Transcription de l'intervention d'Olivia Caramello le 7 avril à l'Université de Marseille, au sujet des Topos

[...]

Grothendieck émet des hypothèses, il fait une analyse très rigoureuse et lucide dans son style caractéristique. On va lire ce qu'il écrit et on va y réfléchir. Ensuite, je vous donnerai quelques exemples de pistes qui s'ouvrent naturellement en relation avec l'usage des topos comme espaces unifiants.

Voilà, ça c'est le plan de l'exposé de ce matin. On va commencer par aborder cette dimension unificatrice et multiforme du concept des topos. La meilleure introduction à ça, c'est une citation assez frappante de Grothendieck lui-même sur la nature unifiante des topos.

Grothendieck écrit :

> "C'est le thème du topos qui est celui où cette rivière profonde où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures discontinues ou discrètes". Il ajoute : "Il est ce que j'ai conçu de plus vaste pour saisir avec finesse par un même langage riche en résonances géométriques, une essence commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre, du vaste univers des choses mathématiques".

Donc, c'est très dense, c'est très riche. Ici, il y a plusieurs choses à dire. D'abord, dans la première partie de la citation, vous voyez que c'est la possibilité de construire des topos à partir de contextes mathématiques les plus divers qui sont mis en évidence. C'est-à-dire qu'on peut construire des topos dans des situations géométriques, algébriques, logiques, arithmétiques, de théorie des catégories.

On peut construire des topos à partir de structures qui relèvent du continu ou bien on peut aussi construire des topos à partir de structures combinatoires ou discrètes. Et en fait, ce qui est fondamental ici, c'est qu'il s'agit quand même toujours du même type d'objet. C'est-à-dire qu'on peut construire le même type d'objet à partir de ces situations différentes.

Et en plus, on peut le faire, comme il est précisé dans la deuxième partie de la citation, on peut le faire d'une façon très profonde, parce que vous voyez ici, Grothendieck parle d'essence. Donc il dit que les topos seraient susceptibles de capturer une essence des situations. C'est-à-dire que cette manière de construire des topos à partir de situations les plus diverses peut être faite d'une façon suffisamment subtile pour extraire quelque chose d'essentiel de cette situation-là.

Bien sûr, il n'y a pas une manière d'associer un topos à une situation donnée, il y en a plusieurs, mais ce que suggère ici Grothendieck, c'est qu'il est généralement possible de construire des topos à partir de situations concrètes données d'une façon très profonde, de façon à extraire quelque chose d'essentiel de cette situation. Et donc le mot essence ici peut s'interpréter de plusieurs façons, mais on pourrait dire en première approximation que le topos contient le contenu sémantique

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, avril 2026 (utilisation de l'outil de transcription automatique Turboscribe, corrigé.

de la situation. C'est-à-dire que l'idée serait d'extraire un sens, un sens du contexte particulier donné qui ne dépendrait pas de la contingence dans laquelle ce contexte se manifeste à nous, mais qui dépendrait seulement de quelque chose d'essentiel, vous voyez, d'intrinsèque à la chose en elle-même. C'est un peu ça l'idée. Bon, après, on verra aussi à travers des exemples comment ça marche.

Mais en tout cas, vous pouvez interpréter ce mot essence dans un sens plus précis comme contenu sémantique. Donc après, si vous voulez avoir vraiment une formalisation de cette intuition, la théorie qui la donne, c'est la théorie des topos classifiants. C'est ça qui permet vraiment de préciser ce qu'on entend par essence, au moins dans un domaine très large comme celui des théories mathématiques du premier ordre écrites sous forme géométrique.

Ce sont les théories qui admettent des topos classifiants. Mais on y reviendra. Donc, j'ai dit que les topos en fait sont des objets multiformes.

Qu'est-ce que j'entends par ça ? J'entends qu'un topos peut être regardé d'une pluralité de façons différentes. Donc, on peut regarder un topos comme un espace. Déjà, Frédéric [1], dans son introduction, vous a donné un aperçu de ça.

Ca, c'est la perspective originale sur les topos. Donc, les topos ont été introduits par Grothendieck comme des espaces généralisés. C'est-à-dire, Grothendieck s'était aperçu que pour les besoins de la géométrie algébrique, il fallait dépasser la notion classique d'espace topologique, notamment pour définir de nouvelles théories homologiques.

On avait besoin de définir de nouvelles théories homologiques qui, on pouvait le montrer, ne pouvaient pas être définies à partir d'espaces topologiques au sens ordinaire. Donc, il fallait élargir la notion d'espace pour permettre notamment ça. Et bien sûr, ça a permis beaucoup plus que ça.

Mais ça, c'était la motivation technique originelle. Et comment ça s'est fait, cette métamorphose de la notion d'espace ? Ca s'est fait par la considération de tous les faisceaux d'ensembles qu'on pouvait définir sur l'espace. Donc, l'idée a été d'étudier un espace topologique X par le biais de la catégorie des faisceaux d'ensembles sur X, c'est-à-dire le topos associé à X. Et donc, c'est une idée très profonde et efficace parce que, comme Grothendieck l'avait déjà montré dans SGA4, on peut comprendre beaucoup de la géométrie de la topologie d'un espace X à travers l'étude d'invariants catégoriques qui vivent au niveau du topos correspondant, donc, des propriétés invariantes de la catégorie des faisceaux sur X. Et comme Frédéric l'a rappelé, en fait, on n'a pas vraiment de perte d'informations quand on passe d'un espace au topos correspondant, au moins pour une large classe d'espaces qui sont ceux principalement utilisés en analyse fonctionnelle et en géométrie algébrique, c'est-à-dire les espaces topologiques sobres. Donc, en fait, vous pouvez, si vous avez un tel espace, vous pouvez le reconstruire à partir du topos correspondant à un homéomorphisme près. Donc, ça veut dire que vous n'avez pas de perte d'informations en remplaçant l'espace par le topos associé.

Alors voilà, ça, c'est la première perspective et j'en dirai un peu plus ensuite. Une autre perspective fondamentale sur la notion de topos, c'est une perspective qui a été particulièrement développée par l'école de Lawvere à partir des années 70. Donc, c'est la perspective des topos comme des

1. Frédéric Jaëck.

univers mathématiques dotés de leur propre logique interne, dont une grande partie est codée par un objet particulier du topos qui est ce qu'on appelle son classificateur des sous-objets, dénoté traditionnellement par la lettre oméga. Donc, cet objet-là, en fait, code une grande partie de la logique interne du topos vu comme univers mathématique. Pourquoi Lawvere s'intéressait-il à ça ? Lawvere s'y intéressait parce qu'il s'était posé la question de développer la logique dans un cadre catégorique, et donc, en particulier, à la question de définir une notion de modèle d'une théorie mathématique, notamment d'une théorie du premier ordre. Ce sont les théories qui sont étudiées par les logiciens qui font de la théorie des modèles. Donc, lui, il voulait développer une théorie des modèles dans un cadre catégorique.

