétude dit que si un ensemble d'axiomes n'amène pas à une contradiction alors il est satisfiable. Du coup, pour montrer que quelque chose est valide, i.e. que cette chose est nécessairement satisfaite, on doit montrer que l'assomption de sa négation aboutit à une contradiction.

Puisque je ferai à nouveau référence à cette procédure ultérieurement, laisse-moi insister plus en détail sur les règles en jeu. En utilisant des règles élémentaires, on peut mettre toute assertion en forme prénexe. Une assertion en forme prénexe est de la forme "*pour tout* $a, A(a)$" ou "*il existe* a *tel que* $A(a)$", où A lui-même peut contenir d'autres quantificateurs, et des constantes qui ont été introduites précédemment. Dans le cas de "*pour tout* x, $A(x)$",on peut ajouter à la liste dont on cherche à amener une contradiction tous les "*A(c)*". Dans le cas d'une assertion "*il existe z tel que A(z)*", on ajoute le "*A(c)*" correspondant à une nouvelle constante c. S'il y a une contradiction dérivable de nos assertions originales, alors on aboutira à cette contradiction au bout d'un nombre fini d'applications des règles procédurales, et à ce moment-là, la contradiction aura été obtenue par le calcul propositionnel, puisque tous les quantificateurs prénexes auront été éliminés. Plus spécifiquement, comme Skolem le note explicitement, nous regardons toutes les relations originellement définies, et les substitutions obtenues en utilisant les constantes introduites aux différentes étapes, et nous finirons par être incapables d'assigner des valeurs de vérité qui marchent pour les variables, nous sommes en effet en train de construire un modèle de l'ensemble original d'assertions. Il y a des détails techniques qui nécessitent d'être revus encore et encore, mais ils ne sont pas compliqués. Je renvoie le lecteur au papier original de Skolem pour une explication intuitive.

Maintenant il est clair pour moi que si une contradiction est obtenue, l'ensemble constitué des assertions originales doit être "faux". Bien sûr, les intuitionnistes peuvent rétorquer que cela n'est pas assez bon, qu'on veut plus qu'une preuve par contradiction de logique classique. Je peux seulement répondre que dans les mathématiques habituelles, celles de tous les jours, comme pratiquées par une vaste majorité de mathématiciens, toutes les preuves procèdent par contradiction. Cela peut paraître surprenant à première vue, mais penser au théorème de la complétude dans les termes ci-dessus montrera que c'est exactement ce qui se fait dans toutes les preuves. Dans mon commentaire final, dans lequel je présenterai une vue "pessimiste", il est important que chacun comprenne la méthode autorisée par le calcul des prédicats.

Questions de consistance

Durant la période du grand débat, entre 1910 et 1920, émergea l'école formaliste associée à Hilbert. Mon impression est qu'Hilbert partageait le point de vue des mathématiciens "naïfs", c'est-à-dire que les mathématiques existantes, avec leur notion de preuve, correspondent au monde réel. Et encore, dans un sens, le formalisme affirme le contraire. Hilbert voulait sécuriser les mathématiques des attaques des intuitionistes et des autres, et du coup, il proposa un programme minimal pour prouver que les mathématiques formalisées étaient consistantes. Il ne fait pas de doute que ceci apparut à ce moment-là comme un but raisonnable, et on aurait même pu espérer que la preuve de consistance puisse être faite en mathématiques combinatoires élémentaires (de ce point de vue, les mathématiques pourraient être construites comme un jeu combinatoire). Une idée accompagnant cela était plus audacieuse, notamment qu'une telle analyse combinatoire pourrait même résulter en une procédure de décision, i.e. une méthode pour décider si une assertion donnée pourrait être prouvée ou pas, ou, encore plus ambitieusement, pour décider de la valeur de vérité de l'assertion en question.

Cet espoir fut bien sûr brisé par le théorème d'incomplétude de Gödel, qui affirme qu'aucun système raisonnablement complexe ne peut prouver sa propre consistance, à moins qu'il ne soit inconsistant, auquel cas tout est prouvable et le système est inutile. Ma thèse principale ici, dont je discuterai à la fin de la conférence, est que la prémisse du programme de Hilbert est plus profondément fausse. Je décrète que les mathématiques peuvent prouver seulement une incroyablement petite proportion de toutes les assertions vraies. Mais maintenant, je vais présenter quelques résultats techniques en théorie de la preuve.

