Mémoires et communications

présentés ou transmis par les membres et correspondants.

Théorie des graphes. *Transitivité et connexité.*

Note[1] de **M. Bernard Roy**, présentée par M. Georges Darmois.

Les résultats qui suivent concernent essentiellement un procédé simple et mécanisable permettant d'obtenir la fermeture transitive d'une application et par suite la décomposition en composantes fortement connexes d'un graphe.

Considérons l'ensemble Ω des matrices carrées d'ordre n, formées de 0 et de 1, et ne possédant que des 1 sur la diagonale principale. Soit $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un ensemble fini. À toute application multivoque Γ définie sur cet ensemble peut être associée une matrice $M \in \Omega$ par

$$M = \{a_i^j\} \ : a_i^i = 1 \quad \text{et pour } i \neq j \ : a_i^j = 1 \ \text{ si } x_j \in \Gamma x_i \quad \text{et} \quad a_i^j = 0 \ \text{ si } x_j \notin \Gamma x$$

(l'indice inférieur se rapporte aux lignes, l'indice supérieur aux colonnes). Réciproquement, à toute matrice $M \in \Omega$ peut être associée une application Γ définie sur un ensemble tel que X et vérifiant $x_i \in \Gamma x_i$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Définissons maintenant l'application $\widehat{\Gamma}$ fermeture transitive d'une application Γ définie sur X, par $\widehat{\Gamma} x = \{x\} \cup \Gamma \cup \Gamma^2 x \cup \Gamma^3 x \cup \cdots$. La matrice $\widehat{M} \in \Omega$ qui lui est associée sera appelée fermeture transitive de la matrice M associée à Γ.

Définissons enfin sur l'ensemble Ω une famille de transformations $T_i \quad (i = 1, \cdots, n)$ en posant $M = \{a_h^k\}$, $T_i \cdot M = \{b_h^k\}$ avec :

$$\text{pour tout } h \text{ tel que } a_h^i = 0 \ : \quad b_h^k = a_h^k\,;$$

$$\text{pour tout } h \text{ tel que } a_h^i = 1 \ : \quad b_h^k = \max[a_h^k, a_i^k].$$

On voit que la transformation T_i consiste tout simplement à reproduire les 1 existant en ligne i sur toute ligne possédant un 1 en colonne i.

Lemme 1. *Chaque transformation T_i est idempotente et deux transformations T_i, T_j sont commutatives.*

L'idempotence est évidente, la commutativité peut s'établir comme suit, posons :

$$T_i \cdot \{a_h^k\} = \{b_h^k\}, \quad T_j \cdot \{b_h^k\} = \{c_h^k\}, \quad T_j \cdot \{a_h^k\} = \{{b'}_h^k\}, \quad T_i \cdot \{{b'}_h^k\} = \{{c'}_h^k\}.$$

Il suffit pour justifier la commutativité d'établir que $c_h^k = 1 \ (h \neq k) \implies {c'}_h^k = 1$. Supposons que $c_h^k = 1$ et distinguons deux cas :

1. Séance du 6 juillet 1959.

1. $b_h^k = 1$, ou bien $a_h^k = 1$ et alors $c'^{\,k}_h = 1$; ou bien

$$a_h^i = a_i^k = 1 \quad \text{et} \quad b'^{\,i}_h = b'^{\,k}_i = 1 \qquad \text{donc} \quad c'^{\,k}_h = 1.$$

2. $b_h^k = 0$, on a nécessairement $b_h^j = b_j^k = 1$, quatre cas sont alors possibles :
   - $a_h^j = 1$ et $a_j^k = 1$:

$$b'^{\,k}_h = 1 \qquad \text{et} \qquad c'^{\,k}_h = 1\,;$$

   - $a_h^j = 0$ et $a_j^k = 1$:

$$a_h^i = a_i^j = 1, \qquad \text{d'où} \quad b'^{\,k}_i = 1, \quad b'^{\,i}_h = 1 \quad \text{et} \quad c'^{\,k}_h = 1\,;$$

   - $a_h^j = 1$ et $a_j^k = 0$:

$$a_j^i = a_i^k = 1 \qquad \text{d'où} \quad b'^{\,i}_h = 1, \quad b'^{\,k}_i = 1 \quad \text{et} \quad c'^{\,k}_h = 1\,;$$

