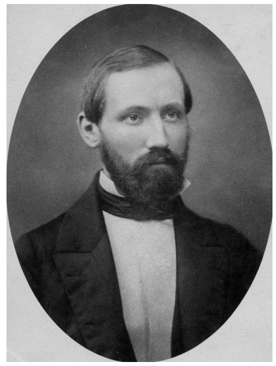

Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe

Bernhard Riemann

Dissertation inaugurale : Göttingue, 1851. — Mémoire I$^{\text{er}}$ des Œuvres mathématiques de Riemann, éditées par MM. H. Weber et R. Dedekind.

§ I.

Si l'on désigne par z une grandeur variable qui peut prendre successivement toutes les valeurs réelles possibles, alors, lorsqu'à chacune de ses valeurs correspond une valeur unique de la grandeur indéterminée w, l'on dit que w est une fonction de z, et, tandis que z parcourt d'une manière continue toutes les valeurs comprises entre deux valeurs fixes, lorsque w varie également d'une manière continue, l'on dit que cette fonction w est continue dans cet intervalle [1] [a]

Cette définition ne stipule aucune loi entre les valeurs isolées de la fonction, c'est évident, car lorsqu'il a été disposé de cette fonction pour un intervalle déterminé, le mode de son prolongement en dehors de cet intervalle reste tout à fait arbitraire.

La manière dont la grandeur w dépend de z peut être donnée par une loi mathématique, en sorte que, par des opérations de calcul déterminées, l'on pourra, de chaque valeur de z, déduire la valeur correspondante de w.

La possibilité d'être déterminées pour toutes les valeurs de z, comprises dans un intervalle donné, par la même loi de dépendance, était autrefois attribuée seulement aux fonctions d'une certaine classe (*functiones continuæ* dans la terminologie d'Euler) ; mais des recherches modernes ont fait voir qu'il existe des expressions analytiques par lesquelles toute fonction continue peut être représentée dans un intervalle donné.

Transcription en Latex, Denise Vella-Chemla, novembre 2022.

[a] Cette indication renvoie aux notes des éditeurs placées à la suite des Mémoires.

Il est donc indifférent de définir la dépendance de la grandeur w de la grandeur z comme donnée arbitrairement ou bien comme reposant sur des opérations de calcul déterminées. Les deux définitions sont équivalentes par suite des théorèmes auxquels nous venons de faire allusion.

Mais il en est autrement lorsque la variabilité de la grandeur z n'est pas limitée aux valeurs réclles, et que l'on admet aussi des valeurs complexes de la forme $x + yi$ (où $i = \sqrt{-1}$).

Soient

$$x + yi \qquad \text{et} \qquad x + yi + dx + dyi$$

deux valeurs de la grandeur z qui diffèrent infiniment peu entre elles et auxquelles correspondent les valeurs

$$u + i \qquad \text{et} \qquad u + vi + du + dvi$$

de la grandeur w.

Or, lorsque la dépendance de la grandeur w de z est prise arbitrairement, le rapport $\dfrac{du + dvi}{dx + dyi}$ variera, d'une manière générale, avec les valeurs de dx et dy, car, si l'on pose

$$dx + dyi = \varepsilon e^{\varphi i},$$

l'on a

$$\begin{aligned}\frac{du + dvi}{dx + dyi} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] \frac{dx - dyi}{dx + dyi} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) i \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) i\right] e^{-2\varphi i}.\end{aligned}$$

Mais, de quelque manière que w puisse être déterminée comme fonction de z par une combinaison des opérations élémentaires du calcul, la valeur de la dérivée $\dfrac{dw}{dz}$ sera toujours indépendante de la valeur particulière de la différentielle dz [b].

Il est donc évident que par cette voie on ne peut pas exprimer une dépendance quelconque de la grandeur complexe w de la grandeur complexe z.

Ce caractère, que nous venons d'indiquer, commun à toutes les fonctions qui peuvent être déterminées d'une manière quelconque par les opérations du calcul, nous le prendrons comme base dans la

[b] Cette affirmation est évidemment justifiée dans tous les cas où l'on peut tirer de l'expression de w en z, à l'aide des règles de la différentiation, une expression de $\dfrac{dw}{dz}$ en z ; quant à sa légitimité rigoureuse et générale, nous ne nous en occupons pas pour l'instant. (Riemann.)

recherche suivante, où l'on considèrera une telle fonction indépendamment de son expression. Maintenant alors, sans en démontrer la légitimité générale et suffisante pour la définition d'une dépendance exprimable par les opérations du calcul, nous prendrons pour point de départ la définition suivante :

Une grandeur variable complexe w est dite une fonction d'une autre grandeur variable complexe z lorsqu'elle varie avec elle de telle sorte que la valeur de la dérivée $\dfrac{dw}{dz}$ est indépendante de la valeur de la différentielle dz.

§ II.

La grandeur z et de même la grandeur w, seront considérées comme des grandeurs variables qui peuvent prendre toute valeur complexe.

La conception d'une telle variabilité, qui est relative à un domaine connexe à deux dimensions, est essentiellement facilitée si l'on s'appuie sur l'intuition géométrique.

Imaginons chaque valeur $x+yi$ de la grandeur z représentée par un point O du plan A, dont les coordonnées rectangulaires sont x et y, et chaque valeur $u+iv$ de la grandeur w par un point Q du plan B, dont les coordonnées rectangulaires sont u et v. Toute relation de dépendance de la grandeur w de z sera représentée alors comme une relation de dépendance de la position du point Q de celle du point O. Lorsqu'à toute valeur de z correspond une valeur déterminée de w, variant d'une manière continue avec z, en d'autres termes u et v sont-ils des fonctions continues de x et y, alors à tout point du plan A correspond un point du plan B, à toute ligne, d'une manière générale, une ligne, à toute portion connexe de surface, une portion de surface également connexe. Par conséquent, l'on pourra se figurer cette dépendance de la grandeur w de z comme une représentation du plan A sur le plan B.

§ III.

Il s'agit maintenant de rechercher de quelle propriété jouit cette représentation lorsque w est une fonction de la grandeur complexe z, c'est-à-dire lorsque $\dfrac{dw}{dz}$ est indépendant de dz.

Nous désignerons par o un point indéterminé du plan A dans le voisinage de O, et son image sur le plan B par q, et ensuite par $x+yi+dx+dyi$, et par $u+vi+du+dvi$ les valeurs des grandeurs z et w en ces points. Alors dx, dy et du, dv peuvent être regardées comme les coordonnées rectangulaires des points o et q relativement aux points O et Q pris comme origines ; et, si l'on pose $dx+dyi = \varepsilon e^{\varphi i}$ et $du+dvi = \eta e^{\psi i}$, les grandeurs $\varepsilon, \varphi, \eta, \psi$ seront les coordonnées polaires de ces points relativement à ces mêmes origines. Soient maintenant o' et o'' deux positions quelconques déterminées du point o, infiniment voisines de O, et attribuons aux désignations respectives qui leur correspondent les mêmes lettres que précédemment, mais accentuées ; l'on a, par hypothèse,

$$\frac{du' + dv'i}{dx' + dy'i} = \frac{du'' + dv''i}{dx'' + dy''i}$$

et, par suite,

$$\frac{du' + dv'i}{du'' + dv''i} = \frac{\eta'}{\eta''} e^{(\psi' - \psi'')i} = \frac{dx'' + dy'i}{dx'' + dy''i} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} e^{(\varphi' - \varphi'')i},$$

d'où

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \qquad \text{et} \qquad \psi' - \psi'' = \varphi' - \varphi'',$$

c'est-à-dire que dans les triangles $o'Oo'', q'Qq''$ les angles $o'Oo'', q'Qq''$ sont égaux et compris entre des côtés respectivement proportionnels.

Par conséquent, entre deux triangles infinitésimaux qui se correspondent, il y a similitude et il en est par suite de même en général entre les plus petites parties du plan A et leur représentation sur le plan B.

Cette proposition souffre une exception seulement dans les cas particuliers où les accroissements correspondants des grandeurs z et w ne seraient pas entre eux dans un rapport fini, hypothèse qui, dans notre déduction de ce rapport, est tacitement exclue [c].

§ IV.

Si l'on met $\dfrac{du + dvi}{dx + dyi}$ sous la forme

$$\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} i\right) dx + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} i\right) dyi}{dx + dyi},$$

il est évident que cette expression pour deux couples de valeurs quelconques de dx et dy aura la même valeur au seul cas où

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Ces conditions sont, par conséquent, nécessaires et suffisantes pour que $w = u + vi$ soit une fonction de $z = x + yi$.

Pour les termes séparés de cette fonction, de ces conditions l'on déduit les suivantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

qui forment la base pour l'étude des propriétés qui se rapportent à l'un des deux termes d'une telle fonction considéré séparément. Nous ferons suivre la démonstration des plus importantes de ces propriétés par une étude plus approfondie de la fonction complète ; mais, auparavant, pour aplanir le terrain de ces recherches, nous examinerons et nous établirons quelques points appartenant à des domaines plus généraux.

[c] Sur ce sujet consulter : *Résolution générale du problème : Représenter les parties d'une surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original en les plus petites parties*, par C.-F. Gauss (Mémoire couronné en réponse à la question proposée par la Société Royale des Sciences de Copenhague en 1822). (*Astronomische Abhandlungen* de Schumacher, 3 cah. ; Altona, 1825). (Riemann.) (*Œuvres de Gauss*, t. IV, p. 189).

§ V.

Dans les considérations suivantes, nous limiterons la variabilité des grandeurs x, y à un domaine fini, et, comme lieu du point O, nous n'envisagerons plus le plan A lui-même, mais une surface T recouvrant ce plan.

Nous choisissons ce mode de représentation où il n'y a rien de choquant à parler de surfaces superposées, afin de pouvoir admettre que le lieu du point O puisse recouvrir plusieurs fois la même partie du plan ; mais, en un tel cas, nous supposerons que les portions de surface superposées ne se confondent pas tout le long d'une ligne, en sorte qu'il n'arrive pas que la surface soit pliée, ni qu'elle soit morcelée en des parties superposées.

Le nombre des parties de surface superposées en chaque région du plan est alors complètement déterminé lorsque l'on y donne le contour en forme et en direction (c'est-à-dire d'après l'extérieur et l'intérieur dudit contour) ; néanmoins le cours de ces parties peut encore être figuré de différentes manières.

En effet, si nous menons sur le plan une ligne quelconque l qui sectionne la région du plan recouverte par la surface, le nombre des parties de surfaces superposées varie seulement à la traversée du contour, et cela de telle sorte que, cette traversée ayant lieu de l'extérieur à l'intérieur, ce nombre varie de $+1$, et, dans le cas contraire, de -1 ; par conséquent ce nombre est partout déterminé. Le long des bords de cette ligne chaque partie de surface limitrophe suit son cours d'une manière parfaitement déterminée, tant que la ligne ne rencontre pas le contour, car une indétermination ne peut avoir lieu qu'en un point isolé, c'est à-dire, par conséquent, soit en un point de la ligne même, soit à une distance finie de cette ligne.

Nous pouvons donc, en limitant nos considérations à une partie de la ligne l suivant son cours à l'intérieur de la surface et à des bandes de surfaces suffisamment petites situées des deux côtés de cette ligne, parler de portions de surface limitrophes *déterminées*, dont le nombre est le même de chaque côté de la ligne l et que nous désignerons, après avoir attribué une certaine direction à cette ligne, à gauche par $a_1, a_2, ..., a_n$, et à droite par $a'_1, a'_2, ..., a'_n$. Chaque portion de surface a se raccordera avec une des portions de surface a' ; en général, celle-ci sera la même portion de surface tout le long de la ligne l, néanmoins cette partie pourrait en certains points particuliers de la ligne l ne plus être la même. Supposons en effet que, au-dessus d'un tel point σ (c'est-à-dire un point situé sur le cours antérieur de l), les portions de surface $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se raccordent successivement dans l'ordre écrit avec les portions de surface $a'_1, a'_2, ..., a'_n$, mais que, au-dessous de σ ce soient les portions de surface $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n}$ qui se raccordent avec $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, les indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant différents de 1, 2,..., n seulement par leur ordre ; ceci posé, un point qui au-dessus de σ passe de a_1 en a'_1, lorsqu'au-dessous de σ il revient sur le côté gauche, passera sur la portion de surface a_{α_1} et lorsqu'il décrit un circuit autour du point σ de gauche à droite [2] l'indice de la portion de surface sur laquelle il se trouve prendra successivement les valeurs

$$1, \alpha_1, \alpha_{\alpha_1}, \ldots, \mu, \alpha_\mu, \ldots.$$

Dans cette suite, tant que le terme 1 ne se représente pas, tous les termes sont nécessairement différents, car un terme intermédiaire quelconque α_μ est nécessairement précédé par μ et, dans l'ordre de succession, par tous les termes antécédents jusqu'à 1 ; mais lorsqu'après un certain nombre de termes, m par exemple, nombre évidemment inférieur à n, le terme 1 reparaît, les autres termes alors doivent revenir dans le même ordre. Le point mobile autour de σ revient alors après m circuits sur la même portion de surface, et sa marche est limitée à m des parties de surfaces superposées qui se réunissent en un point unique sur σ. Ce point, nous le nommerons un point de ramification d'ordre $(m-1)$ de la surface T. En appliquant ce procédé aux $n-m$ parties de surfaces restantes, celles-ci, lorsque leurs cours respectifs sont non isolés, se distribuent en systèmes de $m_1, m_2, \ldots$ parties de surfaces, auquel cas au point σ sont encore situés des points de ramification d'ordres respectifs $(m_1-1), (m_2-1), \ldots$.