"La preuve d'incomplétude peut être formulée de différentes manières, équivalentes pour l'essentiel. En particulier, elle est reliée de façon proche à la notion de fonction récursive ou calculable, et a motivé le large sujet de la théorie des fonctions récursives, de telle manière qu'on ne peut regarder les résultats de Gödel comme purement négatifs.

Un sujet technique, la théorie de la preuve, a émergé, avec, comme but particulier, de comprendre précisément l'improuvabilité de la consistance. Pour une théorie donnée, nous disposons d'un principe combinatoire qui est naturel et qui nous autorise à prouver la consistance. "Les premiers, et toujours très surprenants résultats sont ceux de Gentzen (1969), qui a analysé "la force de la consistance de la théorie élémentaire des nombres" (l'arithmétique de Peano du premier ordre). Puisque la théorie élémentaire des nombres semble nécessiter de toute manière de l'analyse combinatoire, il peut sembler stupide d'utiliser la théorie des nombres pour prouver que la théorie des nombres est consistante. Pourtant, le travail élégant de Gentzen n'est pas circulaire, et il peut être formulé de façon à fournir une information précise au sujet des preuves en théorie élémentaire des nombres. Laissez-moi brosser l'idée de sa preuve, dans ma propre version que j'ai l'intention de publier un jour.

Considérons (en théorie des nombres) une preuve P d'une contradiction. Dans notre exposé des règles de déduction, nous avons dit qu'il y avait des possibilités variées, toutes équivalentes. Maintenant nous devons rendre les choses précises. C'est plus naturel de regarder la preuve comme constituée de différents cas comme A et $nonA$, et de voir la démonstration comme un arbre, qui commence au sommet de l'arbre, citant les axiomes de la théorie des nombres, et autorisant la division en branches, nous arrivons à une situation dans laquelle, en autorisant l'invention et la substitution de constantes comme on l'a décrit, nous aboutissons à une contradiction dans toutes les branches, parmi les assertions n'impliquant que des constantes. Nous autorisons également des manipulations booléennes comme on les fait habituellement. Ainsi une preuve de contradiction devient un arbre, avec une contradiction dans chaque branche. Maintenant, la structure à branches est importante, à cause de la structure des axiomes de la théorie des nombres. L'axiome clef est l'axiome d'induction. C'est vraiment un ensemble dénombrable d'axiomes, avec une instance pour chaque propriété $A(n)$ ne contenant qu'une variable libre n. Une telle instance établit qu'une des trois possibilités est vérifiée :

- soit $A(0)$ est faux ;
- ou pour un certain n, $A(n)$ est vrai et $A(n+1)$ est faux ;
- ou $A(n)$ est vrai pour tout n.

De façon évidente, ce branchement est une caractéristique essentielle de l'induction. L'idée derrière la preuve de Gentzen est d'aller de P à une autre preuve P' de la contradiction, avec une structure d'arbre plus simple.

Comment simplifier la preuve ? Bien, dans tout branchement inductif comme dans celui ci-dessus, la branche la plus aisée à étudier est la troisième, puisqu'elle dit que quelque chose est vrai pour tout n et n'affirme pas l'existence d'une constante particulière. Brièvement, on descend dans l'arbre et on attend jusqu'à rencontrer un entier particulier, disons 5, pour lequel $A(5)$ est vrai. Mais l'induction jusqu'à 5 est évidente et peut être remplacée par cinq cas de l'hypothèse d'induction. Cela doit être fait avec précaution. Pourtant, on voit que dans une branche au moins, aucune constante n'est créée, excepté pour des numéaux particuliers comme 5 ou 7. De cette manière, l'utilisation de l'axiome d'induction peut être éliminé au moins dans un cas.

Maintenant, assumons que la réduction de P à P' est définie, la question est "est-ce que la nouvelle preuve de la contradiction est plus simple à obtenir ?". L'ensemble de tous les arbres finis peut être ordonné de manière simple, notamment, en commençant depuis le premier nœud d'un arbre, on compare deux arbres en comparant leurs branches, en assumant par induction que les arbres de profondeur un ou moins ont déjà été ordonnés. Maintenant, si nous définissons les choses correctement, nous pouvons montrer qu'en effet, l'ordre d'un arbre diminue à chaque fois qu'on élimine une utilisation unique de l'induction. Cet ordre est un bon ordre, et il correspond à l'ordinal ϵ_0, qui peut aussi être défini comme la limite de ω_n, quand n tend vers ω où ω_1 est ω et ω_{n+1} est ω^{ω_n}. Grâce au théorème de Gödel, il s'ensuit que soit nous ne pouvons pas formuler ce genre d'induction dans le système, soit nous pouvons le faire, mais nous ne pouvons pas le prouver. Si on est dans ce dernier cas, on atteint un principe combinatoire plausible juste hors d'atteinte de la théorie des nombres, et un pour lequel on peut prouver la consistance de la théorie élémentaire des nombres de manière élémentaire. La théorie de la preuve a continué à chercher des principes analogues pour des systèmes plus compliqués, e.g. des fragments de la théorie des ensembles.