   - $a_h^j = 0$ et $a_j^k = 0$:

$$a_h^i = a_i^j = a_j^i = a_i^k = 1, \qquad \text{d'où} \qquad b'^{\,i}_h = b'^{\,k}_i = 1 \quad \text{et} \quad c'^{\,k}_h = 1.$$

Lemme 2. *Quels que soient $M \in \Omega$ et $i \in \{1, ..., n\}$, les matrices M et $T_i.M$ ont même fermeture transitive.*

Δ désignant l'application associée à la matrice $T_i.M$, on montrera aisément que

$$x_j \in \Delta x_i \Rightarrow x_j \in \{x_i\} \cup \Gamma x_i \cup \Gamma^2 x_i; \quad \text{et donc} \quad \widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}.$$

Lemme 3.[2] *Une matrice $M \in \Omega$ est égale à sa fermeture transitive si et seulement si elle est invariante dans toute transformation T_i $(i = 1, \cdots, n)$.*

Le lemme 2 suffit à prouver le caractère nécessaire de la condition. Cette condition est suffisante car $M \neq \widehat{M}$ signifie qu'il existe suite $x_1, x_2, \ldots, x_p$ vérifiant $x_{i+1} = \Gamma x_i$ $(i = 1, ..., p)$ et $x_p \notin \Gamma x_1$, or, si i_0 désigne la première valeur de i dans la suite $1, 2, \cdots, p$, telle que $x_{i_0} \notin \Gamma x_1$, il est clair que la transformation $T_{i_0 - 1}$ conduira à remplacer par un 1 le zéro se trouvant ligne 1, colonne i_0, dans la matrice M.

Théorème. *La matrice $T_n.T_{n-1} \cdot \cdots \cdot T_1.M$ est la fermeture transitive de la matrice M pour tout $M \in \Omega$.*

Posons $M_n = T_n, T_{n-1}, \cdot \cdots \cdot T_1.M$. D'après le lemme 1 : $T_i.M_n = M_n$ $(i = 1, ..., n)$; donc d'après le lemme 3 : $M_n = \widehat{M_n}$, or $\widehat{M_n} = \widehat{M}$ (lemme 2) donc $M_n = \widehat{M}$.

2. Ce lemme donne lieu à un test de transitivité fort simple.

De ce théorème découle un procédé simple et mécanisable permettant de construire la fermeture transitive d'une matrice quelconque $M \in \Omega$. Ce résultat semble susceptible d'applications nombreuses en théorie des graphes. Nous voudrions en signaler quelques-unes.
Soit $G = [X, \Gamma]$ un graphe quelconque avec $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Désignons par $\widehat{M} = \{b_h^k\}$ la fermeture transitive de la matrice $M = \{a_h^k\}$ associée à l'application Ω. Il est bien clair que :

Proposition 1. *Il existe dans G un chemin allant de x_h à x_k si, et seulement si, $b_h^k = 1$.*

Ainsi, l'existence d'un chemin entre deux sommets quelconques peut-elle être testée de façon simple par application successive des transformations $T_1, \cdots T_n$, le calcul pouvant être interrompu aussitôt qu'un 1 apparaît dans la case correspondante.

Proposition 2. *Le graphe G est fortement connexe si et seulement si la matrice $\widehat{M}$ ne contient que des 1.*

Proposition 3. *Le graphe G admet un centre si et seulement si la matrice $\widehat{M}$ admet au moins une ligne ne contenant que des 1.*

Soit $\widehat{M'} = {b'}_h^k$ la matrice déduite de $\widehat{M}$ en posant : ${b'}_h^k = b_h^k + b_h^k . b_k^h$. Les résultats suivants sont évidents :

Proposition 4. *Il existe dans G un circuit passant par les sommets x_h et x_k si et seulement si ${b'}_h^k = 2$.*

Proposition 5. *Le graphe G est sans circuit si et seulement si $h \neq k$ implique ${b'}_h^k \neq 2$.*

Proposition 6. *La composante fortement connexe du sommet x_h est constituée par l'ensemble des sommets x_k tels que : ${b'}_h^k = 2$.*

Ainsi la décomposition d'un graphe en composantes fortement connexes apparaît-elle immédiate dès qu'on connaît la matrice $\widehat{M'}$ liée à ce graphe. Or, cette matrice est de construction facile. Sa connaissance permet également d'obtenir sans difficulté une base du graphe. Il suffit pour cela de recenser les colonnes ne possédant aucun 1 et de choisir dans chacune d'elles l'un de ses 2. Les sommets correspondant aux lignes ainsi choisies constituent une base.