Alors, bien évidemment, ce n'est pas possible de le faire à l'intérieur d'une catégorie quelconque. Donc, il faut que cette catégorie ait des propriétés structurelles fondamentales pour que ce soit possible de bien définir une sémantique, donc une notion de structure, de modèle et tout ça. Et les topos fournissent, ont automatiquement toute la structure qu'il faut pour faire ça.

Donc, ils peuvent servir d'espace, d'univers dans lesquels on peut interpréter toutes sortes de constructions mathématiques. Donc, comme on est habitué à faire des mathématiques dans le cadre ensembliste des ensembles, on peut à peu près faire la même chose à l'intérieur d'un topos quelconque. En fait, la catégorie des ensembles et des applications entre ensembles est un cas particulier de topos.

C'est un topos et c'est un topos particulier, mais donc à l'intérieur de ce topos, on est habitué à faire toutes sortes de constructions. Par exemple, prendre des produits cartésiens, prendre des réunions disjointes, construire des quotients. Alors tout ça, vous pouvez le reproduire dans un topos quelconque.

Et il y a cependant des différences essentielles entre le topos particulier des ensembles et un topos quelconque. C'est que la logique d'un topos quelconque, en général, n'est pas classique, n'est pas une logique qui se réduit à deux valeurs de vérité comme le vrai et le faux, qui sont un peu les valeurs de vérité qu'on retrouve quand on travaille avec les ensembles. Ca, c'est un aspect en fait très important des topos, en vue aussi des applications aux sciences sociales, dans le domaine juridique, disons, dans toutes les situations où on a besoin d'une articulation non-triviale entre les points de vue local et global, où on veut parler de vérité locale qui peut-être ne se recollerait pas nécessairement en une vérité globale, où on veut gérer cette stratification et cette géométrie de la vérité.

Moi, je pense qu'il y a énormément de travail à faire, en particulier dans le champ de la politique, parce que nous sommes un peu tous formatés avec cette idée de binarité. Même à l'école, on nous habitue à cette binarité, on nous décrit les tables de vérité. C'est toujours vrai ou faux.

On ne considère jamais d'autres possibilités, alors que dans la réalité, dans toute situation concrète, on ne se retrouve presque jamais avec le blanc ou le noir. On a des nuances, on a une géométrie de la vérité. Donc, ce serait très important de dépasser cette binarité qui, en fait, contraint la pensée, la déforme en vérité, et est susceptible d'engendrer des murs, des murs véritables, vraiment, au niveau social. Imaginez, par exemple, quand vous êtes obligé de voter pour un candidat politique. Le vote est quelque chose de binaire. Je vote ou je ne vote pas, je vote ou je ne vote pas pour tel candidat. Mais en vérité, si vous suivez un débat, par exemple, politique, vous n'êtes presque jamais totalement d'accord avec un candidat ou totalement d'accord avec l'autre. Vous êtes peut-être d'accord sur un point avec l'un des candidats, sur un autre point avec l'autre. Mais après, vous voyez, vous êtes réduit à faire un choix binaire qui nécessairement va déformer, dans la plupart des cas, votre pensée.

Et quand on déforme la pensée, parce que les fondements ne sont pas assez riches, on est susceptible d'engendrer des conflits. Parce que la binarité, de mon point de vue, est quelque chose d'assez dangereux dans le domaine des sciences sociales. Ca empêche aussi la construction d'un véritable consensus par étapes successives, alors que des fondements qui mettraient au centre la localité sont très prometteurs dans ce sens-là.

Je parlerai plutôt dans mon exposé de cet après-midi de ces aspects-là. Donc là, je vais vous donner des pistes plus précises et j'imagine que Frédéric Rouvière, avec ses recherches dans le domaine du droit, pourra aussi vous fournir des éclairages sur l'importance de penser en ces termes-là dans le domaine juridique. Voilà, donc ça, c'est pour vous initier à la deuxième dimension, donc la dimension des topos comme univers mathématique.

Voilà, ici, vous voyez que j'ai listé un troisième point de vue sur les topos, qui est le point de vue des topos comme espaces qui classifient des théories, qui, en fait, incarnent le contenu sémantique des théories, leur essence, d'une façon justement invariante par rapport aux différentes manières dont les théories peuvent syntactiquement, linguistiquement s'exprimer. Donc, il y a cette notion technique qu'on appelle l'équivalence de Morita. C'est une notion d'équivalence entre théories qui dit que deux théories sont Morita-équivalentes si elles ont essentiellement le même contenu sémantique, si elles ont le même topos classifiant. Donc, c'est une notion qui s'applique à des théories. Ici, je n'ai pas précisé qu'il s'agit de théories d'une forme particulière. En tout cas, leur forme est très générale : ce sont des théories du premier ordre qui doivent être axiomatisées sous une forme géométrique. Mais cette condition n'est pas très contraignante, en fait : on peut toujours géométriser une théorie du premier ordre sans modifier ses modèles ensemblistes par un procédé canonique.

Donc, en fait, vous pouvez penser ici à des théories qui, en général, appartiennent à différents secteurs de mathématiques. C'est très, très, très général. Et voilà, donc, n'importe quelle théorie de cette forme admet un topos classifiant et réciproquement, n'importe quel topos de Grothendieck peut être vu comme le classifiant d'une telle théorie, mais pas d'une seule théorie, justement, d'une multiplicité de théories qui peuvent même appartenir à des domaines différents des mathématiques.

Donc, un topos peut s'identifier comme une classe d'équivalence de Morita des théories. Voilà, on peut le penser comme ça. Et ça devient très intéressant, en fait, d'étudier les théories qui appartiennent à une classe d'équivalence de Morita donnée, parce que, justement, entre de telles théories, on peut construire des ponts. Les ponts découlent du calcul des invariants en termes de différentes théories, en termes de différents contextes, etc. Et on y reviendra.

Voilà, donc maintenant, je voudrais rentrer plus dans les détails, en relation avec chacun de ces trois points de vue. Alors, commençons par le premier, donc le point de vue des topos comme espaces généralisés. Donc, je vous ai déjà dit qu'en fait, il y a deux ingrédients-clés dans la construction des topos par Grothendieck.

Le premier élément, c'est la considération de la catégorie de tous les faisceaux d'ensembles sur un espace topologique donné et la réalisation qu'en fait, on peut comprendre beaucoup de propriétés importantes d'un espace directement. On peut les lire directement au niveau de la catégorie des faisceaux d'ensembles associés. Ca, c'est la première observation.

Et la deuxième, c'est qu'en fait, il est possible de définir les faisceaux, pas seulement sur un espace topologique, mais sur quelque chose de plus général, c'est-à-dire un site. Frédéric Jaëck l'a déjà rappelé. Donc, on peut considérer plus généralement un site, c'est-à-dire une paire qui consiste en une petite catégorie et une notion de recouvrement sur des objets de cette catégorie qu'on appelle une topologie de Grothendieck.