Théorie des ensembles, la frontière ultime

A peu près au même moment, Frege était en train de développer le premier système formel universel, Cantor développait les fondements des mathématiques basées sur la théorie des ensembles. Plus précisément, on peut dire que Cantor réalisa que la théorie des ensembles était un domaine légitime d'étude, ne réalisant peut-être pas qu'elle était la base de toutes les mathématiques. En tout cas, Frege fit une tentative d'axiomatiser la "théorie des ensembles", et il fit une erreur en autorisant l'ensemble de tous les ensembles, parvenant par cela à une contradiction. On attribue habituellement à Zermelo la première axiomatisation de la théorie des ensembles, plus ou moins dans la forme que l'on considère aujourd'hui. Pourtant, le système était encore vaguement défini, et à nouveau, c'est Skolem qui en pointa les déficiences (Fraenkel le fit aussi, de façon moins précise). Cela donne le système connu aujourd'hui comme la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.

Le développement de la théorie des ensembles a été largement séparé de celui du reste des mathématiques, excepté peut-être pour des considérations autour de l'axiome du choix. Néanmoins, les mathématiciens ont comme d'habitude regardé les problèmes de la théorie des ensembles comme des questions mathématiques légitimes. L'hypothèse du continu, malgré les résultats d'indépendance, reste un objet de spéculation pour les théoriciens des ensembles.

C'est dans la théorie des ensembles que l'on trouve la plus grande diversité d'opinions au sujet des fondements. Cela est dû au fait que même les plus dévoués aux nouveaux axiomes n'argumenteront pas sur le fait que ces axiomes soient justifiés par une quelconque "intuition" à propos des ensembles. Laissez-moi donner quelques exemples de ce que visent de tels axiomes.

On peut faire varier le domaine des ensembles autorisés. Les mathématiques conventionnelles ont rarement besoin de considérer plus de quatre ou cinq itérations d'un axiome de la théorie des ensembles à l'ensemble des entiers. Plus d'itérations diminuent notre sens de la réalité des objets impliqués.

On peut tenter de faire varier les propriétés autorisées dans l'axiome de compréhension, pendant qu'on esquive le problème de Frege.

Les axiomes d'infinité affirment l'existence de grands cardinaux, cette existence ne pouvant être prouvée dans le système de Zermelo-Fraenkel. L'exemple le plus flagrant est celui des cardinaux inaccessibles, et plus récemment, on a considéré des cardinaux beaucoup plus grands, dont l'existence a de remarquables conséquences même pour l'analyse réelle. Ces sortes d'axiomes peuvent être étendus indéfiniment, il semblerait, et, malgré l'intérêt de leurs conséquences, la réalité des cardinaux impliqués devient de plus en plus douteuse. La même chose peut être dite pour des axiomes plus exotiques, de type détermination, malgré les remarquables connexions maintenant connues entre la force de leur consistance et celle des grands cardinaux.

Du coup, nous arrivons maintenant à la question la plus basique. Est-ce que la théorie des ensembles, une fois qu'on parvient au-delà des entiers, fait référence à une réalité existante, ou doit-elle être regardée, comme les formalistes la regardent, comme un intéressant jeu formel ? Dans ce sens, nous allons au-delà du champ de cette conférence, qui concerne la preuve. Nous questionnons plutôt le véritable sens de certaines choses qui sont prouvées. Je pense que pour la plupart des mathématiciens, la théorie des ensembles est attractive, mais elle manque l'objectif de base qu'est l'arithmétique. Il y a presque un continuum de croyances à propos de l'étendue réelle sur le monde de la théorie des ensembles.

Un argument typique pour la réalité objective de la théorie des ensembles est qu'elle est obtenue par extrapolation à partir de nos intuitions des objets finis, et les gens ne voient pas de raison pour laquelle cela diminuerait sa validité. De plus, la théorie des ensembles a été étudiée pendant longtemps sans qu'il y ait la moindre allusion à une contradiction. On suggère que cela ne peut pas être un accident, et ainsi que la théorie des ensembles reflète une réalité existante. En particulier, l'hypothèse du continu et les assertions qui lui sont liées sont vraies ou fausses, et notre tâche est de les résoudre.