Lorsque la forme et la direction du contour de T, ainsi que la position de ses points de ramification sont données, T est ou bien parfaitement déterminée, ou bien limitée à un nombre fini de figurations distinctes ; ce dernier point résulte de ce que ces données peuvent être relatives à des portions différentes de surfaces superposées.

Une grandeur variable, qui, d'une manière générale, c'est-à dire sans exclure l'exception faite en des lignes ou points isolés[d], prend en tout point O de la surface T une valeur déterminée variant d'une manière continue avec la position de ce point, peut être évidemment regardée comme une fonction de x, y, et, partout où dorénavant il sera question de fonctions de x, y, nous adopterons cette définition.

Avant de passer à l'étude de pareilles fonctions, nous allons introduire incidemment quelques éclaircissements relatifs à la connexion d'une surface. Nous bornerons notre examen à des surfaces qui ne sont pas morcelées le long d'une ligne.

§ VI.

Nous regarderons deux portions de surface comme connexes ou formées d'une seule pièce, lorsque l'on peut y mener une ligne ayant son cours à l'intérieur de la surface et joignant un point de l'une des portions à un point de l'autre ; nous les regarderons comme morcelées lorsque ce fait n'est pas possible.

L'étude de la connexion d'une surface repose sur sa décomposition par l'effet de sections transverses, c'est-à-dire de coupures qui, partant d'un point du contour, sectionnent la surface d'une manière simple (aucun point n'étant traversé plusieurs fois) en rejoignant un point dudit contour. Ce dernier point peut aussi être situé sur les parties du nouveau contour prenant ainsi naissance, c'est-à-dire en un point du cours antérieur de la section transverse elle-même.

Lorsque, par l'effet de toute section transverse, une surface connexe est morcelée, elle est dite simplement connexe ; au cas contraire elle est dite multiplement connexe.

[d]Cette restriction ne se présente pas par l'effet même de la définition d'une fonction, mais elle est nécessaire pour que le Calcul infinitésimal puisse y être appliqué. Une fonction qui est discontinue en tous les points d'une surface, comme par exemple une fonction qui, pour x et y commensurables, aurait pour valeur 1, et partout ailleurs la valeur 2, ne peut être soumise ni à une différentiation, ni à une intégration ; on ne peut donc d'aucune manière directe appliquer à une telle fonction le Calcul infinitésimal. La limitation faite arbitrairement au sujet de la surface T se justifiera d'elle-même plus tard (§ XV). —(Riemann).

Théorème I. *Une surface simplement connexe A est décomposée par chaque section transverse ab en deux morceaux simplement connexes.*

Admettons que l'un de ces morceaux ne fût pas morcelé par une section transverse cd, dans les trois cas possibles où aucune des extrémités c, d n'est située sur ab, où l'une c l'est, où toutes deux c, d le sont, l'on obtiendrait alors évidemment, en rétablissant la jonction respectivement le long soit de toute la ligne ab, soit de la partie cb, soit de la partie cd de cette ligne, une surface simplement connexe qui ferait partie de A, et cette surface serait engendrée par l'effet d'une section transverse, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème II. *Lorsqu'une surface T est décomposée par n_1 sections transverses*[e] q_1 *en un système* T_1 *de* m_1 *morceaux de surface simplement connexes, et par* n_2 *sections transverses* q_2 *en un système* T_2 *de* m_2 *morceaux de surface, alors l'on ne peut avoir*

$$n_2 - m_2 > n_1 - m_1$$

Toute ligne q_2, lorsqu'elle n'est pas tout entière comprise dans le système de sections transverses q_1, forme en même temps une ou plusieurs sections transverses q_2' de la surface T_1. Comme points extrêmes des sections transverses q_2', l'on devra regarder :

1° Les $2n_2$ points extrêmes des sections transverses q_2, exception faite des cas où leurs extrémités ont des parties communes avec une partie du système de lignes q_1 ;

2° Chaque point intermédiaire d'une section transverse q_2, où cette dernière rencontre un point intermédiaire d'une ligne q_1, exception faite de ces cas où la section transverse q_2 se trouve déjà située sur une autre ligne q_1, c'est-à-dire lorsqu'une partie extrémité d'une section transverse q_1 tombe sur q_2.

Désignons maintenant par μ le nombre de fois que les lignes des deux systèmes se rencontrent et se séparent (où par conséquent chaque point commun unique doit être compté deux fois), par ν_1 le nombre de fois qu'une partie extrême des q_1 coïncide avec une portion intermédiaire des q_2, par ν_2 le nombre de fois qu'une partie extrême des q_2 coïncide avec une partie intermédiaire des q_1, et enfin par ν_3 le nombre de fois qu'une partie extrême des q_1 coïncide avec une partie extrême des q_2. Cela posé, la considération de l'alinéa 1° donne $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$, celle de l'alinéa 2°, $\mu - \nu_1$ extrémités de sections transverses q_2'. Les deux cas réunis comprennent tous les points extrêmes et chacun compté seulement une fois ; le nombre de ces sections transverses est donc

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{3} = n_2 + s.$$

Des conclusions tout à fait analogues fournissent, pour le nombre des sections transverses q_1' de la surface T_2 qui sont formées par les lignes q_1, l'expression

$$\frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2},$$

[e] Par une décomposition pratiquée à l'aide de plusieurs sections transverses l'on doit toujours entendre une décomposition *successive*, c'est-à-dire que la surface engendrée par l'effet d'une section transverse est encore à décomposer ultérieurement par une nouvelle section transverse. (Riemann.)

c'est-à-dire

$$n_1 + s.$$

Or la surface T_1, sera évidemment transformée par les n_2+s sections transverses q'_2, en la même surface en laquelle sera décomposée T_2 par l'effet des n_1+s sections transverses q'_1. Mais T_1 est formée de m_1 morceaux simplement connexes et, par conséquent, en vertu du théorème I, est décomposée par $n_2 + s$ sections transverses en $m_1 + n_2 + s$ morceaux de surface ; il faudrait par suite, si m_2 était $< m_1 + n_2 - n_1$, que le nombre des morceaux de surface T_2 fût augmenté de plus de $n_1 + s$ par l'effet de $n_1 + s$ sections transverses, ce qui est absurde.

Par suite de ce théorème, si le nombre indéterminé de sections transverses est désigné par n, et celui des morceaux par m, le nombre $n - m$ sera constant pour toutes les décompositions d'une surface en morceaux simplement connexes. En effet, considérons deux décompositions déterminées quelconques, l'une par l'effet de n_1 sections transverses en m_1 morceaux, l'autre par l'effet de n_2 sections transverses en m_2 morceaux ; il faut alors, lorsque les premiers morceaux sont simplement connexes, que l'on ait

$$n_2 - m_2 \leq n_1 - m_1$$

et, lorsque les seconds morceaux sont simplement connexes,

$$n_1 - m_1 \leq n_2 - m_2;$$

par conséquent, lorsque ces deux circonstances ont lieu, l'on doit avoir

$$n_2 - m_2 = n_1 - m_1.$$

Ce nombre pourra, à bon droit, être désigné sous le nom d'*ordre de la connexion* d'une surface ;

Il sera diminué de 1 par l'effet de chaque section transverse, et cela par définition même ;

Il restera invariable par l'effet de toute coupure sectionnant l'intérieur d'une manière simple et partant d'un point intérieur et aboutissant soit en un point du contour, soit en un point antérieur situé sur le cours même de la section, et :

Il sera augmenté de 1 par l'effet d'une coupure partout simple située à l'intérieur de la surface et ayant deux extrémités.

En effet, dans le cas de la première coupure, celle-ci peut être transformée en section transverse par l'effet d'une section transverse, tandis que dans le dernier cas il en faut deux.

Enfin, l'on obtiendra l'ordre de la connexion d'une surface formée de plusieurs morceaux en additionnant les ordres de connexion respectifs de ces morceaux.

Dans la suite, nous nous en tiendrons surtout aux surfaces formées d'un seul morceau, et pour leur connexion nous nous servirons de la désignation, qui n'a rien d'artificiel, de connexion simple, double, triple, etc., et nous entendrons ainsi par surface n-uplement connexe une surface qui est décomposable en une surface simplement connexe par l'effet de $n - 1$ sections transverses.

Relativement à la manière dont dépend la connexion du contour de la connexion de la surface, l'on voit clairement que :

1°. Le contour d'une surface simplement connexe est nécessairement formé par une ligne fermée.

En effet, si le contour était formé de parties séparées, une section transverse q, qui réunirait un point d'une partie a à un point d'une partie b, séparerait seulement des portions de surface connexes, car alors l'on pourrait mener une ligne à l'intérieur de la surface et le long de a, partant d'un bord de la section transverse q pour aboutir sur le bord opposé ; et, par conséquent, q ne morcellerait pas la surface, ce qui est contraire à l'hypothèse ;

2°. Chaque section transverse diminue ou bien augmente de 1 le nombre des lignes du contour.

Ou bien une section transverse q relie un point d'une ligne de contour a avec un point d'une autre ligne de contour b (et dans ce cas toutes ces lignes, prises dans l'ordre a, q, b, q, forment une ligne unique de contour fermé) ;

Ou bien elle relie deux points d'une même ligne de contour ; dans ce cas celle-ci est décomposée par les deux extrémités de la section transverse en deux parties, dont chacune par sa réunion avec la dite section forme une ligne de contour fermée ;

Ou bien enfin elle prend fin en l'un des points antérieurs de son propre cours et peut alors, par conséquent, être regardée comme formée d'une ligne fermée o et d'une autre ligne l, qui relie un point de o avec un point d'une ligne de contour a, et, dans ce cas, o forme d'une part et a, l, o, l d'autre part une ligne de contour fermée. Par conséquent, dans le premier cas, au lieu de deux lignes de contour l'on en obtient une, et, dans les deux derniers cas, au lieu d'une l'on en obtient deux, d'où l'on conclut cette proposition :

Le nombre de lignes fermées dont est formé le contour d'un morceau de surface n-uplement connexe est donc ou bien $= n$, ou bien égal à n diminué d'un nombre pair.

D'où nous tirons encore ce corollaire :

Lorsque le nombre des portions de contour d'une surface n-uplement connexe est $= n$, cette surface est morcelée en deux morceaux séparés par toute coupure partout simple et fermée à l'intérieur de la surface.

En effet, l'ordre de la connexion n'est pas altéré par cette opération et le nombre des lignes de contour est augmenté de 2 ; par conséquent, si la surface restait connexe, elle aurait une connexion d'ordre n et aurait en même temps $(n + 2)$ lignes de contour, ce qui est impossible.

§ VII.

Soient X et Y deux fonctions de x, y continues en tous les points de la surface T qui recouvre A ; considérons l'intégrale $\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dT$ relative à tous les éléments dT de cette surface. Si l'on désigne en chaque point du contour l'inclinaison de la normale intérieure[f] sur l'axe des x par ξ, sur l'axe des y par η, l'on aura

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int (X\cos\xi + Y\cos\eta)ds,$$

l'intégrale du second membre étant prise relativement à tous les éléments ds du contour.

Pour transformer l'intégrale $\int \frac{\partial X}{\partial x} dT$, décomposons la partie du plan A que recouvre la surface T par un système de lignes parallèles à l'axe des x en bandes élémentaires, et cela de telle sorte que chaque point de ramification de la surface T se trouve sur une de ces lignes. Ceci posé, chaque partie de T se rapportant à l'une des bandes est formée d'un ou de plusieurs morceaux distincts de forme trapézoïdale. La contribution qu'apporte à la valeur de $\int \frac{\partial X}{\partial x} dT$ une de ces bandes de surface découpant sur l'axe des y l'élément dy sera évidemment

$$dy \int \frac{\partial X}{\partial x} dx,$$

l'intégration ci-dessus étant prise relativement à celle ou celles des lignes droites appartenant à la surface T qui recouvrent une normale issue d'un point quelconque de cet élément dy.