Et on peut définir d'une façon techniquement totalement analogue à ce qu'on fait pour les espaces topologiques, une catégorie de faisceaux sur le site. Donc ici, c'est le schéma qui résume ça, c'est-à-dire que le schéma résume comment on peut construire la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique X. On peut le faire plus généralement pour n'importe quel site et obtenir donc une catégorie que j'ai notée ici, parce qu'en anglais, faisceau, c'est *sheaf*. Donc ça, c'est un peu la notation que vous trouvez dans la littérature anglo-saxonne dans le domaine.

Donc qu'est-ce que c'est que ça ? C'est une catégorie qui contient tous les faisceaux sur le site. Alors les faisceaux, ce sont des pré-faisceaux qui satisfont des conditions de recollement et d'unicité. Donc un pré-faisceau sur une catégorie, je vais juste vous le rappeler, c'est juste un foncteur. Donc ce que c'est, c'est une catégorie. Catégorie, ça veut dire que vous avez des objets et des flèches qui peuvent se composer. Et sur cette catégorie, vous pouvez considérer des foncteurs contravariants qui vont vers les ensembles. Donc ça, c'est ce qu'on appelle un pré-faisceau. Donc un pré-faisceau, c'est quelque chose qui envoie chaque objet de la catégorie C sur un ensemble. Et à chaque flèche de C est associée une application qui va dans l'autre sens. C'est pour ça que j'ai mis "op" ici, parce que ce n'est pas un foncteur au sens covariant. Parce que l'exemple classique de faisceau, c'est quand on prend la catégorie des ouverts d'un espace topologique X. Alors, dans ce cas-là, vous voyez, les objets sont les ouverts. Et donc, l'exemple un peu classique, par excellence, de faisceau, ça consiste, par exemple, à associer à un ouvert U les applications continues vers, par exemple, $\mathbb{R}$. Vous pouvez aussi changer l'espace-cible, mais pour simplifier, prenons $\mathbb{R}$, par exemple.

Vous voyez que si vous faites ça, et si vous faites varier l'ouvert, c'est-à-dire si vous prenez une inclusion ici, vous voyez que là, vous avez une application qui va dans une application de restriction, donc qui va dans ce sens-là. Parce que si vous avez une telle application f, ce que vous pouvez faire, c'est prendre sa restriction, c'est-à-dire sa restriction à B, donc prendre la composition $f \circ I$. Voilà, et donc ça, c'est un peu l'exemple paradigmatique, non seulement de pré-faisceau, mais de faisceau. Parce que quelle est la condition de faisceau ? Donc ça, c'est ce qu'on appelle un pré-faisceau. Pour avoir un pré-faisceau, il faut juste avoir un foncteur, comme ça. Alors, quand est-ce qu'on parle de faisceau ? On parle de faisceau quand, en fait, si vous avez une situation où vous pouvez recouvrir U par des U_i, et que vous avez des, donc on va appeler ça f, et vous avez des éléments du pré-faisceau sur les U_i qui sont compatibles entre eux. Donc ici, dans le cadre topologique, qu'est-ce que ça veut dire compatibilité ? Si on note comme ça cette application de restriction, ça veut dire que f_i

restreint à cette intersection égale $f(J)$ restreint à cette intersection, pour les U_i. Donc ça, c'est la condition de compatibilité. Pour des familles d'éléments du pré-faisceau. Alors, quand est-ce qu'on dit que le pré-faisceau est un faisceau ? Quand il est toujours possible, à partir d'une telle famille d'éléments compatibles, de construire un élément global, de construire quelque chose, un f qui appartient à $f(U)$, tel que la restriction à chaque U_i donne le f_i de départ. C'est ça la condition. Et alors ici, je l'ai écrite dans le cadre topologique classique, mais il est possible d'exprimer de telles conditions de recollement dans le cadre plus général des sites. Donc voilà, on peut définir ça. Et donc on a une notion de faisceau. Voilà. Et quand on écrit ça, on entend la sous-catégorie pleine de la catégorie des pré-faisceaux sur les pré-faisceaux qui sont des faisceaux. Donc vous prenez comme objet les faisceaux et comme flèches entre eux, les transformations naturelles entre ces faisceaux vus comme des pré-faisceaux. Donc ici, on a une notion naturelle de morphisme entre pré-faisceaux et on utilise la même pour les faisceaux.

Voilà, alors pourquoi tout ça est intéressant ? Parce que vous voyez que même d'un point de vue pratique de modélisation, Oui ? Est-ce que le passage où il existe un f tel que tout son restant s'affecte ici, c'est ça qu'on appelle le recollement ? Oui, c'est ça. Oui, c'est un recollement parce que justement, vous voyez ici, concrètement, si vous voulez définir, donc regardons dans ce cadre-là. Donc les éléments de ce pré-faisceau sont des applications continues. Donc ça veut dire la chose suivante : imaginons qu'on ait des applications continues comme ça, f_i, qui vont sur les intersections. Voilà, donc ça veut dire que ce diagramme-là commute. Alors effectivement, je peux étendre, je peux les recoller ensemble, ces applications continues pour définir une application continue, f, qui est définie sur la réunion de tous les... Voilà, comment est-ce que je la définis ? Bien, je la définis en disant qu'elle doit envoyer un élément de U_i dans son image par f_i.

Et bien sûr, une telle définition est bien posée, justement parce que la famille des f_i est compatible. Si elle n'était pas compatible, je ne pourrais pas le faire. Voilà, donc c'est un procédé de recollement qui est très naturel.

Ca revient à dire, disons, qu'on peut réduire les considérations de type global à des considérations de type compatibilité locale. Donc on peut travailler localement, mais à condition de respecter les contraintes de compatibilité. Si on fait ça, ça revient à travailler globalement.

Mais en fait, ce qui est très intéressant, c'est aussi, par exemple, les situations où on ne peut pas forcément recoller, parce qu'il y a des choses qui se recollent et d'autres qui ne se recollent pas. Mais par exemple, dans de telles situations, ce que vous pouvez faire, c'est essayer de faisceautiser votre pré-faisceau. Vous pourriez avoir un pré-faisceau qui n'est pas un faisceau, mais la question se pose, est-ce qu'on pourrait peut-être construire un faisceau canoniquement associé à ce pré-faisceau ? Disons, est-ce qu'on pourrait construire le faisceau le plus proche d'un pré-faisceau donné ?

La réponse est oui, donc il y a une construction catégorique qui permet de passer de l'un à l'autre. Vous voyez, ici, on a une inclusion des faisceaux dans les pré-faisceaux. Il y a une opération qui va dans l'autre sens, un foncteur qu'on appelle le foncteur de faisceautisation qui vous permet exactement de faire ça.