Un contre-argument est que l'extrapolation n'a pas de base dans la réalité. Nous ne pouvons chercher parmi tous les ensembles de réels pour décider de l'hypothèse du continu. Nous n'avons pas de raison du tout de croire que ces ensembles existent. C'est simplement un fait empirique qu'aucune contradiction n'ait été découverte.

Clairement les deux points de vue ont leurs forces et leurs faiblesses. Au fil des années, je me suis rangé de plus en plus fermement vers la position formelle. Ce choix est tempéré par un certain respect pour toutes les mathématiques qui ont utilisé la théorie des ensembles comme base, et je n'attaque le travail qui a été fait en théorie des ensembles en aucune manière. Pourtant, quand des systèmes d'axiomes impliquent de larges cardinaux ou quand de la détermination est utilisée, je ressens une perte de réalité, même si la recherche est ingénieuse et cohérente. En particulier, un gros défaut de la première manière de penser, selon moi, est l'idée que si les mathématiques font référence à la réalité alors la pensée humaine devrait résoudre toutes les questions mathématiques. J'en arrive à ma dernière section, sur le pessimisme ultime.

Le pessimisme ultime découlant des idées de Skolem

Skolem, dans ses papiers, était si frappé par le fait que certains modèles ne soient pas isomorphes si ce n'est les systèmes d'axiomes les plus triviaux que cela l'avait amené à douter de la pertinence d'un quelconque système d'axiomes que ce soit à adresser les questions concernant les fondements des mathématiques. Par exemple, il releva l'existence de modèles calculables pour la théorie des ensembles. Il semble avoir été le premier à clairement mettre l'accent sur les modèles plutôt que sur les méthodes de preuve. S'il a ou non cru en un modèle absolu de la théorie des ensembles, qui ait été au-delà de toutes les tentatives à le décrire par des axiomes, n'est pas clair pour moi. Mais il connaissait certainement les limitations de ce qui pourrait être prouvé. Dans un passage remarquable, il discute même de la manière dont pourraient être construits des nouveaux modèles de la théorie des ensembles, en ajoutant des ensembles ayant des propriétés spéciales, même s'il dit qu'il n'a pas idée de la manière dont cela pourrait être fait. Ca a été exactement le point de démarrage de mon propre travail sur les questions d'indépendance, même si je n'étais pas au courant du tout du fait que Skolem avait considéré la même possibilité. Il me semble toujours que c'était futile d'adopter une approche "preuve théorique" et d'analyser la structure des preuves. Même si la position formaliste est adoptée, dans la pensée actuelle au sujet des mathématiques, on peut n'avoir aucune intuition à moins que l'on n'assume que les modèles existent et que les structures sont réelles.

Du coup, laissez-moi dire que j'attribuerai cette vision à Skolem, même si elle n'a pas été explicitement énoncée par lui, qu'il y a une réalité mathématique, mais que les axiomes ne peuvent la décrire. En effet, on peut aller plus loin et dire qu'il n'y a pas de raison de penser que tout système axiomatique peut la décrire de façon adéquate.

D'où vient la connaissance, exprimée si vivement par Hilbert, que toutes les questions devraient être résolues ? Une chose qui me frappe, même depuis mes premières rencontres avec les mathématiques, prend son origine chez les Grecs, et chez Euclide en particulier. Ici pour la première fois, nous voyons le pouvoir de l'intelligence humaine amenée à s'appuyer non seulement sur les mathématiques, mais également sur la physique ou l'astronomie. Quel fantastique frisson cela a dû être que de vivre à cette époque et d'apprécier l'échappatoire des superstitions et des premières croyances, et la naissance soudaine du triomphe de la raison seule ! Nous avons tous ressenti ce frisson, en rencontrant, jeune, Euclide et la merveilleuse beauté et complétude de son système géométrique. Il y a encore seulement une centaine d'années, le théorème de Pythagore était regardé comme une merveille de raisonnement déductif, et des livres ont été publiés en contenant de nombreuses preuves.