Soient maintenant $O_{,}, O_{\prime\prime}, O_{\prime\prime\prime}, \ldots$ les extrémités inférieures (nous entendons par là celles qui correspondent aux plus petites valeurs de x) de ces lignes, et $O', O'', O''', \ldots$ les extrémités supérieures, et désignons par $X_{,}, X_{\prime\prime}, X_{\prime\prime\prime}, \ldots$ et $X', X'', X''', \ldots$ les valeurs respectives de X en ces points, et par $ds_{,}, ds_{\prime\prime}, ds_{\prime\prime\prime}, \ldots, ds', ds'', ds''', \ldots$ les éléments respectifs correspondants que découpe la bande élémentaire sur le contour, et enfin par $\xi_{,}, \xi_{\prime\prime}, \xi_{\prime\prime\prime}, \ldots, \xi', \xi'', \xi''', \ldots$ les valeurs de ξ en ces éléments ; l'on aura alors

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial X}{\partial x} dx &= -X_{\prime} - X_{\prime\prime} - X_{\prime\prime\prime} \ldots \\ &\quad +X' + X'' + X''' \ldots . \end{aligned}$$

Les angles ξ seront évidemment aigus aux extrémités inférieures, obtus aux extrémités supérieures, et l'on aura par suite

$$\begin{aligned} dy &= \cos\xi_{\prime} ds_{\prime} &&= \cos\xi_{\prime\prime} ds_{\prime\prime} &&= \ldots \\ &= -\cos\xi' ds' &&= -\cos\xi'' ds'' &&= \ldots \end{aligned}$$

La substitution de ces valeurs donnera

$$dy \int \frac{\partial X}{\partial x} dx = -\sum X\cos\xi ds,$$

la sommation s'étendant à tous les éléments du contour qui ont dy pour projection sur l'axe des y.

En intégrant relativement à l'ensemble tout entier des dy en question, il est évident que l'on épuisera tous les éléments de la surface T et tous ceux du contour, et l'on obtient donc, dans ces circonstances,

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dT = -\int X\cos\xi ds.$$

[f]Ce que Riemann entend par l'expression *normale intérieure* sera expliqué un peu plus loin. (L. L.).

Par un raisonnement tout pareil l'on conclut

$$\int \frac{\partial Y}{\partial y} dT = -\int Y \cos\eta ds$$

et, par conséquent,

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int (X\cos\xi + Y\cos\eta) ds.$$

C. Q. F. D.

§ VIII.

Désignons par s la longueur du contour, prise dans un sens que nous fixerons plus tard, à partir d'un point fixe initial jusqu'à un point quelconque O_0, et par ρ la distance d'un point indéterminé O au point O_0, sur la normale en ce point O_0, distance qui sera comptée positivement pour les points de la normale intérieure ; il est alors évident que les valeurs de x et de y au point O peuvent être regardées comme fonctions de s et de ρ ; aux points du contour on aura alors, pour les dérivées partielles relatives à ces variables, les équations suivantes :

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\eta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \pm\cos\eta, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \mp\cos\xi;$$

les signes supérieurs sont relatifs à ce cas où la direction, dans laquelle la grandeur s est regardée comme croissante, forme avec ρ un angle correspondant homologue à celui que fait l'axe x avec l'axe y, et les signes inférieurs sont relatifs au cas opposé. Nous prendrons cette direction en toutes les parties du contour de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \rho},$$

d'où

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial \rho},$$

ce qui ne nuit en aucun point essentiel à la généralité de nos résultats.

Nous pouvons encore évidemment étendre ce mode de détermination à des lignes situées à l'intérieur de T ; mais, dans ce cas, pour la détermination des signes de $d\rho$ et ds, leur dépendance mutuelle étant fixée comme ci-dessus, il faut donner encore une indication pour fixer le signe soit de $d\rho$, soit de ds ; pour une ligne fermée, nous indiquerons quelle est celle des deux parties de surface qu'elle sépare dont elle doit être regardée comme le contour, ce qui détermine le signe de $d\rho$, et pour une ligne non fermée nous indiquerons quelle est l'origine de la ligne, c'est-à-dire quelle est l'extrémité en laquelle s a la plus petite valeur.

L'introduction des valeurs obtenues pour $\cos\xi$ et $\cos\eta$ dans l'équation démontrée dans le paragraphe précédent nous donne, dans les mêmes circonstances,

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) ds = \int \left(X\frac{\partial y}{\partial s} - Y\frac{\partial x}{\partial s}\right) ds.$$

§ IX.

En appliquant la proposition qui conclut le paragraphe précédent au cas où l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

dans toutes les parties de la surface, l'on obtient les propositions suivantes :

I. — Lorsque X et Y sont deux fonctions finies, continues et satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

en tous les points de T, l'on a

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial \rho} + Y \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) ds = 0$$

l'intégrale s'étendant à tout le contour de la surface T.

Si l'on conçoit une surface quelconque T, recouvrant A, décomposée en deux morceaux T_2 et T_3 d'une manière quelconque, l'intégrale

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial \rho} + Y \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) ds$$

relative au contour de T_2, peut être regardée comme la différence des intégrales relatives aux contours de T_1 et T_3, vu que là où T_2 s'étend jusqu'au contour de T_1 les deux intégrales se détruisent, tandis que tous les autres éléments correspondent à des éléments du contour de T_2.

À l'aide de cette transformation, de la proposition I l'on conclut :

II. — La valeur de l'intégrale

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial \rho} + Y \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) ds$$

relative au contour total d'une surface recouvrant A, reste constante lorsque l'on agrandit ou que l'on diminue cette surface d'une manière quelconque, pourvu toutefois que cette opération n'ajoute ni ne retranche aucunes parties de surface où les hypothèses du théorème I cesseraient d'être satisfaites.

Lorsque les fonctions X, Y satisfont en chaque partie de la surface T à l'équation différentielle prescrite, mais sont affectées d'une discontinuité en des lignes ou points isolés, on peut adjoindre à chacune de ces lignes ou points une portion de surface entourante aussi petite que l'on voudra, et l'on obtient alors, en appliquant le théorème II :

III. — L'intégrale

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial \rho} + Y \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) ds$$

relative à tout le contour de T, est égale à la somme des intégrales

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho} \right) ds$$

relatives aux contours qui encadrent tous les lieux de discontinuité, et, relativement à chacun de ces lieux, l'intégrale conserve la même valeur, quelque étroites que soient les limites dans lesquelles on renferme ces discontinuités.

Dans le cas d'un point de discontinuité cette valeur est nécessairement égale à zéro lorsque, ρ désignant la distance du point O à cette discontinuité, ρX et ρY sont en même temps infiniment petits avec ρ. En effet, si l'on introduit relativement à un tel point pris comme origine et avec une direction quelconque de l'axe, les coordonnées polaires ρ et φ, et, si l'on choisit pour contour une circonférence décrite de ce point comme centre avec un rayon ρ, l'intégrale prise autour de ce point sera exprimée par

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \rho d\varphi$$

et ne peut, par conséquent, avoir une valeur x différente de zéro, puisque, quel que soit x, ρ peut être toujours pris suffisamment petit pour que, abstraction faite du signe, $\left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \rho$ soit, pour toute valeur de φ, plus petit que $\frac{\chi}{2\pi}$ et pour que, par suite, l'on ait

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \rho d\varphi < \chi.$$

IV. — Lorsque, sur une surface simplement connexe recouvrant A, l'intégrale

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho} \right) ds,$$

ou encore

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial x}{\partial s} \right) ds$$

prise autour du contour total d'une partie quelconque de la surface, est nulle, cette intégrale, prise le long d'une ligne menée de O_0 en O, deux points fixes quelconques sur cette surface, possède la même valeur pour chacune de ces lignes.

En effet, deux lignes s_1 et s_2, joignant les points O_0 et O, forment toujours par leur réunion une ligne fermée s_3 ; ou bien cette ligne jouit elle-même de cette propriété de ne traverser aucun point plusieurs fois, ou bien on peut la décomposer en plusieurs lignes fermées ayant cette propriété et cela comme il suit : on part d'un point quelconque pour décrire le contour et, chaque fois que l'on rencontre un point déjà traversé, l'on sépare la partie intermédiaire décrite pour considérer la partie qui suit comme le prolongement immédiat de celle qui précédait. Mais toute ligne pareille fermée partout simple décompose la surface en une partie simplement connexe et une partie doublement connexe. Elle forme donc nécessairement le contour total d'un de ces morceaux, et l'intégrale

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

relative à cette ligne, sera donc, d'après notre supposition, égale à zéro. Il en sera, par suite, de même de cette intégrale étendue à toute la ligne s_3, lorsque la grandeur s est regardée comme croissant partout dans la même direction.

Par conséquent, les intégrales prises le long des lignes s_1 et s_2, lorsque cette direction ne change pas, c'est-à-dire lorsqu'elle est comptée le long de l'une de ces lignes de O_0 à O et le long de l'autre de O à O_0, se détruisent et, par suite, lorsque le long de la seconde ligne la direction est changée, les intégrales sont égales.

Si l'on a maintenant une surface quelconque T sur laquelle, en général, on a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

on exclura d'abord, lorsqu'il est nécessaire, les points de discontinuité, de sorte que, pour la surface restante, l'on ait pour chaque partie

$$\int \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0$$

et, en pratiquant des sections transverses, l'on transformera cette surface restante en une surface simplement connexe T^*. Pour toute ligne joignant à l'intérieur de T^* un point O_0 à un autre point O, notre intégrale a alors même valeur. Cette valeur, que pour abréger l'on pourra désigner par

$$\int_{O_0}^{O} \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds,$$

O_0 étant fixe et O mobile, est donc bien déterminée pour chaque position de O, quel que soit le cours de la ligne joignant ces points et elle peut être, par conséquent, considérée comme fonction de x, y. La variation de cette fonction, lors d'un déplacement de O le long d'un élément quelconque de ligne ds, sera exprimée par

$$\left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds,$$

et elle sera partout continue sur T^* et le long d'une section transverse de T elle a même valeur sur chacun des deux bords.

V. — L'intégrale

$$Z = \int_{O_0}^{O} \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

représente donc, le point O_0 étant fixe, une fonction de x, y partout continue sur T^*, mais qui, à la traversée des sections transverses de T, varie d'une grandeur constante le long de celles-ci d'un point de branchement à un autre, et cette fonction a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Y, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = -X.$$

Les variations à la traversée des sections transverses dépendent de certaines grandeurs indépendantes entre elles, dont le nombre est égal à celui des sections transverses. En effet, lorsque l'on parcourt le système des sections transverses dans le sens rétrograde, c'est-à-dire que de deux points quelconques le plus avancé se présente le premier, cette variation est partout déterminée lorsque sa valeur est donnée au commencement de chaque section transverse ; mais lesdites valeurs aux commencements des coupures sont indépendantes entre elles [3].

§ X.

Si l'on remplace les fonctions désignées jusqu'ici par X et Y respectivement par

$$u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y},$$

l'on aura

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right) - u'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);$$

par conséquent, lorsque les fonctions u et u' satisfont aux équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} = 0,$$

l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

et l'on pourra appliquer à l'expression

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) ds$$

les propositions du paragraphe précédent ; cette expression est égale à

$$\int \left(u\frac{\partial u'}{\partial \rho} - u'\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) ds$$

Faisons maintenant, relativement à la fonction u, l'hypothèse que cette fonction, ainsi que ses premières dérivées, n'admette en aucun cas des discontinuités le long d'une ligne, et que, pour chaque point de discontinuité, ρ étant la distance du point O à cette discontinuité, $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$ deviennent infiniment petits avec ρ ; alors, par suite de la remarque jointe au théorème III du paragraphe précédent, l'on ne doit pas tenir compte des discontinuités de u.

En effet, l'on peut alors, sur chaque ligne droite issue d'un point de discontinuité, assigner une valeur R telle que, ρ étant plus petit que R,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = \rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}$$

reste toujours fini ; et, si l'on désigne par U la valeur de u pour $\rho = R$ et par M le maximum en valeur absolue de la fonction $\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}$ dans cet intervalle, on aura toujours, abstraction faite du signe,

$$u - U < M(\log\rho - \log R),$$

et, par conséquent, $\rho(u-U)$ et, par suite aussi, ρu seront infiniment petits en même temps que ρ. Mais il en est de même, par hypothèse, de $\rho\frac{\partial u}{\partial s}$ et de $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$ et, par suite encore, lorsque u' n'éprouve aucune discontinuité, il en est de même de

$$\rho\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad \text{et de} \qquad \rho\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Par conséquent, le cas envisagé dans le précédent paragraphe est bien celui qui se présente ici.

Supposons maintenant que la surface T, représentant le lieu du point O, recouvre partout le plan A d'une manière simple, et concevons sur cette surface un point fixe quelconque O_0 où u, x, y ont pour valeurs u_0, x_0, y_0.

La grandeur

$$\frac{1}{2}\log[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=\log r,$$

regardée comme fonction de x, y, jouit alors de cette propriété que

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}=0$$

et elle n'éprouve de discontinuité que pour $x=x_0, y=y_0$, c'est-à-dire par conséquent dans notre cas en un seul point de la surface T.