Donc, imaginez les applications qui peuvent surgir de ça dans des domaines très concrets, parce qu'on est tout le temps dans ce jeu local / global. Imaginez, par exemple, les processus de production d'une entreprise. Vous avez les différentes unités, chacune travaille, mais après le travail des différentes équipes, il faut pouvoir les intégrer. Et si les différents travaux ne s'intègrent pas, il faut quand même faire en sorte qu'il y ait une cohérence, sinon il peut y avoir des problèmes. Donc, vous voyez ici, on a des mathématiques qui permettent d'écrire ce type de dynamique. Voilà, donc je ne vais pas vous embêter davantage avec la technique, mais je voulais juste vous donner quelques éléments, parce que comme ça, vous savez techniquement qu'est-ce que c'est qu'un topos dans la perspective qui a été celle de Grothendieck.

Grothendieck a défini les topos comme ça. Donc, pour lui, un topos, c'est une catégorie qui se représente de cette façon-là, c'est-à-dire une catégorie qui est équivalente à une catégorie de la forme faisceau sur un site. Donc, vous pourriez objecter, ah, mais ça, ce n'est pas une définition axiomatique.

Alors, il existe aussi une axiomatisation de la notion de topos de Grothendieck qui a été obtenue quelques années plus tard par son étudiant Jean Giraud, mais ce n'est pas qui est important, en fait. Ce qui est important, c'est que les topos, justement, ce sont des objets qu'on peut construire à partir de situations concrètes, comme des sites. Et donc, ça, c'est une définition, celle de Grothendieck, qui est constructive.

Ca vous dit qu'un topos est quelque chose qu'on peut construire à partir d'un site. Après, bien sûr, la question qui se pose naturellement est : "d'accord, mais là, on a un manque de canonicité parce qu'on pourrait avoir des sites différents qui engendrent le même topos". Oui, mais ça, ce n'est pas un aspect négatif. Tout au contraire, c'est un aspect-clé de la théorie parce qu'en fait, quand on se trouve dans de telles situations, ça veut dire justement qu'on est en présence de présentations différentes d'un même contenu. Et du coup, on peut engendrer des ponts, on peut créer des ponts en utilisant le topos commun comme une passerelle qui vous permet de traduire d'un site à l'autre. Donc, en fait, ce manque de canonicité qui, justement, on le verra plus tard, a été considéré par une certaine école, par une certaine idéologie, notamment celle de Lawvere, comme quelque chose de problématique parce qu'en fait, les personnes de cette école voulait raisonner à un seul niveau. Les personnes de cette école voulaient juste considérer les topos et donc ça les embêtait, le fait que quand même, un topos donné puisse être associé à une multitude, même à une infinité de présentations différentes. Mais en vérité, c'est là vraiment que se situe la richesse de la théorie. Mais pour l'appréhender, il faut penser à deux niveaux, c'est-à-dire qu'il faut distinguer le niveau de la contingence qui est le niveau des sites et le niveau de l'invariance qui est le niveau des topos.

Si on arrive à faire ce saut conceptuel qui, quand même (on le verra après quand on parlera de la réception des topos), n'est pas anodin, si on arrive à faire ça, là, il y a tout un champ qui s'ouvre parce qu'on commence à se servir, à exploiter cette dualité fondamentale. Donc, on commence par exemple à calculer les invariants qui vivent au niveau des topos, mais en termes des situations concrètes dans lesquelles ces invariants peuvent se manifester.

Et on verra que s'engendre ce que j'appelle une véritable morphogénèse mathématique. Je vous donnerai des exemples, mais ce sera plutôt dans l'après-midi qu'on abordera plus en détail cette dimension. En fait, est-ce que c'est important pour penser le topos, la différence des sites ? Est-ce que c'est une condition ou pas ? Pour penser le topos, est-ce que la différence des sites est une condition préalable ou pas ? Le topos, disons, une fois qu'on le construit à partir d'un site particulier, on peut commencer à l'étudier.

Mais la question, c'est quel est le but ? C'est-à-dire, le but, c'est d'étudier les sites en se servant des topos, ou le but, c'est d'étudier les topos en se servant des sites. Alors ça, étudier les topos en se servant des sites, ce n'est pas une très bonne idée. Je veux dire, c'est un peu comme étudier les groupes en utilisant des présentations.

Je veux dire, si on peut le faire de façon intrinsèque, c'est mieux. Typiquement, quand on travaille avec des topos, on ne va pas se servir de différentes présentations du topos pour travailler. Je veux dire, on va essayer de le faire de façon intrinsèque, vous voyez.

Mais ça dépend un peu des perspectives qu'on a. Parce que typiquement, ici, par exemple, quand je parle de ponts, pour moi, le but des ponts, ce n'est pas de faire de la théorie des topos, c'est plutôt d'étudier des situations concrètes en utilisant l'instrument des topos. C'est-à-dire, un pont, c'est quelque chose qui part du concret, va dans l'abstrait, mais après, il redescend dans le concret. Je ne sais pas si j'ai bien répondu.

Ah, voilà. Il y a une question de la salle virtuelle. Pourriez-vous donner un exemple naturel d'un préfaisceau qui ne soit pas un faisceau ?

Ah, eh bien oui, il y en a plein. C'est-à-dire, on peut... Après, il faut donc décrire... Ca dépend des situations. Par exemple, quelle topologie vous voulez mettre ici dans les... Disons, dans le cadre topologique usuel. Disons... Réfléchissons à l'exemple le plus simple que je pourrais donner. Par exemple, dans... Eh bien, oui, un exemple... Une chose intéressante qu'on peut décrire, c'est l'objet terminal et l'objet initial, en fait, qu'on peut avoir... (*Je vais effacer ici.*) Dans une catégorie de faisceaux sur un espace topologique. Donc, l'objet terminal, c'est... Alors, si on a X un espace topologique, donc on se met ici, dans la catégorie des faisceaux sur X. Alors ici, on a deux objets qui sont intéressants. Donc, il y a l'objet terminal. Alors, l'objet terminal, ça veut dire, dans une catégorie, c'est un objet tel que... Pour tout objet, il existe une unique flèche vers l'objet terminal. Après, on a le dual de ça, c'est la notion d'objet initial. L'objet initial, c'est un objet 0 tel que, pour chaque objet a, il existe une unique flèche de 0 vers a. Alors, pour voir, par exemple, la distinction entre faisceaux et pré-faisceaux, c'est intéressant de regarder comment se décrivent ces deux objets-là. Parce que l'objet terminal, en fait, c'est juste... Ici, vous avez votre adjonction. Donc ici, c'est le foncteur de faisceautisation. Ici, c'est l'inclusion. Donc, vous pourriez commencer à regarder qu'est-ce que c'est l'objet initial, l'objet terminal ici. Alors, l'objet terminal ici, c'est... Il associe à chaque U l'ensemble vide. Et au niveau des flèches, vous voyez, vous n'avez pas de choix. Alors ça, c'est un faisceau, celui-là. Et ça donne l'objet terminal ici. Par contre, si on regarde l'objet initial dans la catégorie des pré-faisceaux, c'est donné par quoi ? Vous associez à un U l'ensemble vide. Mais ça, ce n'est pas un faisceau, en général. Ce n'est pas un faisceau parce que, par exemple, je peux considérer la famille ouvrante vide sur cet ouvert-là. C'est une famille absolument légitime. Et bien sûr, on a la condition des faisceaux, ça nous demande que pour chaque famille d'éléments compatibles, indexés par une famille ouvrante, et donc on peut prendre, bien sûr, cette famille-là, il doit exister un unique recollement. Ca doit exister aussi pour ça. Mais si je prends le vide, ça n'existe pas. Vous voyez ? Donc ce n'est pas un faisceau. Par contre, on peut le faisceautiser. Donc, en fait, en appliquant le foncteur de faisceautisation à cet objet-là, 0, que je viens de définir, ça va donner l'objet initial, je pense que c'est l'exemple le plus simple qu'on peut fournir. Voilà.

