Logique. — *Les relations d'incertitude de Heisenberg et la logique.*
Note [1] de M$^{\text{elle}}$ **Paulette Février**, présentée par M. Louis de Broglie.

Les *relations d'incertitude* d'Heisenberg peuvent être évidemment considérées au point de vue logique comme des conséquences de la mécanique ondulatoire, qui apparaît comme une théorie mathématique construite dans la logique classique.

Le but de cette Note est de montrer qu'on peut les considérer comme des lois fondamentales sur les mesures physiques à partir desquelles il sera possible de constituer une logique qui se trouvera adaptée aux propriétés des objets microscopiques, et de telle manière que la théorie des quanta apparaisse comme une théorie mathématique dans cette logique. Cette façon de procéder semble légitime si l'on admet avec M. Gonseth [2] que la logique est avant tout la science des propriétés fondamentales des objets, une *physique de l'objet quelconque.*

Soit d'une part un système de principes présupposé en vue d'une recherche expérientielle, et d'autre part un ensemble de propositions énoncées sous la condition de cette axiomatique ; elles peuvent être par rapport aux principes soit vraies, nécessairement ou de façon contingente (V), soit fausses nécessairement (A), soit fausses de manière contingente, erronées (F) ; ces deux dernières valeurs constituent le faux de la logique classique.

Les *relations d'incertitude* d'Heisenberg étant considérées comme faisant partie de l'axiomatique ci-dessus définie, nous sommes amenée à distinguer une valeur A de la façon suivante :

Soient a_i et b_i les propositions, concernant un corpuscule, définies par

$a_i \equiv$ la coordonnée q_i a la valeur q_{0i} ;

$b_i \equiv$ la composante p_i de la quantité de mouvement a la valeur p_{0i} ;

les propositions telles que $a_i \ \& \ a_k, b_i \ \& \ b_k, a_i \ \& \ b_k (i \neq k)$ obéissent anx lois habituelles du produit logique. Mais il n'en est pas de même pour la proposition $a_i \ \& \ b_i$. En effet, bien qu'indépendamment a_i ou b_i puissent être vraies, leur produit ne peut être vrai (c'est-à-dire leur vérité simultanée), en vertu des relations d'incertitude. Ceci introduit entre des couples de propositions que nous appellerons *propositions conjuguées* des liaisons d'un type que l'on ne rencontre pas en logique classique, et qui se traduisent par des lois spéciales pour le produit de ces couples de propositions.

Il nous faut maintenant préciser quelle est la valeur logique des propositions telles que $a_i \ \& \ b_i$. Considérons des propositions liées à des grandeurs physiques quantifiées, c'est-à-dire ne prenant que certaines valeurs, comme c'est le cas pour l'énergie ; par exemple, la proposition c définie par

$c \equiv$ l'énergie E a la valeur E_0.

Si l'on effectue une mesure, et que l'on trouve pour E la valeur E_0, la proposition c est vraie. Dans le cas contraire, c est non vraie ; mais il nous paraît essentiel de distinguer deux éventualités suivant

[1]Séance du 8 février 1937.
Transcription en Latex, Denise Vella-Chemla, janvier 2025
[2]*Les Mathématiques et la Réalité*, Paris, 1936, p. 155.

que E_0 appartient ou non à l'ensemble des valeurs possibles pour E. Il nous semble naturel de dire que dans le premier cas la proposition c prend la valeur F, et dans le second la valeur A ; F apparaît comme du possible non réalisé, A comme du non réalisable.

En logique classique, le produit est défini par les conditions qu'il est vrai si les deux propositions sont vraies, faux si l'une des deux est fausse. Dans le cas de propositions non conjuguées, il devra donc être A si l'une des propositions est A ; et dans le cas de propositions conjuguées, si l'une est V ou F, c'est que l'on a effectué une mesure, et la valeur de l'autre n'est pas déterminée, la seconde mesure n'ayant pu être faite ; ceci conduit à ce que le produit soit A. Enfin, si l'une est A, le produit est A ; ces conditions ne sont satisfaites que si le produit de deux propositions conjuguées est toujours A. D'où les deux matrices de l'opération produit :

Propositions non conjuguées.

&	V	F	A
V	V	F	A
F	F	F	A
A	A	A	A

(A prépondérant sur F, qui est prépondérant sur V.)

Propositions conjuguées.

&	V	F	A
V	A	A	A
F	A	A	A
A	A	A	A

(A absolument prépondérant.)

Ainsi nous sommes amenée à une logique à trois valeurs, dont le produit obéit à des règles spéciales, les couples de propositions devant être séparés en propositions conjuguées et non conjuguées.

Logique. — *Sur une forme générale de la définition d'une logique.*

Note [3] de M^elle^ **Paulette Février**, présentée par M. Louis de Broglie.