Par conséquent, d'après la proposition III, § IX, si l'on remplace u' par log r, l'intégrale

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2}=0$$

prise relativement à tout le contour de T, est égale à cette intégrale prise autour d'un contour quelconque renfermant le point O_0 ; par suite, si nous choisissons pour ce contour la circonférence d'un tel cercle où r a une valeur constante, et si nous désignons par φ l'arc qui se termine en O, et que l'on comptera en parties du rayon à partir d'un point quelconque de la circonférence dans une direction déterminée quelconque, l'intégrale susdite sera égale à

$$-\int_0^{2\pi} u\frac{\partial \log r}{\partial r} r d\varphi-\log r\int\frac{\partial u}{\partial \rho}ds,$$

et, puisque l'on a [4]

$$\int\frac{\partial u}{\partial \rho}ds=0$$

elle est donc égale à

$$-\int_0^{2\pi} u d\varphi,$$

valeur qui, lorsque la fonction u est continue au point O_0, se transforme pour r infiniment petit en

$$-u_0 2\pi$$

Ainsi, sous les hypothèses que l'on a faites, relativement à u et T, à l'intérieur de la surface pour un point quelconque O_0 où u est continue, nous avons

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial \rho} - u \frac{\partial \log r}{\partial \rho} \right) ds,$$

l'intégrale étant prise relativement à tout le contour, et nous avons

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi,$$

l'intégrale étant prise autour d'un cercle ayant le point O_0 comme centre. De la première de ces expressions nous concluons la proposition suivante :

Théorème. — *Lorsqu'une fonction u à l'intérieur d'une surface T, recouvrant partout simplement le plan A, satisfait, en général, à l'équation différentielle*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et cela de telle sorte que :

1° *Les points où cette équation différentielle n'est pas satisfaite ne forment aucune partie de surface continue ;*

2° *Les points où $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ deviennent discontinues ne forment aucune ligne continue ;*

3° *Pour chaque point de discontinuité les grandeurs $\rho \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\rho \dfrac{\partial u}{\partial y}$ deviennent infiniment petites en même temps que la distance ρ du point O à cette discontinuité ;*

4° *Et qu'enfin, pour u, soit exclu le cas d'une discontinuité qui serait détruite par une modification de sa valeur en des points isolés :*

Alors ladite fonction est nécessairement, ainsi que toutes ses dérivées, finie et continue pour tous les points à l'intérieur de cette surface.

En effet, considérons le point O_0 comme mobile ; les seules valeurs qui varient dans l'expression

$$\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial \rho} - u \frac{\partial \log r}{\partial \rho} \right) ds$$

sont

$$\log r, \frac{\partial \log r}{\partial x}, \frac{\partial \log r}{\partial y}.$$

Or ces grandeurs, en chaque élément du contour, tant que O_0 reste à l'intérieur de T, sont, ainsi que toutes leurs dérivées, des fonctions finies et continues de x_0, y_0, puisque ces dérivées sont exprimées par des fonctions rationnelles fractionnaires de ces grandeurs, fonctions qui ne contiennent au dénominateur que des puissances de r. Il en est donc aussi de même de la valeur de notre intégrale et, par suite, de la fonction u_0. En effet, cette dernière, en vertu des hypothèses considérées auparavant, ne pourrait avoir une valeur différente de celle de l'intégrale qu'en des points isolés où elle serait discontinue, possibilité exclue par l'hypothèse 4° de notre théorème.

§ XI.

Sous les mêmes hypothèses relatives à u et à T qu'à la fin du précédent paragraphe, nous avons les propositions suivantes :

I. — Lorsque le long d'une ligne on a $u = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$, l'on aura partout $u = 0$.

Nous démontrerons d'abord qu'une ligne λ où $u = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ ne peut former le contour d'une partie de surface a où u est positif.

En effet, si l'on admettait que ce fait pût avoir lieu, l'on séparerait alors de a un morceau qui aurait son contour d'une part sur λ et, d'autre part, sur un arc de cercle dont le centre O_0 serait en dehors dudit morceau, construction toujours possible à effectuer. L'on aurait alors, en désignant par r et φ les coordonnées polaires de O relatives à l'origine O_0, l'intégrale étant prise relativement au contour entier de ce morceau,

$$\int \log r \frac{\partial u}{\partial \rho} ds - \int u \frac{\partial \log r}{\partial \rho} ds = 0,$$

et, par conséquent, en vertu de l'hypothèse, l'on aurait, relativement à l'arc de cercle total qui appartient au contour,

$$\int u d\varphi + \log r \int \frac{\partial u}{\partial \rho} ds = 0$$

et alors, puisque

$$\int \frac{\partial u}{\partial \rho} ds = 0$$

l'on aurait

$$\int u d\varphi = 0$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite que u est positif à l'intérieur de a.

L'on démontrerait d'une manière pareille que les équations $u = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$ ne peuvent avoir lieu sur une partie de contour d'un morceau b de surface où u est négatif.

Maintenant, lorsqu'en une ligne de la surface T on a $u = 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial \rho} = 0$, si, en une partie quelconque de la surface, u était alors différent de zéro, il faudrait évidemment qu'une telle partie de surface fût limitée soit par cette ligne même, soit par une portion de surface où u serait égal à zéro ; par conséquent, elle serait toujours limitée par une ligne où u et $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ seraient nuls, ce qui conduit nécessairement à une des hypothèses que nous venons de rejeter.

II. Lorsque la valeur de u et de $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$ est donnée le long d'une ligne, u est par cela même déterminé en toutes les parties de T.

Soient u_1 et u_2 deux fonctions quelconques déterminées qui satisfont aux conditions prescrites à la fonction u ; leur différence $u_1 - u_2$ y satisfait aussi, comme on le reconnaît directement par substitution dans ces conditions. Maintenant, si u_1 et u_2, ainsi que leurs dérivées premières par rapport à ρ, sont identiques le long d'une ligne, mais non identiques en une autre partie de surface, l'on aurait, le long de cette ligne,

$$u_1 - u_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial \rho} = 0.$$

sans que l'on eût partout ces mêmes équations, ce qui serait contradictoire avec la proposition I.

III. — Les points à l'intérieur de T, où u a une valeur constante, forment nécessairement, quand u n'est pas partout constant, des lignes qui séparent telles parties de la surface où u est plus grand de telles parties de la surface où u est plus petit (que la constante en question).

Cette proposition consiste en la réunion des suivantes :

u ne peut avoir ni un maximum ni un minimum en un point à l'intérieur de T ;

u ne peut être constant *seulement* en une partie de la surface ;

Les lignes où $u = a$ ne peuvent sur les deux bords séparer des portions de surface où $u - a$ aurait le même signe :

Toutes propositions dont la contradiction, c'est facile à voir, conduirait à nier l'exactitude de l'équation

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u d\varphi$$

ou

$$\int_0^{2\pi} (u - u_0) d\varphi = 0,$$

démontrée dans le paragraphe précédent, contradictions par suite inadmissibles.

§ XII.

Nous allons maintenant revenir à la considération d'une grandeur variable complexe $w = u + vi$, qui, en général (c'est-à-dire sans exclure l'exception en des lignes isolées et des points isolés), possède, en chaque point O de la surface T, une valeur déterminée variant avec la position du point d'une manière continue et conformément aux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

et nous sous-entendrons cette propriété de w, ainsi qu'il a été indiqué précédemment [g], en disant que w est une fonction de $z = x+yi$. Pour simplifier ce qui suit, nous ferons cette hypothèse qu'il ne peut se présenter pour une fonction de z une discontinuité qui serait détruite par une modification de sa valeur en un point isolé.

La surface T sera, en premier lieu, regardée comme simplement connexe et recouvrant partout simplement le plan A.

Théorème. *Lorsqu'une fonction w de z n'éprouve jamais de solution dans la continuité tout le long d'une ligne et qu'ensuite, pour tout point O' de la surface où $z = z'$, $w(z - z')$ devient infiniment petit lorsque le point O se rapproche indéfiniment de O', cette fonction, ainsi que toutes ses dérivées, est finie et continue en tous les points à l'intérieur de la surface.*

Les hypothèses que l'on a faites relativement aux variations de la grandeur wv, se partagent, lorque l'on pose pesi, en les suivantes, relatives à u et v :

1° $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$,

2° $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, pour chaque partie de la surface T ;

3° Les fonctions u et v ne sont pas discontinues le long d'une ligne ;

4° En tout point O', ρu et ρv deviennent infiniment petits avec ρ, distance de O au point O' ;

5° Pour les fonctions u et v, des discontinuités qui pourraient être détruites par une modification de leur valeur en des points isolés sont exclues.

Par suite des hypothèses 2°, 3°, 4°, en chaque partie de la surface T l'on a (d'après § IX, proposition III)

$$\int \left(u\frac{\partial x}{\partial s} - v\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0,$$

l'intégrale étant relative au contour entier de cette partie, et ainsi (§ IX, proposition IV) l'intégrale

$$\int_{O_0}^{O} \left(u\frac{\partial x}{\partial s} - v\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

possède toujours la même valeur quand elle est prise le long de lignes allant de O_0 à O, et représente, O_0 étant regardé comme fixe, une fonction U de x, y nécessairement continue, sauf en des points isolés et ayant en chaque point (d'après 5°) pour dérivées

$$\frac{\partial U}{\partial x} = u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -v,$$

[g] Au § I. page 3. — (L. L.)

La substitution de ces valeurs à u et à v transforme les hypothèses 1°, 3°, 4° en les conditions du théorème qui termine le § X. La fonction U est donc, ainsi que toutes ses dérivées, finie et continue en tous les points de T, et il en est de même par suite de la fonction complexe $w = \dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}i$, ainsi que de ses dérivées prises par rapport à z.

§ XIII.

Il s'agit maintenant de rechercher ce qui arrive lorsque, en conservant les autres hypothèses du § XII, nous supposons que pour un certain point O', à l'intérieur de la surface T, $(z - z')w = \rho e^{\varphi i} w$ ne devient plus infiniment petit lorsque le point O se rapproche indéfiniment du point O'. En ce cas, O se rapprochant indéfiniment de O', w devient infiniment grand, et, lorsque la grandeur w ne reste pas d'ordre égal à celui de $\dfrac{1}{\rho}$ (nous entendons par là que le quotient des deux ne tend pas vers une limite finie), nous supposerons que les ordres des deux grandeurs restent au moins en rapport fini entre eux, de telle sorte que l'on peut assigner une puissance de ρ dont le produit par w, pour ρ infiniment petit, devient infiniment petit, ou bien reste fini. Soit μ l'exposant d'une telle puissance et n le nombre entier qui lui est immédiatement supérieur ; alors la grandeur $(z-z')^{n-1}w = \rho^n e^{n\rho i} w$ deviendra infiniment petite avec ρ et, par conséquent, $(z - z')^{n-1}w$ est une fonction de z (puisque $\dfrac{d(z - z')^{n-1}w}{dz}$ est indépendant de dz) qui, en cette partie de la surface, satisfait aux hypothèses du § XII et, par suite, est finie et continue au point O'.

Désignons sa valeur au point O' par a_{n-1} ; alors

$$(z - z')^{n-1}w - a_{n-1}$$

est une fonction qui est continue et égale à zéro en O' et qui, par suite, devient infiniment petite avec ρ ; d'où nous tirons cette conclusion, d'après le § XII, que $(z-z')^{n-2}w - \dfrac{a_{n-1}}{z - z'}$ est une fonction continue au point O'. En procédant ainsi de proche en proche, w, par l'effet de la soustraction d'une expression de la forme

$$\frac{a_1}{z - z'} + \frac{a_2}{(z - z')^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{(z - z')^{n-1}},$$

est transformée en une fonction, qui reste finie et continue au point O'.

Quand, sous les hypothèses du § XII, il se présente donc cette modification que, O se rapprochant indéfiniment d'un point O' à l'intérieur de la surface T, la fonction w devient infiniment grande, alors l'ordre de cette grandeur infinie [nous considérons une quantité croissante en raison inverse de la distance comme le premier ordre d'une grandeur infinie [h]], quand cet ordre est fini, est nécessairement un nombre entier ; et, si ce nombre est égal à m, la fonction w peut être transformée par l'adjonction d'une fonction renfermant $2m$ constantes arbitraires en une fonction continue en ce point O'.

Remarque. — Nous regardons une fonction comme renfermant *une* constante arbitraire, lorsque les modes de détermination possibles de cette fonction embrassent un domaine continu à *une* dimension.

[h] C'est-à-dire, ainsi que l'on dit habituellement, comme une grandeur infinie du premier ordre. — (L. L.)

§ XIV.

Les restrictions qui ont été faites, dans les § XII et XIII, relativement à la surface T, ne sont pas essentielles à la légitimité des résultats acquis.

En effet, l'on peut joindre tout point situé à l'intérieur d'une surface quelconque à une partie de ladite surface qui jouit des propriétés supposées en ces § XII et XIII, exception faite du seul cas où ce point est un point de ramification de la surface.

Pour faire l'étude de ce cas, concevons la surface T ou une portion quelconque de cette surface, renfermant un point de ramification O' d'ordre $(n-1)$ où l'on a $z = z' = x' + y'i$, représentée par l'entremise de la fonction $\zeta = (z - z')^{\frac{1}{n}}$ sur un autre plan A, c'est à-dire que nous supposerons la valeur de la fonction $\zeta = \xi + \eta i$ au point O représentée sur ce plan A par un point Θ dont les coordonnées rectangulaires sont ξ et η, et nous regarderons Θ comme l'image (*Bild*) du point O. De cette manière, nous obtenons comme représentation (*Abbildung*) de cette partie de la surface T une surface connexe recouvrant A et qui au point Θ', image du point O', n'a pas de point de ramification, comme nous allons le faire voir de suite.

Pour fixer les idées, concevons qu'autour du point O' comme centre, sur le plan A, on décrive un cercle de rayon R et que l'on mène un diamètre parallèle à l'axe des x où, par conséquent, $z - z'$ prendra des valeurs réelles. Le morceau détaché de T par ce cercle et contenant le point de ramification se décompose alors sur les deux bords du diamètre, lorsque R est pris suffisamment petit, en n portions de surface ayant leurs cours séparés de chaque côté du diamètre et ayant la forme de demi-cercles.