Ok. Donc, revenons à notre introduction sur les topos. Donc ici, je tenais à vous lire une citation de Grothendieck qui clarifie un peu l'idée qu'il a. Alors ici, je crois qu'il y a est-ce que je regarde la discussion de la classe virtuelle ? Non, mais juste... merci. Ah, Ok. D'accord. Donc, voilà, je voulais vous lire cette citation très, très belle de Grothendieck qui clarifie un peu l'idée qu'il avait, la vision qu'il avait, sur la notion de topos.

Comment construire un topos à partir, par exemple, d'un espace topologique ? Parce que, vous voyez, c'est quand même très fort et très radical ce que Grothendieck a fait en introduisant les topos. Parce qu'il ne s'est pas limité à considérer les faisceaux de façon individuelle. Son idée-clé, c'était de considérer les faisceaux par famille.

Je dirais que c'est vraiment ça le point conceptuel majeur. Parce que les faisceaux, ce n'est pas lui qui les a inventés. Les faisceaux étaient déjà là. Ils avaient été inventés par Leray, Jean Leray, un grand analyste. Et les mathématiciens les utilisaient, les faisceaux, mais toujours de façon individuelle.

Le premier qui a eu cette intuition vraiment radicale de les mettre tous ensemble, c'était Grothendieck. Et lisons ce qu'il dit à ce propos. Parce qu'il s'explique magnifiquement à ce propos.

Il dit :

> "Il y a des mesures, des mètres qu'on peut utiliser pour arpenter cet espace. (*Alors ici, les faisceaux, les fonctions sont remplacées par des faisceaux. Mais vous voyez, c'est quand même assez proche dans l'esprit, parce qu'un foncteur, c'est un peu la notion de fonction dans le cadre catégorique. Voilà, donc il dit :*) Considérons cet arsenal prodigieux formé de tous ces mètres servant à l'arpenter. Vous voyez, il y a la vision de dire, pourquoi on devrait se limiter à un mètre ? Non, on va les prendre tous, vous voyez. Et il dit, nous considérons cet ensemble ou arsenal comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, à vue de nez, à savoir une structure dite de catégorie *(Oui, là, c'est juste le constat que si on prend les pré-faisceaux, ou même les faisceaux sur un espace topologique donné, il y a une notion naturelle de morphisme entre ces objets-là, qui les organise en une catégorie. Voilà, c'est une observation à vue de nez, ce n'est pas difficile. Après, il poursuit :)* C'est cette sorte de superstructure d'arpentage, très très beau ça, appelé catégorie de faisceau sur l'espace envisagé, qui sera dorénavant considéré comme incarnant ce qui est le plus essentiel à l'espace. *(Vous voyez ce terme "essence" qui revient).* Vous l'avez déjà vu, il parlait d'essence dans l'autre citation. Et ici, voilà, il dit ce qui est le plus essentiel à l'espace. C'est bien là que chose réussite, pour le bon sens mathématique, car il se trouve qu'on peut reconstituer de toute pièce un espace topologique en termes de cette catégorie de faisceaux ou de cet arsenal d'arpentages associés".

> “*(Ca, c’est l’observation dont il a été question tout à l’heure. La reconstruction, je vous ai dit que si l’espace est sobre, on peut le reconstruire à homéomorphisme près à partir de la catégorie des faisceaux associés).* Il n’en faut pas plus pour être assuré que, s’il nous convient pour une raison ou une autre, nous pouvons désormais oublier l’espace initial pour ne plus retenir et ne nous servir que de la catégorie ou de l’arsenal associé, laquelle sera considérée comme l’incarnation la plus adéquate de la structure topologique ou spatiale qu’il s’agit d’exprimer”.

Voilà. On ne pourrait pas le dire mieux. C’est d’ailleurs très poétique et très clair.

Alors, effectivement, on pourrait se dire : “mais oui, mais pourquoi se compliquer la vie en fin de compte ?”. Je veux dire, un espace topologique est quelque chose de très simple. Là, on va vraiment se compliquer la vie. Et c’est vrai qu’à première vue, on se complique la vie, mais il faut aller au-delà parce qu’en fait, c’est vrai que là, on est dans le monde de la topologie. Et on change de monde quand on considère tous les faisceaux, parce que là, on passe de la topologie à la théorie des catégories. C’est pour ça que Grothendieck parle de métamorphose de la notion d’espace, parce qu’on change vraiment de monde. Là, on était dans la topologie.

Dans la topologie, qu’est-ce que vous avez ? C’est vraiment très pauvre, parce que vous n’avez que des points et des ouverts. Honnêtement, au niveau de la structure algébrique, c’est très, très pauvre. Par contre, quand vous faites cette métamorphose, là, vous tombez sur un espace qui a une structure richissime au niveau algébrique. Ici, c’est un véritable univers mathématique. Vous pouvez faire toutes sortes d’opérations. Vous pouvez prendre ce qu’on appelle les limites, les colimites. Vous pouvez même construire des espaces de fonction. Vous avez une logique interne. Vous voyez, tout ça, on ne l’a pas ici. Donc, c’est vrai qu’on s’est compliqué la vie, mais on a aussi dévoilé tout un nouveau champ d’exploration à partir de la situation initiale. Et en fait, les mathématiciens sont intéressés notamment par le fait de pouvoir effectuer des calculs.

Pour bien effectuer les calculs, pour avoir de bons modèles computationnels, vous avez besoin de structure. Si vous n’avez pas beaucoup de structure, vous êtes un peu limité dans vos possibilités. Donc, en fait, à ce niveau-là, vous avez toute la structure et vous avez aussi les invariants qui émergent.