Mais rappelons le théorème de Skolem. Comment quelqu'un procède-t-il dans une preuve ? Après un nombre fini d'étapes, on invente des symboles pour les objets dont on sait qu'ils existent sous certaines suppositions. On réalise un nombre fini de substitutions des constantes intervenant dans les assertions universelles, et on répète cela en boucle. Alors on voit s'il y a une contradiction propositionnelle, selon le principe d'induction présenté précédemment. Mais, par essence, tout ce que quelqu'un peut faire, c'est de vérifier sur un nombre fini d'entiers dérivés de l'hypothèse. Avec Inck, nous sommes parvenus à une contradiction, et ainsi, nous avons pu prouver un truc. Mais supposons que quelqu'un demande si une assertion pas du tout naturelle à propos des nombres premiers est vérifiée, par exemple la question des nombres premiers jumeaux. Peut-être que sur la base de considérations statistiques, nous nous attendons à ce que les nombres premiers vérifient la loi en question. Mais les nombres premiers semblent complètement aléatoires, et dans le but de prouver que l'hypothèse statistique est vraie, nous devons trouver des lois logiques qui l'impliquent. N'est-ce pas un peu comme si, simplement comme un ensemble de nombres pris au hasard, les nombres premiers satisfaisaient l'hypothèse ? Vu du point de vue de la construction de Skolem, il semblerait que nous puissions faire des tests, mais il se pourrait également que de tels tests soient sans espoir de déterminer la vérité.

Maintenant, on peut se demander comment l'introduction d'axiomes plus élevés sur l'infini (ayant peut-être des implications analytiques) pourrait affecter le fait qu'une assertion puisse être prouvée. En effet, le théorème d'incomplétude de Gödel ne montre-t-il pas exactement que la consistance d'un système donné, que ce soit une assertion combinatoire, ou de théorie des nombres, sera résolue en passant à une autre infinité ? L'utilisation d'axiomes de théories des ensembles de plus en plus compliquées permet-elle de résoudre des assertions de plus en plus arithmétiques ?

Ma réponse a deux aspects. Selon son premier aspect, ce qui a été énoncé ci-dessus est un espoir plutôt idéaliste. Les seuls assertions d'arithmétique, résolues par une théorie des ensembles de niveau supérieur, qui sont connues aujourd'hui, sont de manière basique des assertions de consistance ou avoisinant. Dans un sens, les systèmes de plus haut niveau supposent des principes que nous souhaitons prouver. Il n'y a pas d'intuition sur la manière dont une plus grande considération de l'infini pourrait nous rapprocher de la résolution de questions à propos des nombres premiers. Selon un second aspect, jusqu'où pouvons-nous aller en étendant les axiomes de la théorie des ensembles ? Comme dit précédemment, on s'éloigne très vite de l'intuition, et nous n'avons pas la moindre idée du début d'une façon de relier les axiomes aux nombres premiers.

Par conséquent, ma conclusion est la suivante. Je crois que la vaste majorité des assertions à propos des entiers est totalement et de façon permanente au delà de la preuve dans tout système raisonnable. Ici, j'utilise la preuve au sens où les mathématiciens utilisent ce mot. L'évidence statistique peut-elle être regardée comme une preuve ? J'aimerais avoir l'esprit ouvert, et dire “Pourquoi pas ?”. Si les dix premiers billions de zéros de la fonction zeta sont sur la ligne de partie réelle 1/2, quelle conclusion en tirer ? Je me sens incompétent même pour spéculer à propos de la manière dont les générations futures regarderont une évidence numérique de cette sorte.

Dans cette esprit pessimiste, je pourrai conclure en demandant si nous ne sommes pas en train d'être témoins de la fin de l'ère de la preuve pure, si glorieusement initiée par les Grecs. J'espère que les mathématiques vivront longtemps, et que nous n'atteindrons pas cette fin de mort pour de nombreuses générations à venir.

Bibliographie

[1] Cohen, P. J., *Set theory and the continuum hypothesis*, ed. New York : Addison-Wesley, 1966.

[2] Gentzen, G., *Collected papers of Gerhard Gentzen*, ed. M. E. Szabo., Amsterdam : North-Holland, 1969.

[3] Gödel, K., *Kurt Gödel : collected works*, ed. 8. Feferman et al, vol. 1. Oxford : Oxford University Press, 1986.

[4] Skolem, Th., *Selected works in logic by Th. Skolem*, ed. J.B. Fenstak, Oslo : Scandinavian University Books, 1970.

[5] van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel*, Cambridge, MA : Harvard University Press, Phil. Trans. R. Soe. A (25), 1971.

Department of Mathematics, Stanford University, Bldg. 380,
450 Serra Mall, Stanford, CA 94305-2125, USA