Nous désignerons ces portions de surface, du côté du diamètre où $y - y'$ est positif, par $a_1, a_2 ..., a_n$, et, sur le côté opposé, par $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, et nous supposerons que, pour les valeurs négatives de $z - z'$, $a_1, a_2, ..., a_n$, soient dans cet ordre respectivement soudés pour les valeurs négatives de $z - z'$ avec $a'_1, a'_2 ..., a'_n$ et pour les valeurs positives de $z - z'$ avec $a'_n, a'_1, a'_2, ..., a'_{n-1}$; de la sorte un point décrivant un circuit autour du point O' (dans le sens convenable) cheminera successivement sur les surfaces $a_1, a'_1, a_2, a'_2, ..., a_n, a'_n$, et de a'_n reviendra sur a_1, supposition évidemment admissible.

Introduisons alors sur les deux plans des coordonnées polaires, en posant $z - z' = \rho e^{\varphi i}, \zeta = \sigma e^{\psi i}$, et choisissons pour la représentation de la portion de surface a_i, la valeur que prend l'expression $(z - z')^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n} i}$, quand l'on suppose $0 \leq \varphi \leq \pi$; l'on a de la sorte, pour tous les points de a_1, $\sigma \leq R^{\frac{1}{n}}$ et $0 \leq \psi \leq \dfrac{\pi}{n}$. Les images de ces points sur le plan A recouvrent donc le secteur s'étendant de $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = \dfrac{\pi}{n}$ et faisant partie d'un cercle décrit du point Θ' comme centre, avec $R^{\frac{1}{n}}$ pour rayon, et cela en sorte qu'à chaque point de a_1 correspond un seul point appartenant au secteur et variant d'une manière continue en même temps que le point sur a_1, et réciproquement, d'où il s'ensuit que la représentation de la surface a_1 est une surface connexe, qui recouvre simplement le secteur.

D'une manière toute pareille, on obtient comme représentation, pour la surface a'_1, un secteur s'étendant de $\psi = \dfrac{\pi}{n}$ à $\psi = \dfrac{2\pi}{n}$, pour a_2, un secteur s'étendant de $\psi = \dfrac{2\pi}{n}$ à $\psi = \dfrac{3\pi}{n}$ et finalement, pour a_n, un secteur qui s'étend de $\psi = \dfrac{2n-1}{n}\pi$ à $\psi = 2\pi$, lorsque l'on prend respectivement la valeur de φ, pour les points de ces surfaces, entre π et 2π, 2π et 3π,..., $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, ce qui est toujours possible, et cela d'une seule manière.

Ces secteurs se suivent dans le même ordre que les surfaces a et a', et cela de telle sorte qu'aux points où celles-ci sont soudées entr'elles correspondent aussi des points coïncidant ; par leur réunion on obtient donc une représentation connexe d'une portion de la surface T renfermant le point O' et cette représentation est évidemment une surface qui recouvre simplement le plan A.

Une grandeur variable, qui a en chaque point O une valeur déterminée, a de même une valeur déterminée en chaque point Θ et réciproquement, puisqu'à chaque point O correspond un seul point Θ et vice versa. Ensuite, si la grandeur est une fonction de z, elle le sera aussi de ζ, car lorsque $\dfrac{dw}{dz}$ est indépendant de dz, $\dfrac{dw}{d\zeta}$ l'est aussi de $d\zeta$, et réciproquement.

De ceci nous concluons qu'à toutes les fonctions w de z on peut appliquer aussi, pour les points de ramification O', les propositions des § XII et XIII, lorsque ces fonctions sont considérées comme fonctions de $(z-z')^{\frac{1}{n}}$. Nous aurons comme résultat la proposition suivante :

Lorsqu'une fonction w de z, quand O se rapproche indéfiniment d'un point de ramification O' d'ordre $n-1$, devient infinie, elle est nécessairement infiniment grande de même ordre qu'une puissance de la distance entre O et O' dont l'exposant est un multiple de $\dfrac{1}{n}$ et, lorsque cet exposant est $= -\dfrac{m}{n}$, ladite fonction peut être transformée en une fonction continue au point O' par l'adjonction d'une expression de la forme

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}} + \frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}},$$

où $a_1, a_2, ..., a_m$ sont des constantes complexes arbitraires.

Ce théorème renferme comme corollaire la proposition suivante :

La fonction w est continue au point O' lorsque $(z-z')^{\frac{1}{n}}w$ devient infiniment petite quand les points O et O' se rapprochent indéfiniment.

§ XV.

Concevons maintenant une fonction de z, qui, en chaque point O de la surface T recouvrant d'une manière arbitraire le plan A, possède une valeur déterminée, et qui n'y est pas partout égale à une constante, représentée géométriquement de telle sorte que sa valeur $w = u + vi$ au point O soit représentée par un point Q du plan B dont les coordonnées rectangulaires sont u et v ; nous aurons alors les propositions suivantes :

I. — L'ensemble des points Q peut être regardé comme formant une surface S, à chaque point de laquelle correspond un point O déterminé variant avec ce point Q d'une manière continue sur T.

Pour le démontrer il suffit de démontrer, c'est évident, que la position du point Q varie toujours avec celle du point O (et cela, en général, d'une manière continue). Cette proposition est renfermée dans la suivante :

Une fonction $w = u + vi$ de z ne peut être égale à une constante le long d'une ligne, lorsqu'elle n'est pas partout égale à une constante.

Démonstration. – Si w avait $a+bi$ pour valeur constante le long d'une ligne, alors $u-a$ et $\dfrac{\partial(u-a)}{\partial\rho}$, c'est-à-dire $-\dfrac{\partial v}{\partial s}$, seraient nulles le long de cette ligne, et l'on aurait partout

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2} = 0;$$

par conséquent, en vertu de la proposition I, § XI, $u-a$ et, par suite, puisque

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$v-b$ aussi seraient égales partout à zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. — Par suite de l'hypothèse posée en I, il ne peut exister une connexion entre les parties de S, sans qu'il en soit de même entre les parties correspondantes de T. Réciproquement, partout où a lieu une connexion sur T et où w est continue, on peut attribuer une connexion correspondante à la surface S.

Ceci posé, le contour de S correspond, d'une part, au contour de T et, d'autre part, aux points de discontinuité ; mais les parties à l'intérieur de S, exception faite de points isolés, recouvrent partout d'une manière unie le plan B ; c'est-à-dire qu'une portion de surface ne se prolonge jamais en deux autres portions différentes superposées, ni en une autre portion qui se replierait en se superposant à la première. Le premier de ces faits ne pourrait évidemment se présenter, T ayant partout une connexion correspondante à celle de S, que s'il avait aussi lieu sur T, ce qui est contraire à nos hypothèses. Quant au second point, nous allons le démontrer de suite.

Démontrons, en premier lieu, qu'un point Q' où $\dfrac{dw}{dz}$ est fini ne peut être situé en un pli de la surface S.

À cet effet, joignons le point O' auquel correspond Q' à une portion de la surface de forme quelconque et de dimensions indéterminées. Alors, en vertu du § III, ces dimensions doivent pouvoir être prises suffisamment petites pour que la forme de la partie correspondante sur S diffère aussi peu que l'on voudra de ce morceau sur T ; elles seraient de cette manière si petites que le contour de cette partie sur S séparerait sur le plan B un morceau entourant Q'. Or, ceci est impossible lorsque Q' est situé sur un pli de la surface S.

Or, en vertu de la proposition I, $\frac{dw}{dz}$ ne peut, regardé comme fonction de z, être nul qu'en des points isolés ; d'autre part, puisque w est continu en les points de T que nous considérons ici, $\frac{dw}{dz}$ ne peut devenir infini qu'en les points de ramification de cette surface, par suite, etc.

C. Q. F. D.

III. — La surface S, par suite, est une surface pour laquelle ont lieu les hypothèses faites au § V ; sur cette surface, en chaque point Q, la grandeur indéterminée possède une valeur déterminée, qui varie d'une manière continue avec le lieu de Q, et de telle façon que $\frac{dz}{dw}$ est indépendant de la direction de la variation de ce lieu. Ainsi z, en attribuant à ces mots le sens précédemment indiqué, est une fonction continue de la grandeur variable complexe w dans le domaine représenté par S.

D'où nous concluons ensuite :

Soient O' et Q' deux points correspondants intérieurs aux surfaces T et S, et soient en ces points, $z = z', w = w'$; alors, quand aucun d'eux n'est un point de ramification, $\frac{w-w'}{z-z'}$ tend, lorsque le point O se rapproche indéfiniment du point O', vers une limite finie, et la représentation y est une représentation où la similitude a lieu dans les plus petites parties ; mais, quand Q' est un point de ramification d'ordre $(n-1)$, O' un point de ramification d'ordre $(m-1)$, alors, lorsque le point O se rapproche indéfiniment du point O',

$$\frac{(w-w')^{\frac{1}{u}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$$

tend vers une limite finie, et, pour les parties de surface qui se trouvent aux points O' et Q', on obtient un mode de représentation facile à trouver d'après le § XIV.

§ XVI.

Théorème. *Soient α et β deux fonctions quelconques de x, y, pour lesquelles l'intégrale*

$$\int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2\right] dT,$$

relative à toutes les parties d'une surface T recouvrant le plan d'une manière quelconque, possède une valeur finie ; lorsqu'on adjoint à α des fonctions continues, ou discontinues seulement en des points isolés, et qui sur le contour sont égales à zéro, cette intégrale atteint toujours pour une de ces fonctions une valeur minima ; et, quand on exclut des discontinuités qui peuvent être détruites par une modification de la fonction en des points isolés, cette fonction est unique [5].

Nous désignerons par λ une fonction indéterminée continue ou qui n'admet de discontinuités qu'en des points isolés, qui sur le contour est égale à 0, et pour laquelle l'intégrale

$$L = \int \left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right] dT,$$

relative à toute la surface, a une valeur finie, par $\omega + \lambda$ une des fonctions indéterminées $\alpha + \lambda$, et enfin par Ω l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT,$$

relative à toute la surface.

L'ensemble des fonctions λ forme un domaine connexe et qui contient ses limites [i], puisque l'on peut passer d'une manière continue de l'une quelconque de ces fonctions à chacune des autres, aucune d'elles d'ailleurs ne pouvant jamais teudre indéfiniment vers une fonction discontinue le long d'une ligne sans que L ne devienne alors infinie (§ XVII) ; maintenant, si l'on pose $\omega = \alpha + \lambda$, Ω, pour chaque fonction λ, prend une valeur finie qui tend vers l'infini avec L et varie d'une manière continue avec la forme de λ, mais a pour une limite inférieure zéro ; par conséquent, pour *une* forme au moins de la fonction ω, l'intégrale Ω atteint une valeur minima.

Pour démontrer la seconde partie de notre théorème, désignons par u une des fonctions ω pour laquelle Ω atteindra son minimum [j], par h une grandeur indéterminée constante sur toute la surface ; de la sorte $u + h\lambda$ satisfait aux conditions prescrites à la fonction ω. Pour $\omega = u + h\lambda$, la valeur de Ω s'écrira ainsi

$$\begin{aligned} \Omega \ &= \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT \\ &\quad +2h \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] dT \\ &\quad +h^2 \int \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] dT = M + 2Nh + Lh^2. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition d'un minimum, cette valeur doit alors, pour tout λ, être supérieure à M, pourvu que h soit chaque fois pris suffisamment petit. Mais ceci exige que, pour tout λ, on ait $N = 0$; en effet, s'il en était autrement,

$$2Nh + Lh^2 = Lh^2 \left(1 + \frac{2N}{4h} \right)$$

serait négatif, h étant pris de signe contraire à N et $< \dfrac{2N}{L}$, abstraction faite du signe.

La valeur de Ω pour $\omega = u + \lambda$, forme renfermant évidemment toutes les valeurs possibles de ω, sera donc égale à $M + L$, et, par conséquent, puisque L est essentiellement positif, Ω ne peut, pour aucune forme de la fonction ω, prendre une valeur inférieure à celle qu'elle atteint pour $\omega = u$.

---

[i] C'est ce que M. Cantor a désigné depuis par les mots *ensemble parfait* (perfecte Menge). (L. L.)

[j] Voir, entre autres, la critique de cette partie du célèbre raisonnement par lequel Riemann démontre le Principe de Dirichlet, dans le Traité d'Analyse de M. Picard, Tome II, p. 38. (L. L.)

Si, parmi les fonctions ω, il s'en trouvait une autre u' pour laquelle aurait lieu un minimum M' de Ω, les mêmes déductions seraient valables, et l'on aurait donc $M' \leq M$ et $M \leq M'$, et, par conséquent, $M = M'$. Mais, si l'on met u' sous la forme $u + \lambda'$, l'on obtient pour M' l'expression $M + L'$, L' désignant la valeur de L pour $\lambda = \lambda'$, et l'équation $M = M'$ donne alors $L' = 0$. Ceci est seulement possible lorsqu'en toutes les parties de la surface on a

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0;$$

par suite, tant que λ' est continue, cette fonction a nécessairement une valeur constante, et, par conséquent, puisque cette fonction est égale à zéro sur le contour et n'est pas discontinue le long d'une ligne, elle a une valeur différente de zéro au plus en des points isolés. Deux des fonctions ω, pour lesquelles Ω atteint un minimum, ne peuvent donc être différentes l'une de l'autre qu'en des points isolés, et, par conséquent, lorsque dans la fonction u l'on a supprimé toutes les discontinuités qui peuvent être détruites par une modification de sa valeur en des points isolés, ladite fonction est parfaitement déterminée.