C’est-à-dire, les invariants, bien sûr, se manifestent aussi en fonction du noyau constitutif parce qu’on peut toujours faire ce va-et-vient entre sites et topos et, en l’occurrence, entre espaces topologiques et topos associés. On a toujours un back and forth (aller et retour) entre les deux. Mais où est-ce que les invariants vivent véritablement et où est-ce qu’on peut vraiment calculer et faire une étude systématique des invariants, c’est à ce niveau-là. Parce que là, vous n’avez plus de trou. Vous voyez, un gros problème que les mathématiciens ont dans différents domaines, c’est le manque de structure. Parce que le manque de structure, quand il y a des trous, par exemple, vous voulez construire un quotient, mais ce quotient n’est pas là, ça engendre des irrégularités, vous voyez. Donc, ça vous embête, ça vous gêne parce que certains calculs ne sont pas possibles. En fait, quand vous êtes dans un topos, tout devient possible. Vous pouvez vraiment effectuer tous les calculs.

Et donc, c’est un monde où toutes les irrégularités se déploient visiblement et vous surmontez toutes les obstructions. Le problème des obstructions est à la fois conceptuel et technique. Pensez au développement des mathématiques à partir de l'Antiquité, l'évolution des systèmes numériques.

Aujourd'hui, on a des systèmes numériques très sophistiqués. A l'origine, on a commencé à compter. Donc, on avait 1, 2, 3, etc. On n'avait même pas le zéro. À un moment, quelqu'un s'est dit, quand même, introduisons un élément qui peut-être ne sert pas à grand-chose en apparence, mais c'est quand même bien pour compléter de l'avoir. Bon, pour exprimer l'idée de vide. Mais après, une fois qu'ils ont introduit le zéro, ils se posaient la question que là, ça semblait un peu comme une droite qui partait de zéro et qui allait dans une certaine direction. Alors, on se posait la question, mais pourquoi ne pas faire une symétrie par rapport au zéro et donc s'autoriser des nombres qui aillent dans l'autre sens, des nombres négatifs. Pourquoi on est arrivé aux nombres négatifs ? Parce qu'on voulait effectuer des calculs concernant les nombres positifs. Par exemple, on voulait faire des choses du genre ça ($x + 5 = 0$). Alors, vous voyez que ça, c'est un nombre positif. Par contre, pour calculer, si vous n'avez pas les nombres négatifs, qu'est-ce que vous faites ? Vous êtes un peu embêté, parce que ce que vous devez faire, c'est peut-être que j'ai réarrangé des choses comme ça, j'ai fait comme ça. Donc d'abord, vous voyez, mais là, je dois utiliser la commutativité. Mais vous voyez, on doit utiliser un peu des raccourcis. Ce n'est pas très naturel. Alors que si vous avez les nombres négatifs, ce n'est pas grave. Là, vous tombez dans le négatif et après, vous réémergez et vous répondez. Donc, c'est pour ça qu'à un moment, on s'est dit, c'est bien d'étendre aux négatifs.

Mais après, on s'est aperçu que ça ne suffisait pas pour certaines applications, parce qu'on devait prendre des fractions, par exemple. Les fractions n'étaient pas nécessairement des nombres entiers. Et alors là, on est passé aux nombres rationnels. Et après, ça ne suffisait pas, parce que déjà, l'école pythagoricienne s'était aperçue qu'il y avait des nombres qui ne pouvaient pas être rationnels. Donc, il fallait élargir encore et encore et encore. Et donc, vous voyez qu'il y a eu cet élargissement progressif.

À partir de $\mathbb{N}$, on est arrivé à $\mathbb{Z}$. Et après, on a continué par $\mathbb{Q}$. Et après, $\mathbb{R}$. Et après, $\mathbb{C}$, les complexes. Et là, vous voyez que d'un point de vue algébrique, par exemple, les complexes ont des symétries bien meilleures que les réels. Par exemple, au niveau des complexes, vous avez le théorème fondamental de l'algèbre qui vous dit : "si vous prenez un polynôme de degré n, il va avoir exactement n racines comptées avec leur multiplicité".

Ici, on n'a pas d'analogue dans les contextes restreints. Donc, vous voyez que d'une certaine façon, on peut dire qu'on se complique la vie parce qu'on construit des systèmes de plus en plus sophistiqués. Mais en même temps, on y gagne au niveau du dépassement des trous et des obstructions.

Et donc, au niveau des possibilités du calcul et de la vision aussi. Parce que la vision, c'est toujours quelque chose de global. Si vous voulez comprendre, au sens d'avoir vraiment une vue qui vous permet de saisir tous les aspects, il faut penser grand.

Si vous vous limitez à des perspectives parcellaires, vous serez toujours limité dans votre pensée. Donc voilà, il y a cet équilibre qu'il faut toujours garder entre, disons, la concrétude qui est bien agréable pour pouvoir se représenter concrètement les choses, pour avoir une accroche en quelque sorte, mais aussi le côté plus abstrait, unifiant, qui vous donne la vision globale. Donc, la construction d'un topos à partir d'un site, ça fait un peu ça.

C'est-à-dire que ça structure le contenu qui est implicitement présent, mais pas encore explicitement présent dans le site, sur une structure de façon maximale. C'est ça que ça fait. Donc, c'est un peu comme, vous voyez, pour construire $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$, qu'est-ce que vous faites ? Vous ajoutez une langue déterminée et après, vous forcez une certaine relation. Voilà. Donc, vous voyez que c'est une complétion, ce que vous faites. En fait, de la même façon, la construction du topos de faisceau sur un site à partir du site donné, c'est une chose un peu comme ça.

C'est-à-dire que d'abord, on construit ce qui est un peu l'analogue de cette structure libre-là. Donc, on prend la structure libre engendrée par la catégorie C et après, on fait une sorte de, disons, de quotient par les relations codées par la topologie de Grothendieck. Je le mets entre guillemets, mais c'est effectivement un quotient. Donc, on peut le voir comme ça. La perspective que j'ai mentionnée tout à l'heure, c'était une perspective plus de type, disons, sous-espace, parce que j'avais mis plus en valeur ce foncteur-là, qui est le foncteur d'inclusion. Mais attention, parce que là, comme je vous l'ai dit, il y a aussi un foncteur dans l'autre sens et c'est celui-là qui vous permet de penser ça comme un quotient de ça par les relations posées par la topologie de Grothendieck.

Maintenant qu'on a clarifié un peu l'idée de topos telle qu'elle est apparue chez Grothendieck, on peut continuer avec notre explication sur les différents points de vue sur les topos. Donc là, je vais être un peu plus rapide parce qu'on a déjà énoncé les aspects essentiels. Donc, je vous ai dit que des catégoriciens, donc Lawvere et Tierney, se sont intéressés, à partir des années 70, à des fondements alternatifs possibles pour les mathématiques, fondés sur, écrits dans le cadre catégorique.