Nous avons [4] exposé le point de départ, fourni par les relations d'incertitude d'Heisenberg, d'une logique nouvelle susceptible d'applications en théorie des quanta, et déterminé en particulier les règles spéciales du produit dans cette logique. Avant de poursuivre la construction du système, il nous faut préciser ce que nous entendons formellement par logique.

Un ensemble d'éléments abstraits $\mathscr{E}$ sera dit un ensemble de propositions : 1° s'il existe un opérateur Vl, appelé valeur logique, qui, à tout élément de l'ensemble $\mathscr{E}$ fait correspondre un élément de $\mathscr{F}$, ensemble des valeurs logiques ayant au moins deux éléments V, F ; 2° s'il existe au moins une opération binaire symétrique R qui transforme toute paire a, b d'éléments de $\mathscr{E}$ en un élément de $\mathscr{E}$, la valeur logique de l'élément ainsi obtenu étant une fonction des valeurs logiques des éléments de la paire, cette fonction peut alors être écrite sous la forme d'une opération binaire Ω_R, dans

[3] Séance du 8 mars 1937.
[4] *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 481.

l'ensemble des valeurs logiques, associée de l'opération R. On a ainsi :

$$Vl(a\mathrm{R}b) = (Vla)\Omega_{\mathrm{R}}(Vlb).$$

Une fonction étant définie par l'ensemble de ses valeurs, dans le cas où l'ensemble des valeurs logiques est fini, l'opération sera définie par une matrice finie.

Une logique sera un système constitué par : 1° un ensemble de propositions ; 2° un ensemble d'opérateurs ; 3° un ensemble d'opérations binaires. En effet, dans une logique quelconque, il existe toujours au moins trois opérations binaires : 1° l'identité logique $a \equiv b$; 2° le produit logique $a \,\&\, b$ (conjonction *et*) ; 3° la somme logique $a + b$ (conjonction *ou*). La valence d'une logique est la puissance de l'ensemble des valeurs logiques ; nous appellerons genre d'une logique le nombre des matrices nécessaires pour définir l'opération produit, la matrice à employer dépendant de la paire de propositions considérée ; (dans notre logique, le genre est deux : propositions composables et non composables ; dans les autres logiques, le genre est un).

Nous définirons un semi-anneau comme un système d'éléments possédant deux opérations de composition, addition et multiplication, l'addition possédant toutes les propriétés de l'addition dans un anneau, sauf l'inversion, remplacée par une condition plus faible : l'équation $x + a = b$ a au moins une solution $x = b + (-a)$. Si, de plus, $a.a = a$, le semi-anneau sera dit booléien. L'identité logique $a \equiv b$ ayant la valeur logique V si a et b ont la même valeur, F si a et b ont des valeurs différentes, on peut toujours trouver deux opérations logiques, addition et produit, telles que par rapport à l'identité le système constitue un semi-anneau booléien, l'addition n'étant V que si une des deux propositions est V, et le produit V que si les deux sont V. Le système ne peut être un anneau booléien que si la logique est divalente.

Dans notre logique (trivalente, de genre deux) nous définirons la somme logique avec exclusion $a \vee b$ par : V si l'une des deux propositions est V ; A si les deux ont la même valeur ; F dans les autres cas. Cette opération n'est pas acceptable comme addition, ne satisfaisant pas à la condition d'inversion. Posons

$$(Vla = \alpha \vee \beta) =_d (Vla = \alpha) \vee (Vla = \beta), \quad \textit{et} \quad f = \mathrm{F} \text{ v } \mathrm{A}.$$

Il existe une matrice et une seule $|+|$ acceptable comme addition, telle qu'elle soit commutative, associative, satisfasse à la condition d'inversion définie plus haut, à $a + \mathrm{O} = a$, et que si a et b sont F, $a + b$ est A. La proposition O est définie par $Vl\mathrm{O} = A$; la proposition e, unité, est définie par $Vle = V$. D'où les différentes matrices :

Identité								Somme logique											
forte.				faible.				avec exclusion.								sans exclusion.			
$\equiv$	V	F	A	$\cong$	V	F	A	v	V	F	A	$+$	V	F	A	**V**	V	F	A
V	V	F	F	V	V	F	F	V	A	V	V	V	f	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	A	F	F	V	A	F	F	V	F	F
A	F	F	V	A	F	V	V	A	V	F	A	A	V	F	A	A	V	F	A

Le semi-anneau est commutatif, associatif, mais le produit n'est pas distributif par rapport à l'addition. L'identité faible $\cong$, dans laquelle F et A sont considérés comme équivalents, permet de ramener cette logique à un anneau booléien qui serait isomorphe à l'anneau de la logique classique si toutes les propositions étaient composables.