§ XVII.

Nous allons donner maintenant la démonstration précédemment annoncée que λ, sans pour cela que L cesse de rester fini, ne peut tendre indéfiniment vers une fonction γ discontinue le long d'une ligne ; c'est-à-dire que si la fonction λ est soumise à la condition de coïncider avec γ en dehors d'une portion de surface T' renfermant la ligne de discontinuité, T' peut alors être prise suffisamment petite pour que L devienne forcément plus grande qu'une grandeur assignée quelconque C.

Conservant à s et ρ, relativement à la ligne de discontinuité, les significations habituelles, désignons, pour un s indéterminé, par x la courbure, une courbure convexe du côté des ρ positifs étant considérée comme positive, par ρ_1, la valeur de ρ sur le contour de T' du côté des ρ positifs, par ρ_2, la valeur de ρ sur le contour de T' du côté des ρ négatifs, et enfin les valeurs correspondantes de γ par γ_1 et γ_2. Considérons alors une portion quelconque à courbure continue de cette ligne ; la partie de T' comprise entre les normales menées par ses extrémités, lorsque celle-ci ne s'étend pas jusqu'au centre de courbure de la ligne s, apporte à la valeur de L la contribution suivante :

$$\int ds \int_{\rho_2}^{\rho_1} d\rho (1 - \chi\rho) \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} \right)^2 \frac{1}{(1 - \chi\rho)^2} \right];$$

mais la valeur minima de l'expression

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right)^2 (1 - \chi\rho) d\rho$$

pour les valeurs limites fixes γ_1, γ_2 de λ, obtenue d'après les règles connues, est égale à

$$\frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \chi}{\log(1 - \chi\rho_2) - \log(1 - \chi\rho_1)},$$

et, par suite, cette contribution, de quelque manière que λ soit pris à l'intérieur de T', est plus grande que

$$\int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \chi ds}{\log(1 - \chi\rho_2) - \log(1 - \chi\rho_1)},$$

La fonction γ serait continue, pour $\rho = 0$, si la plus grande va leur que puisse atteindre $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$, pour $\pi_1 > \rho_1 > 0$ et $\pi_2 < \rho_2 < 0$, devenait infiniment petite avec $\pi_1 - \pi_2$. Nous pouvons donc pour toute valeur de s assigner une grandeur finie m, de telle sorte, quelque petit que l'on prenne $\pi_1 - \pi_2$, qu'il existe toujours entre les limites données par les expressions

$$\pi_1 > \rho_1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \pi_2 < \rho_2 \leq 0$$

(les signes d'égalité s'excluant l'un l'autre), des valeurs de ρ_1, et ρ_2 pour lesquelles on ait $(\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m$.

Envisageons maintenant une forme quelconque de T' soumise aux restrictions précédentes, et soient P_1 et P_2 les valeurs déterminées de ρ_1 et ρ_2 pour cette forme, et désignons par a la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{m\chi ds}{\log(1 - \chi P_2) - \log(1 - P_1)}$$

relative à la partie en question de la ligne de discontinuité ; nous pourrons alors évidemment obtenir

$$\int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \chi ds}{\log(1 - \chi\rho_2) - \log(1 - \rho_1)} > C,$$

si nous prenons ρ_1 et ρ_2, pour chaque valeur de s, de telle sorte que les inégalités

$$\rho_1 < \frac{1 - (1 - \chi P_1)^{\frac{a}{C}}}{\chi}, \qquad \rho_2 > \frac{1 - (1 - \chi P_2)^{\frac{a}{C}}}{\chi}$$

et

$$(\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m$$

soient satisfaites. Mais cela, de quelque façon que l'on prenne λ à l'intérieur de T', a pour conséquence que la partie de L qui provient de la portion de T' en question sera $> C$, et il en sera de même a fortiori de L tout entier [6].

C. Q. F. D.

§ XVIII.

D'après le § XVI, pour la fonction u qui y est complètement définie et pour l'une quelconque des fonctions λ, l'on a

$$N = \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] dT = 0,$$

l'intégrale s'étendant à toute la surface. De cette équation nous allons maintenant tirer encore d'autres conséquences.

Séparons sur la surface T un morceau T' renfermant les lieux de discontinuité de u, β, λ ; à l'aide des principes des § VII, VIII, en posant

$$X = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\lambda \qquad \text{et} \qquad Y = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\lambda,$$

l'on trouve que la partie de N, qui provient du morceau restant T' de T, est égale à

$$-\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dT - \int \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \lambda ds.$$

Par suite de la condition relative au contour imposée à la fonction λ, la partie de

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \lambda ds,$$

relative à la portion de contour que T'' possède en commun avec T est nulle, en sorte que N peut être regardée comme formée de l'intégrale

$$-\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dT,$$

relativement à T'', et de

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right] dT + \int \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \lambda ds,$$

relativement à T'.

Maintenant, il est évident que, si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ était différent de zéro en une partie quelconque de la surface T, N prendrait également une valeur différente de zéro, pourvu que l'on ait choisi λ, ce que l'on est libre de faire, égale à zéro à l'intérieur de T', et de telle nature qu'à l'intérieur de T'', $\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ ait partout le même signe. Mais si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est égale à zéro en toutes les parties de T, alors la partie de N qui dérive de T'' s'évanouit pour chaque λ, et de la condition $N = 0$ résulte alors que les parties relatives aux lieux de discontinuité sont égales à zéro.

Ainsi, relativement aux fonctions $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}$ en désignant la première par X et la seconde par Y, nous avons non seulement d'une manière générale l'équation

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

mais encore celle-ci

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial \rho} + Y\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) ds = 0$$

l'intégrale étant prise relativement au contour total d'une partie quelconque de T, en tant au moins que cette expression présente un sens déterminé.

Décomposons (§ IX, proposition V) la surface T, lorsqu'elle possède une connexité multiple, en une surface simplement connexe T^* à l'aide de sections transverses ; alors, par conséquent, l'intégrale

$$-\int_{O_0}^{O} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial \beta}{\partial s}\right) ds,$$

relative à une ligne quelconque joignant O_0 à O à l'intérieur de T^*, possède toujours la même valeur et représente, O_0 étant regardé comme fixe, une fonction de x, y qui sur T^* éprouve partout une variation continue qui, le long d'une section transverse, est la même sur les deux bords. Cette fonction ν adjointe à β nous fournit une fonction $= \beta + \nu$ dont les dérivées sont

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

D'où l'on conclut le

Théorème. *Lorsque sur une surface connexe T, décomposée par des sections transverses en une surface simplement connexe T^*, l'on donne une fonction complexe $\alpha + \beta i$ de x, y, pour laquelle l'intégrale*

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] dT,$$

étendue à toute la surface, possède une valeur finie, cette fonction peut être toujours, et cela d'une manière unique, transformée en une fonction de z par l'adjonction d'une fonction $\mu + \nu i$ de x, y qui satisfait aux conditions suivantes :

1° *Sur le contour, $\mu = 0$ ou, du moins, diffère de zéro seulement en des points isolés ; en un point, ν est donnée d'une manière arbitraire ;*

2° *Les variations de μ sur T, celles de ν sur T^* ne sont discontinues qu'en des points isolés, et cela seulement de telle sorte que les intégrales*

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)^2\right] dT \quad \text{et} \quad \int \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y}\right)^2\right] dT.$$

relatives à toute la surface, restent finies ; de plus, les variations de ν le long d'une section transverse sont égales sur les deux bords.

Ces conditions suffisent pour déterminer $\mu + \nu i$. En effet, cela résulte de ce que μ, à l'aide de laquelle ν est déterminée à une constante additive près, fournit toujours également un minimum de l'intégrale Ω, puisque, en posant $u = \alpha + \mu$, l'on a pour chaque λ évidemment $N = 0$; propriété qui, d'après le § XVI, n'a lieu que pour une seule fonction.

§ XIX.

Les principes qui servent de base au théorème qui termine le paragraphe précédent ouvrent la voie pour l'étude de fonctions *déterminées* d'une variable complexe (indépendamment d'une expression explicite de ces fonctions).

Pour s'orienter dans ce champ de recherches, l'on fera usage d'une estimation comparative de l'ensemble des conditions nécessaires à la détermination d'une pareille fonction à l'intérieur d'un domaine donné.

Arrêtons-nous d'abord à un cas déterminé ; lorsque la surface qui recouvre le plan A et qui représente ce domaine de grandeurs est une surface simplement connexe, la fonction $w = u + vi$ de z peut être déterminée conformément aux conditions suivantes :

1º Pour u, l'on donne la valeur en tous les points du contour, valeur qui, pour une variation infiniment petite de la position, variera d'une grandeur infiniment petite de même ordre, mais du reste d'une manière quelconque[k] ;

2º En un point quelconque, la valeur de v est donnée arbitrairement ;

3º La fonction doit être partout finie et continue.

Mais, sous ces conditions, la fonction est complètement déterminée.

En effet, cela résulte du théorème du paragraphe précédent, lorsque l'on détermine $\alpha + \beta i$, ce qui est toujours possible, de telle sorte que α soit égale, sur le contour, à la valeur donnée et que sur toute la surface, pour toute variation infiniment petite de la position, la variation de $\alpha + \beta i$ soit infiniment petite de même ordre.

La fonction u peut être par conséquent donnée sur le contour en général comme fonction toute arbitraire de s, et ce fait détermine partout en même temps v ; réciproquement, v peut être prise aussi quelconque en tous les points de l'encadrement ; d'où l'on conclut alors les valeurs de u.

Le champ d'évolution pour le choix des valeurs de w sur le contour embrasse donc un ensemble à *une* dimension pour chaque point de l'encadrement, et la détermination complète de ces valeurs nécessite *une* équation pour chaque point de l'encadrement, sans qu'il soit toutefois essentiel que chacune de ces équations soit uniquement relative à la valeur d'*un* terme en un point de l'encadrement.

Cette détermination peut aussi être effectuée de telle sorte que pour chaque point de l'encadrement *une* équation contenant les deux termes et variant de forme d'une manière continue avec la position du point soit donnée ; ou bien la détermination peut être effectuée simultanément pour plusieurs parties d'encadrement, de telle sorte qu'à chaque point d'une de ces parties soient associés $n - 1$ points déterminés, dont chacun tire son origine d'une des autres parties respectives, et de telle façon qu'alors pour chaque groupe de n points ainsi associés soit donné un groupe de n équations,

[k] Les variations de cette valeur sont à vrai dire soumises seulement à la restriction de ne pas être discontinues le long d'une *partie entière* du contour ; on a fait une restriction ultérieure dans le seul but d'éviter ici des complications inutiles. - (Riemann.)

variant d'une manière continue avec la situation de ces points. Mais ces conditions, dont la totalité forme une variété continue, et qui sont exprimées par des équations entre des fonctions arbitraires, doivent encore, en général, pour être admissibles et suffisantes à la détermination d'une fonction partout continue à l'intérieur du domaine de grandeurs, être soumises à une restriction ou bien à une extension qui sont données par des équations de condition particulières (équations relatives aux constantes arbitraires), car l'exactitude de nos estimations ne s'étend pas évidemment jusqu'à ce dernier point relatif aux constantes.

Dans le cas où le domaine de variabilité de la grandeur z est représenté par une surface multiplement connexe, ces considérations n'éprouvent aucune modification essentielle ; en effet, l'application du théorème du § XVIII fournit une fonction jouissant des mêmes propriétés que celles que l'on vient d'étudier, aux variations près à la traversée des sections transverses, variations qui peuvent être rendues égales à zéro, lorsque les conditions relatives à l'encadrement contiennent un nombre de constantes disponibles égal à celui des sections transverses.

Le cas, où la continuité est interrompue le long d'une ligne à l'intérieur de la surface, peut être subordonné au précédent, si l'on considère cette ligne comme une section pratiquée dans la surface.

Finalement, si l'on admet une solution de la continuité en un point isolé, c'est-à-dire, d'après le § XII, un infini de la fonction en un point, alors, en conservant les autres hypothèses faites dans le cas étudié au commencement, l'on peut trouver relativement à ce point une fonction des quelconque, après soustraction de laquelle la fonction qu'il s'agit de déterminer sera continue ; mais, par cela même, cette dernière sera complètement déterminée. En effet, supposons la grandeur $\alpha + \beta i$ égale à la fonction donnée dans un cercle aussi petit que l'on voudra, dont le centre est en ce point de discontinuité, et cela d'ailleurs conformément aux prescriptions antérieures, alors l'intégrale

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT,$$

relative à ce cercle, est égale à zéro ; prise relativement à la partie restante, l'intégrale est égale à une grandeur finie ; on peut donc faire l'application du théorème précédent, ce qui permet d'obtenir une fonction qui jouit des propriétés exigées. L'on peut de ceci conclure, en vertu du théorème du § XIII, que, lorsqu'en un point isolé la fonction peut devenir infiniment grande d'ordre n, le nombre des constantes dont on peut disposer sera en général égal à $2n$.