Donc, ils se sont intéressés à ces catégories qu'on pouvait utiliser pour faire des mathématiques un peu de la même façon qu'on les fait dans le contexte classique des ensembles. Et donc, ils ont montré que les topos, ils ont observé, parce qu'il n'y avait pas grand-chose à faire, Grothendieck avait déjà montré que les topos qu'il avait introduits avaient déjà toute la structure géométrique et algébrique nécessaire. Mais, disons, ce que notamment Lawvere a fait, c'est qu'il a introduit ce qu'on appelle la sémantique catégorique, c'est-à-dire l'idée de considérer des modèles de théorie. Donc lui, il l'a fait à partir des théories algébriques. Donc, c'était sa thèse de doctorat, donc sur la sémantique fonctorielle des théories algébriques, dans le cadre catégorique.

Et après, les gens, notamment de l'école de Montréal, donc Makkai, Reyes, Joyal, ils ont étendu ça à une sémantique plus générale qui ne s'appliquait pas seulement aux théories algébriques, mais qui s'appliquait aux théories du premier ordre en général. Et d'ailleurs, Lawvere avait fourni une contribution-clé à cet égard avec un papier très important qui fournit la réinterprétation catégorique des quantifications analogiques, qui permet d'interpréter à la fois la quantification existentielle et la quantification universelle. Donc, il avait interprété ça de façon très naturelle en termes de foncteurs adjoints.

Voilà, donc ça, c'était vraiment un ingrédient-clé dans l'invention de la sémantique catégorique. Et voilà, donc ça, ça a été bien sûr une découverte majeure parce que ça permet de multiplier les univers dans lesquels on travaille. On n'a plus un seul univers comme on avait avant, c'est-à-dire l'univers des ensembles, mais on peut choisir l'univers en fonction des choses qu'on veut faire.

Et chaque topos va donner un univers avec des règles caractéristiques. Donc, on a déjà parlé du côté logique, c'est-à-dire qu'on a dit que, par exemple, le topos des ensembles a une logique de type binaire. Mais si vous prenez un topos quelconque, il va avoir une logique avec une infinité de valeurs de vérité possibles.

C'est-à-dire, en général, on peut avoir des topos avec trois valeurs de vérité, avec quatre valeurs de vérité, avec n valeurs de vérité, avec une infinité de valeurs de vérité. Donc, vous voyez l'intérêt de tout ça. Donc, si vous êtes dans une situation où vous avez une notion de vérité qui vous semble pertinente en fonction de la géométrie de votre situation, vous allez pouvoir choisir un topos qui répond à vos exigences.

Vous n'êtes plus obligé de prendre ce topos-là. Non, vous pouvez le changer. Et vous pouvez aussi relativiser vos raisonnements, parce que comme il n'y a plus un seul univers à disposition, vous pouvez aussi étudier ce qui se passe quand vous changez d'univers.

Par exemple, vous avez commencé à travailler, je ne sais pas, en termes de l'univers ensembliste. Vous voulez réinterpréter vos résultats en termes, par exemple, d'un topos plus riche. C'est possible de le faire, je veux dire, avec des techniques de changement de base, des techniques que, d'ailleurs, Grothendieck avait déjà amplement utilisées dans le cadre des schémas, donc en géométrie algébrique, mais qui deviennent encore plus puissantes quand on les développe dans le cadre toposique. Ca, d'ailleurs, c'est vraiment l'un de nos projets centraux à l'Institut Grothendieck. Donc, avec notre groupe de recherche, on développe des fondements pour la théorie des topos relatifs, donc, des topos qui vivent au-dessus d'autres topos. Et notre but, c'est d'arriver à des techniques de relativité, de dévissage aussi puissante, voire davantage, que celles introduites et utilisées par Grothendieck pour les schémas. Ce sont des techniques qui, encore aujourd'hui, sont tout à fait fondamentales en géométrie algébrique.

Mais quand on les transpose dans le contexte des topos, vu la généralité de la notion de topos par rapport à celle de schéma, ça devient d'une puissance incroyable. Ca permet, par exemple, d'étudier des théories d'ordre n en termes de théories d'ordre de degrés inférieurs. Grothendieck, par exemple, étudiait les variétés de dimension n en les fibrant successivement jusqu'à arriver à des courbes.

Alors là, pareil, on peut faire un dévissage de type logique. Par exemple, si vous avez une théorie, par exemple, du premier ordre, vous pouvez la considérer comme une théorie propositionnelle relativement à un topos de base qui est plus riche que le topos des ensembles. C'est une illustration de ça. Donc, c'est juste pour dire qu'il y a énormément à faire en relation avec ces techniques de changement de base qui vont dans un sens et dans l'autre. Parce que quand on fait une opération, disons, d'abstraction qui consiste à mettre une certaine quantité d'informations dans le topos de base, c'est ce qu'on appelle une internalisation. Quand, en revanche, on interprète quelque chose formulé dans un univers, en termes d'un univers plus concret, c'est une opération qu'on appelle externalisation.

Je crois qu'il y avait une question. Oui. Ah oui.

L'intervenante : Donc, en fait, si dans telle situation, on a des valeurs de vérité à partir d'un topos, on peut choisir d'autres topos dans lesquels on va avoir d'autres valeurs de vérité, mais d'autres faits aussi ?

Olivia Caramello : Ah oui, oui, oui.

L'intervenante : Non binaires.

Olivia Caramello : Ah oui, oui, oui.

L'intervenante : Dans ces cas-là, les types d'opérations qu'on va pouvoir faire dans le premier topos qu'on avait ne vont pas du tout être les mêmes ?

Olivia Caramello : Tout à fait. Il y aura certaines structures.

L'intervenante : On va avoir des questionnements également.

Olivia Caramello : Oui, absolument, absolument.

L'intervenante : On va avoir des épistémés différentes.

Olivia Caramello : Ah oui, oui, oui. Oui, alors il va y avoir quand même des foncteurs qui vont préserver une partie de la structure, mais il y aura des choses nouvelles qui vont émerger. Donc, en fait... On va finir par s'éloigner, en fait. Oui, oui, oui. Non, non, mais il y a une variété extraordinaire qui s'ouvre. En fait, l'ontologie des topos, en quelque sorte, est un peu l'ontologie maximale qu'on peut avoir en mathématiques parce que tout ce qu'on peut penser, en quelque sorte, doit avoir un topos classifiant associé. Donc, c'est très large.

L'intervenante : Mais alors, quand même, après, les sémantiques et les opérations, ce n'est pas évident. C'est ce que vous dites.