Représentons géométriquement (d'après le § XV), une fonction w, d'une grandeur complexe z, variant à l'intérieur d'un domaine donné à deux dimensions ; cette fonction fournit alors une représentation conforme S, recouvrant le plan B, d'une surface donnée T, recouvrant le plan A, la similitude étant conservée dans les plus petites parties, à l'exception de certains points isolés. Les conditions que l'on a trouvées précédemment, suffisantes et nécessaires pour la détermination de la fonction, sont relatives soit à ses valeurs sur le contour, soit à ses valeurs aux points de discontinuité. Elles se présentent donc (§ XV) toutes comme conditions pour la figuration du contour de S en donnant pour chaque point du contour *une* équation de condition. Si chacune de ces équations est relative seulement à *un* point d'encadrement, elles seront représentées par un réseau de courbes, le lieu géométrique de chaque point du contour étant formé par une de ces courbes. Lorsque deux points du contour, dont l'un varie d'une manière continue avec l'autre, sont soumis ensemble à deux équations de condition, il existe par ce fait, entre deux parties du contour, une relation de dépendance telle que, la situation de l'une étant prise arbitrairement, la situation de l'autre en sera une conséquence. De même l'on obtiendra, pour d'autres formes des équations de condition, une interprétation géométrique analogue ; mais nous n'insisterons pas davantage sur ce point.

§ XX.

L'introduction des grandeurs complexes dans les Mathématiques a son origine et son but immédiat dans la théorie de lois de dépendance simples[1] entre des grandeurs variables ; lois exprimées par des opérations sur les grandeurs. En effet, si l'on applique ces lois de dépendance dans un champ plus étendu, en attribuant des valeurs complexes aux grandeurs variables auxquelles se rapportent ces lois, il se présente alors une harmonie et une régularité qui sans cela restent cachées. Les cas où cette extension avait été faite forment jusqu'ici, il est vrai, un domaine restreint ; tous ces cas à peu près peuvent être ramenés à ces lois de dépendance entre deux grandeurs variables où l'une est soit fonction algébrique de l'autre (c'est-à-dire lorsque entre les deux a lieu une équation algébrique), soit une fonction dont la dérivée est une fonction algébrique ; mais presque tout le progrès accompli ici a donné non seulement une forme plus simple, plus expéditive aux résultats acquis sans l'aide des grandeurs complexes, mais encore a ouvert aussi le chemin à de nouvelles découvertes ; l'histoire des recherches relatives aux fonctions algébriques, circulaires ou exponentielles, elliptiques et abéliennes en offre les exemples.

Indiquons rapidement le nouveau progrès qui résulte de nos recherches pour la théorie de pareilles fonctions.

Les méthodes dont on s'est servi jusqu'ici pour le traitement de ces fonctions partent toujours du principe qui consiste à prendre pour définition une *expression* de la fonction, sa valeur étant ainsi donnée par *chaque* valeur de son argument. Nos recherches ont démontré que, par suite du caractère général d'une fonction d'une grandeur complexe variable, une partie des éléments de détermination sont, dans une définition de cette nature, une conséquence de la partie restante, et, à vrai dire, alors l'ensemble de ces éléments est ici ramené à ceux qui sont nécessaires à la détermination.

Cela simplifie essentiellement le traitement de la question. Ainsi pour démontrer, par exemple, l'égalité de deux expressions de la même fonction l'on devait autrefois les transformer l'une en l'autre, c'est-à-dire faire voir qu'elles coïncidaient toutes deux pour toute valeur de la grandeur variable ; or, il suffit maintenant de démontrer qu'elles coïncident dans un domaine bien plus restreint.

Une théorie de ces fonctions, basée sur les principes introduits ici, établirait la figuration de la fonction (c'est-à-dire sa valeur pour toute valeur de son argument), indépendamment d'une méthode pour déterminer la fonction au moyen des opérations sur les grandeurs ; on parviendrait à la

[1] Nous regardons ici comme opérations élémentaires : l'addition et la soustraction, la multiplication et la division, l'intégration et la différentiation ; et une loi de dépendance est pour nous d'autant plus *simple* qu'elle nécessite moins d'opérations élémentaires. En effet, toutes les fonctions, dont on s'est servi jusqu'ici dans l'analyse, peuvent être ramenées à un nombre fini de ces opérations. - (Riemann.)

définition générale d'une fonction d'une grandeur variable complexe en ajoutant seulement les caractères nécessaires pour déterminer la fonction particulière ; et c'est alors seulement que de cette théorie l'on passerait à l'étude des différentes expressions dont la fonction est susceptible.

Le caractère individuel d'une classe de fonctions, qui sont exprimées d'une manière pareille à l'aide d'opérations sur les grandeurs, se présente alors pour ces fonctions sous forme des conditions relatives au contour et aux discontinuités. Par exemple, si le domaine de variabilité de la grandeur z recouvre simplement ou multiplement le plan indéfini A tout entier, et si la fonction n'admet des discontinuités qu'en des points isolés, et en ces points seulement des infinis dont les ordres sont finis (pour z infini cette grandeur elle-même, pour z' fini la grandeur $\frac{1}{(z-z')}$ étant considérée comme un infini du premier ordre), alors la fonction est nécessairement une fonction algébrique et, réciproquement, toute fonction algébrique satisfait à ces conditions.

Nous n'entrerons pas, pour cette fois, dans le développement de cette théorie qui, suivant nos remarques, est destinée à jeter le jour sur des lois de dépendance simples régies par des opérations sur les grandeurs ; en effet, nous laissons de côté l'étude de l'expression d'une fonction.

Pour la même raison, nous ne nous occuperons pas ici d'établir la possibilité d'appliquer nos théorèmes, en les prenant pour principes d'une théorie *générale* de ces lois de dépendance ; il serait alors nécessaire de démontrer que la conception de fonction d'une grandeur variable complexe, que nous prenons ici pour point de départ, coïncide complètement avec l'idée d'une dépendance exprimable par des opérations sur les grandeurs [m] [7].

§ XXI.

Pour l'éclaircissement de nos théorèmes généraux il ne sera pas sans utilité d'exposer en détail un exemple de leur application.

L'application indiquée dans le paragraphe précédent, bien qu'atteignant le but prochain envisagé dans la déduction des théorèmes, n'est cependant encore que particulière. En effet, lorsque la dépendance est régie par un nombre fini de ces opérations sur les grandeurs qui y sont regardées comme opérations élémentaires, la fonction contient seulement un nombre fini de paramètres ; quant à la forme d'un système de conditions, relatives au contour et aux discontinuités, indépendantes entre elles, et suffisant pour déterminer la fonction, ce fait a pour conséquence que parmi ces conditions il ne peut s'en présenter aucunes susceptibles d'être déterminées arbitrairement en chaque point le long d'une ligne. Pour le but actuellement envisagé, il semble donc plus approprié de choisir, non un exemple tendant à ces circonstances, mais beaucoup plutôt un exemple où la fonction de la variable complexe dépend d'une fonction arbitraire.

Pour faire saisir la question d'une manière nette et claire, nous allons présenter cet exemple sous la forme géométrique dont on a fait usage à la fin du § XIX. Il s'agit alors dans cet exemple

[m] Par dépendance exprimable par des opérations sur les grandeurs, nous entendons toute dépendance régie par un nombre fini ou infini des quatre opérations de calcul les plus simples, addition et soustraction, multiplication et division. L'expression *opérations sur les grandeurs* (par opposition à *opérations sur les nombres*) indique que dans de telles opérations de calcul la commensurabilité des grandeurs ne joue aucun rôle. (Riemann)

de rechercher la possibilité d'opérer une représentation connexe et semblable en ses plus petites parties d'une surface donnée, représentation dont la forme est donnée ; nous entendons, en parlant ainsi, que l'on donne la courbe du lieu géométrique de chaque point d'encadrement de la représentation, la même courbe pour tous ces points, et que l'on donne en outre le sens de la direction de l'encadrement ainsi que les points de ramification. Nous nous en tiendrons à la solution de ce problème au cas où, à chaque point d'une surface, correspond un point unique de l'autre, et où les surfaces sont simplement connexes, cas où la solution est renfermée dans le théorème suivant :

Deux surfaces planes, simplement connexes données, peuvent toujours être rapportées l'une à l'autre, de telle sorte qu'à chaque point de l'une corresponde un point unique de l'autre dont la position varie d'une manière continue avec celle du premier, et de telle sorte que les plus petites parties correspondantes des surfaces soient semblables ; de plus, pour UN *point de l'intérieur et pour* UN *point de l'encadrement de la surface, les points correspondants de l'autre surface peuvent être donnés quelconques ; mais alors la correspondance est déterminée par cela même pour tous les points.*

Lorsque deux surfaces T et R sont rapportées sur une troisième S, de telle sorte qu'entre les plus petites parties correspondantes de T et S et de R et S il y ait similitude, par cela même il existe une correspondance entre les surfaces T et R, où le même fait a évidemment lieu.

Le problème de la représentation de deux surfaces quelconques l'une sur l'autre, de telle sorte que la similitude soit conservée dans leurs plus petites parties, est donc ramené à celui-ci : représenter chaque surface quelconque sur *une* même surface déterminée de sorte qu'il y ait similitude en les plus petites parties.

Ainsi, pour démontrer notre théorème, si nous décrivons sur le plan B, du point $w = 0$ comme centre, un cercle K de rayon 1, il suffira seulement de démontrer ceci : une surface simplement connexe quelconque T recouvrant A, peut être toujours représentée sur le cercle K d'une manière connexe, la similitude étant conservée dans les plus petites parties, et cela d'une façon unique, en opérant de telle sorte qu'au centre du cercle corresponde un point donné quelconque O_0 à l'intérieur de T, et à un point donné quelconque de la circonférence un point donné quelconque O' sur l'encadrement de T.

Distinguons les désignations déterminées de la grandeur z et du point Q relatives aux points O_0 et O', en leur attribuant l'indice ou l'accent correspondant, et décrivons sur T du point O_0 comme centre un cercle quelconque Θ, qui ne s'étend pas jusqu'à l'encadrement de T et ne renferme aucun point de ramification. Introduisons des coordonnées polaires en posant $z - z_0 = re^{\varphi i}$; l'on aura, pour la fonction $\log(z - z_0)$,

$$\log(z - z_0) = \log r + \varphi i.$$

La partie réelle varie donc dans tout le cercle d'une manière continue, hormis au point O_0, où elle devient infinie. Quant à la partie imaginaire, lorsque parmi les valeurs possibles de φ l'on choisit partout la valeur positive la plus petite, elle prend le long du rayon où $z - z_0$ prend des valeurs réelles positives, d'un côté la valeur 0, de l'autre 2π ; mais d'ailleurs en tous les autres points elle varie d'une manière continue. Ce rayon peut être évidemment remplacé par une ligne quelconque l menée du centre à la circonférence, de telle sorte que la fonction $\log(z - z_0)$, lorsque le point O

traverse cette ligne du bord négatif (c'est-à-dire où ρ est négatif, § VIII) au bord positif, éprouve une brusque diminution de valeur $2\pi i$; mais d'ailleurs elle varie avec la position de O d'une manière continue sur le cercle Θ tout entier.

Prenons maintenant la fonction complexe $\alpha + \beta i$ de x, y égale dans le cercle Θ à $\log(z - z_0)$; mais, en dehors du cercle, la ligne l étant prolongée d'une manière quelconque jusqu'au contour de T, choisissons-la comme il suit :

1° Sur la circonférence de Θ, égale à $\log(z - z_0)$, sur le contour de T, imaginaire pure ;

2° À la traversée du bord négatif au bord positif de la ligne l, elle devra varier de $-2\pi i$; mais, dans tout autre cas, pour une variation infiniment petite du lieu, elle devra varier d'une grandeur infiniment petite de même ordre ; ces fixations 1° et 2° sont toujours possibles.

Ceci posé, l'intégrale
$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT,$$
relativement à Θ, a une valeur nulle ; relativement à toute la partie restante de la surface T, elle a une valeur finie. Par conséquent, $\alpha + \beta i$ par l'adjonction d'une fonction continue de x, y, purement imaginaire sur le contour et déterminée à un reste près constant purement imaginaire, peut être transformée en une fonction $t = m + ni$ de z. La partie réelle m de cette fonction sera égale à 0 sur le contour, à $-\infty$ au point O_0, et partout ailleurs sur T elle variera d'une manière continue.

Pour chaque valeur a de m située entre 0 et $-\infty$, la surface T est donc partagée par une ligne où $m = a$, d'une part, en parties où $m < a$ qui renferment à leur intérieur le point O_0 et, d'autre part, en parties où $m > a$ dont l'encadrement est formé en partie par le contour de T, en partie par des lignes où $m = a$.

L'ordre de connexion de la surface T ou bien ne sera pas diminué par cette décomposition, ou bien le sera ; comme cet ordre est égal à -1, la surface sera donc décomposée soit en deux morceaux d'ordres de connexion 0 et -1, soit en plus de deux morceaux. Mais cette dernière circonstance est impossible, car, dans un de ces morceaux au moins, la partie réelle m devrait être partout finie et continue et constante en toutes les parties de l'encadrement, et, par suite, devrait avoir soit une valeur constante en une portion de surface, soit une valeur maxima ou bien minima en un endroit quelconque, c'est-à-dire en un point ou le long d'une ligne, ce qui est contraire au § XI, proposition III. Les points où m est constant forment, par conséquent, des lignes partout simples, qui se ferment et qui forment chacune l'encadrement d'un morceau renfermant le point O_0, et où m décroît nécessairement vers l'intérieur. Il s'ensuit que pour un circuit positif (où s croît, d'après le § VIII) la grandeur n, tant qu'elle est continue, est toujours croissante, et, par conséquent, puisqu'elle éprouve une variation brusque de -2π [n] seulement quand on passe du bord négatif au bord positif de la ligne l, elle sera alors égale *une fois* à chaque valeur comprise entre 0 et 2π, abstraction faite

[n]Puisque la ligne l mène d'un point intérieur du morceau à un point extérieur, il faut, lorsqu'elle en coupe plusieurs fois l'encadrement, qu'elle traverse de l'intérieur à l'extérieur une fois de plus que de l'extérieur à l'intérieur ; la somme des variations brusques de n pendant un circuit positif est donc toujours égal à -2π. (Riemann.)

d'un multiple de 2π.

Posons maintenant $e^t = w$, e^m et n seront alors les coordonnées polaires du point Q relativement au centre du cercle K pris comme origine.

Mais l'ensemble des points Q forme évidemment une surface S recouvrant K partout simplement. Le point Q_0 de celle-ci tombe au centre du cercle, mais le point Q' peut, par l'entremise de la constante dont on peut encore disposer dans la fonction n, être porté en un point donné quelconque de la circonférence.

C. Q. F. D.

Au cas où le point O_0 est un point de ramification d'ordre $(n-1)$, l'on arrive au but cherché par des conclusions tout analogues en remplaçant seulement $\log(z - z_0)$ par $\frac{1}{n}\log(z - z_0)$, et le traitement ultérieur serait aisément complété à l'aide du § XIV.

§ XXII.

L'extension complète des recherches du paragraphe précédent au cas plus général où, à un point unique d'une surface, correspondent plusieurs points de l'autre et où l'on ne présuppose pas que les surfaces aient une connexion simple, sera laissée de côté ici, d'autant plus qu'au point de vue géométrique toute notre étude eût pu être présentée sous forme plus générale. La restriction de nos considérations à des surfaces planes, unies sauf exception en des points isolés, n'est pas essentielle. Bien plus, le problème de la représentation d'une surface donnée quelconque sur une autre donnée quelconque, en conservant la similitude dans les plus petites parties, peut être traité d'une manière tout analogue. Nous nous contenterons, à ce sujet, de renvoyer le lecteur aux deux Mémoires de Gauss, celui cité au § III et celui intitulé *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (article 13).

Table des matières[o]

[o]Cette Table, résumé du contenu du Mémoire, a été dressée presque entièrement par Riemann lui-même.

Notes.

[1] (p. 1). On a trouvé dans les manuscrits de Riemann l'addition suivante, qui se rapporte à ce passage :
"Par l'expression : la grandeur w varie d'une manière continue avec z entre les limites $z = a, z = b$, nous entendons ceci : Dans cet intervalle, à toute variation infiniment petite de z correspond une variation infiniment petite de w ; ou encore, en s'exprimant d'une manière plus détaillée : pour une grandeur donnée quelconque ϵ, l'on peut toujours déterminer la grandeur α, de telle sorte que dans un intervalle relatif à z, plus petit que α, la différence entre deux valeurs de w ne soit jamais plus grande que ϵ. La continuité d'une fonction, même lorsque ce point n'est pas expressément énoncé, entraîne d'après cela ce fait : la fonction est toujours finie."

[2] (p. 7). S'il n'y a pas une inadvertance, en cet endroit, c'est que Riemann aura fait usage de l'expression *de gauche à droite* dans une signification contraire à celle employée d'habitude, où le sens d'un circuit est défini par la manière dont le verrait décrit un observateur placé au centre et suivant des yeux le point décrivant le circuit.

[3] (p. 20). L'exemple suivant peut servir à l'éclaircissement de ce passage, exprimé d'une manière un peu obscure.

Dans la figure ci-dessous T est une surface triplement connexe. Soit (ab) la première section transverse q_1, et (cd) la deuxième q_2.

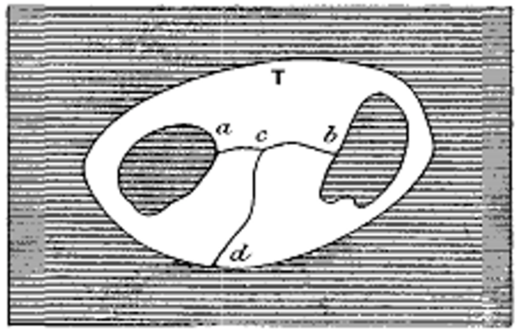

Fig. 1.

Nous avons ici à distinguer trois différences de valeurs distinctes constantes de la fonction

$$Z = \int_{O_0}^{O} \left(Y \frac{\partial x}{\partial s} - X \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds.$$

Désignons ces différences relativement à la partie (ac) par A, à la partie (cb) par B et à la partie (cd) par C. Si l'on décrit d'abord (cd), C pourra avoir ici une valeur quelconque ; si l'on décrit ensuite alors (bc), B de même peut avoir ici encore une valeur quelconque. Mais pour (ac), d'après cela, la différence de valeurs constante A de la fonction Z est complètement déterminée ; ce sera (les signes étant déterminés comme il convient) $A = B + C$. En général, on conclut d'une manière analogue le résultat suivant : Chaque fois que, pendant le cheminement en sens rétrograde sur le système des sections transverses, l'on arrive à un point où une section transverse déjà décrite prend son origine, la variation qu'éprouve la différence de valeurs constante de la fonction est alors complètement déterminée.

[4] (p. 23). L'on obtient la formule

$$\int \frac{\partial u}{\partial \rho} ds = 0$$

si, dans l'intégrale

$$\int \left(u \frac{\partial u'}{\partial \rho} - u' \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) ds,$$

on prend $u' = 1$, car alors, prise relativement à l'encadrement d'une portion de surface où u satisfait aux hypothèses du § X, elle s'évanouit.

[5] (p. 36). La méthode de démonstration du § XVI a été plus tard désignée par Riemann (*Théorie des fonctions abéliennes,* § III, IV des Préliminaires) sous le nom de *Principe de Dirichlet* (d'après les Leçons de Dirichlet). Gauss aussi a appliqué de pareilles conclusions (Théorèmes généraux relatifs aux forces d'attraction et de répulsion qui s'exercent en raison inverse du carré de la distance, *Œuvres*, t. V). Dans ces derniers temps la validité de ce mode de déduction a été combattue ; en particulier et avec raison, l'évidence de l'existence d'un minimum pour l'intégrale a été niée. Mais l'exactitude du théorème lui-même, pour la démonstration du quel cette méthode doit servir, théorème qui prête aux travaux de Riemann sur la théorie des fonctions leur caractère particulièrement simple et général, a été démontrée par de nouvelles recherches reposant sur d'autres principes. [Voir en particulier les travaux sur ces sujets de II.-A. Schwarz (*Monatsberichte der*

Berliner Akad., oct. 1870. - *Journal de Crelle*, tome 74 ; et *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, et ceux de C. Neumann (*Recherches sur le potentiel logarithmique et le potentiel de Newton* ; Leipzig, 1877. *Leçons sur la Théorie riemannienne des Intégrales abéliennes*, 2° édit. ; Leipzig, 1884.)]

[6] (p. 40). Les remarques suivantes sont tirées, presque mot pour mot, des brouillons, esquisses du § XVII, trouvés dans les papiers de Riemann et écrits de sa main ; ils serviront en partie à éclaircir, en partie à compléter cette recherche.

Des valeurs P_1 et P_2 l'une peut être aussi prise partout $= 0$, lorsque seulement T' a une étendue finie, et de cette façon notre démonstration sera applicable au cas où la discontinuité se présenterait le long d'une partie de l'encadrement ou aurait lieu par l'effet d'une modification des valeurs de y le long d'une ligne à l'intérieur. On n'a pas attribué directement à m la valeur la plus petite de $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$ dans l'intervalle assigné de ρ_1 et ρ_2. afin que la démonstration soit aussi applicable au cas où γ admettrait une infinité de maxima et minima, par exemple au cas où γ aurait dans le voisinage de la ligne de discontinuité la valeur $\sin \dfrac{1}{p}$.

D'une manière pareille l'on peut faire voir que L croît au delà de toutes limites, lorsque λ tend indéfiniment vers une fonction γ qui, au point O', possède une discontinuité telle qu'en une partie d'une circonférence décrite du point O' comme centre avec un rayon $\rho, \rho\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, \rho\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}$ tendraient pour ρ infiniment petit vers une limite finie ou seraient infinis.

Dans ce cas, l'on peut assigner à ρ une valeur R telle qu'au-dessous de cette valeur l'on n'ait jamais

$$\rho^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right] d\varphi = 0$$

Désignons la plus petite valeur de cette grandeur dans cet intervalle par a, alors la contribution apportée à L par une couronne circulaire comprise entre $\rho = R$ et $\rho = r$ (où $r < R$) sera

$$\int_r^R d\rho \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2\right] \rho d\rho > \int_r^R \frac{a}{\rho} d\rho > a(\log R - \log r),$$

et, par suite, lorsque l'on prend $r = Re^{-\dfrac{C}{a}}$, elle sera $> C$.

Par conséquent alors, si l'on choisit pour encadrement de T' un cercle où $\rho < Re^{-\dfrac{C}{a}}$, la partie de L qui provient du reste de T et, par suite, L lui-même, sera $> C$, quel que soit λ à l'intérieur du cercle.

[Cette étude se rapporte, il est vrai, d'abord à un point qui n'est ni point de ramification ni point de l'encadrement ; mais elle n'éprouve de modification essentielle que pour un point de l'encadrement où la surface au rait un point saillant, c'est-à-dire où l'encadrement aurait un point de rebroussement. Mais, dans ce dernier cas aussi, la détermination d'un ordre de discontinuité, auquel ne peut atteindre λ, repose sur les mêmes principes ; nous nous contentons donc de l'indiquer.]

Lorsque la portion de surface où λ et γ sont différentes devient infiniment petite, T' lui-même, dans le cas d'une ligne de discontinuité, la partie restante de T, dans le cas d'un point de discontinuité, fourniront donc à L une contribution infinie, et notre affirmation est ainsi justifiée lorsque la discontinuité atteint l'ordre supposé. Sa légitimité en ces circonstances nous suffit ; en effet, pour des discontinuités d'ordre inférieur elle n'aurait plus lieu, comme, par exemple, lorsque pour la distance ρ entre le point de discontinuité et le point O, l'on a

$$\gamma = \left(\log\frac{1}{\rho}\right)^{\mu} \qquad \text{et} \mu < \frac{1}{2}.$$

Nous ajouterons donc la restriction suivante à la première partie du théorème du § XVI : Ou bien l'intégrale Ω, où l'on a posé $w = \alpha + \lambda$, possède un minimum pour une des fonctions λ, ou bien, pendant que Ω tend vers sa plus petite valeur limite, n'admet une discontinuité qu'en des points isolés et telle que l'ordre de $\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \frac{\partial\lambda}{\partial y}$, lorsqu'ils sont infinis, n'atteigne pas l'unité.

Une discontinuité de la fonction ω, qui peut être détruite par modifica tion de valeur en un point, doit se présenter, par exemple, lorsqu'on suppose qu'il existe en un endroit quelconque sur la surface un trou, c'est-à-dire un point d'encadrement isolé où l'on devrait donc supposer $\lambda = 0$.

[7] (p. 48). Des recherches plus modernes ont fait voir que la puissance des expressions analytiques s'exerce même bien au delà de ce que l'on sup posait d'après ces mots de Riemann. À ce sujet, Seidel le premier a donné de remarquables exemples (*Journal de Crelle*, t. 73, p. 279) ; ainsi, il a indiqué des expressions analytiques qui dépendent de z et qui dans un cercle sont égales à une fonction quelconque de z, et *en dehors* du cercle sont égales à zéro ; ou encore qui partout, à l'exception du contour d'un cercle, sont nulles et qui sur le contour sont égales à 1. Si l'on admet les intégrales définies, l'on peut aller bien plus loin encore et, par exemple, représenter x ou y, ou $\sqrt{x^2 + y^2}$, comme fonction de $z = x + yi$.

Weierstrass [*Sur la Théorie des fonctions (Monatsberichte d. Berliner Akad.*, août 1880) et aussi dans la *Collection de Mémoires sur la théorie des fonctions* ; Berlin, 1886] a fait voir comment l'on peut trouver des séries infinies, dont les termes sont des fonctions rationnelles de z et qui, dans un nombre quelconque de domaines de la variable z différents, re présentent des fonctions différentes quelconques données de z.