Olivia Caramello : Non, non, mais... Alors, ce n'est pas évident, mais maintenant, la façon de procéder est bien comprise. Je veux dire que c'est totalement établi sur le plan technique. Donc, en fait, la sémantique catégorique, aujourd'hui, ça fait partie de l'histoire des mathématiques. C'est un domaine bien établi. En fait, la référence principale pour la sémantique catégorique et les topos classifiants, c'est le livre de Makkai et Reyes de 1977. Vous voyez, c'est très classique. Je veux dire, aujourd'hui... Donc, c'est quand même très bien établi, donc, en pleine généralité. Après, bien sûr, ce n'est pas du tout un domaine fermé parce que la question de l'étude des topos classifiants et de la façon d'arriver à extraire de l'information de théories mathématiques à travers l'étude des topos classifiants, ça, c'est quelque chose qui a été même assez délaissé dans l'histoire de la théorie des topos. Je veux dire, même ces auteurs-là, après, ils n'ont pas tellement développé l'étude des topos classifiants et tout ce qu'on peut faire avec. Donc, ils ont un peu semé en donnant les fondements de base. Mais après, effectivement, se pose la question de comment arriver à extraire le plus d'informations possibles des théories mathématiques à travers l'étude des topos classifiants. Et c'est là que j'ai imaginé, justement, en réfléchissant sur cette question, la technique des ponts, parce que j'ai imaginé que, en vérité, je veux dire, si vous vous limitez à l'étude du topos classifiant d'une théorie telle qu'il avait été construite par Makkai-Reyes, c'est-à-dire avec le site syntaxique de la théorie, ça, vous voyez, c'est une construction très intéressante, mais c'est une construction tautologique. Ce n'est pas quelque chose qui va vous fournir des informations nouvelles sur votre théorie. Donc, au début de ma thèse de doctorat, je me suis vraiment posé la question : "Mais qu'est-ce qu'il faut faire pour arriver vraiment à extraire de l'information ?". Parce que j'avais un peu le sentiment que, d'une certaine façon, toute l'information sur la théorie devait être contenue dans son topos classifiant.

Mais la question, c'est comment la lire, ça ?... On avait découvert l'ADN, mais on n'avait pas encore la génétique. Là, il faut développer toute une science pour tirer de l'information de tout ça.

Et donc, en construisant mes premiers ponts, je me suis aperçue qu'en fait, étudier notamment les topos classifiants en utilisant une multitude de représentations différentes, ça me permettait justement d'extraire de l'information parfois très profonde sur les théories. Par exemple, vérifier leur consistance, vérifier des propriétés logiques fondamentales. Je vous donnerai des exemples.

Et du coup, il est apparu que cette dualité entre topos et présentation était un élément-clé pour justement arriver à appliquer les topos. Parce que le but ici, ce n'est pas d'étudier les topos en tant qu'objet d'intérêt indépendant. Non, l'idée, c'est d'utiliser les topos pour jeter de l'éclairage sur la réalité modélisée par des sites ou des théories.

C'est-à-dire, il ne faut pas oublier que nous sommes en quelque sorte, en tant qu'êtres humains, contraints dans une contingence, dans des limitations, dans une concrétude. Donc, nous sommes intéressés quand même par le fait de dire des choses qui concernent le monde réel. Par contre, les topos nous permettent de faire des sauts dans le virtuel pour ensuite retomber dans le réel.

Ca nous donne un peu la vision qui sert pour retomber dans le réel avec plus de contrôle, plus de compréhension. Imaginez un architecte qui utilise par exemple un logiciel 3D. Ca lui permet de modéliser les choses, mais le but après, c'est toujours de revenir au réel.

Ici, c'est un peu pareil. Pour moi, c'est un saut dans le virtuel. D'ailleurs, j'ai un schéma que je vous montrerai plus tard qui clarifie ça.

C'est vraiment le saut dans l'imaginaire pour retomber dans le réel. Concernant les topos comme univers mathématiques, les aspects-clés, c'est ça. C'est la construction de nouveaux mondes, donc d'univers qui ont en général des propriétés particulières, tout en partageant avec la catégorie usuelle des ensembles les mêmes propriétés catégoriques comme l'existence des limites et des colimites.

Ces notions, vous les avez dans tous les topos. Vous avez aussi que la logique constructive est valide dans tous les topos. Là, vous êtes assuré que si vous restez dans le cadre de ce qu'on appelle la logique intuitionniste, c'est-à-dire la logique classique à laquelle vous enlevez la loi du tiers exclu, l'action du choix et d'autres éventuelles actions de nature non constructive, là, vous êtes assuré que ça va être vrai dans n'importe quel topos.

Par contre, le topos peut avoir une logique qui est plus riche que ça ou moins riche, disons moins riche. Ca peut avoir, par exemple, une logique plus particulière. Je veux dire, par exemple, la logique classique ou une logique intermédiaire entre la logique intuitionniste et la logique classique, comme ça peut être, je ne sais pas, la logique de Gödel-Dümmet (logique floue), ou la logique de de Morgan.

Il peut y avoir des logiques particulières. Et voilà. Ok, donc maintenant, le troisième point de vue, la notion de topos classifiant.

Alors ça, c'est une idée qui remonte, elle aussi déjà à Grothendieck et plus précisément à la thèse de son élève Monique Hakim, et aux notions de topos annelé, ou de schéma relatif. Donc l'idée, c'est laquelle ? L'idée, c'est celle du paradigme de Yoneda en théorie des catégories. Donc en théorie des catégories, l'idée, c'est donc de comprendre un objet par toutes les flèches qui pointent vers cet objet.

Donc, vous avez votre catégorie, donc vos objets, vos flèches, voilà. Et l'idée, c'est de comprendre un objet C de la catégorie en considérant toutes les flèches qui vont vers cet objet. En fait, l'élève de Yoneda vous dit que, ici, vous avez un foncteur, qui va de la catégorie vers les pré-faisceaux sur L, qui fait ça, c'est-à-dire qu'un foncteur là, il va prendre ce qu'on appelle les éléments généralisés de l'objet.

Qu'est-ce que c'est qu'un élément généralisé de C ? C'est juste une flèche qui pointe vers C. Donc ici, on a un foncteur qui prend le foncteur des éléments généralisés de l'objet, c'est-à-dire qu'il envoie à A l'ensemble des flèches qui vont de A vers C, c'est-à-dire les éléments généralisés de C définis sur A. Alors, le paradigme de Yoneda, c'est que...

[...]

Le paradigma de Yoneda, c'est une sorte d'action d'extensionnalité catégorique. Dans la théorie des ensembles, quand est-ce que deux ensembles sont égaux ? Quand ils ont les mêmes éléments. Alors ici, en théorie des catégorie, la notion d'élément se généralise comme ça : on doit prendre toutes les flèches qui vont vers l'objet donné. Vous voyez que dans les ensembles, un élément x dans l'ensemble X, vous pouvez le penser comme une flèche qui va de l'objet terminal de la catégorie des ensembles vers X et qui envoie le seul élément vers l'élément x. Mais en général, il faut prendre tous les éléments généralisés définis sur tous les A possibles. On ne peut pas se limiter à un A particulier, comme ici, dans les ensembles, on prendrait le terminal. Il faut prendre tous les A. Si vous prenez tous les A, vous avez cette forme d'extensionnalité catégorique qui vous dit que les éléments généralisés de C déterminent C à isomorphisme près. Donc ça, c'est le paradigme de Yoneda. C'est un théorème qui n'est pas très difficile à démontrer.

C'est une conséquence de ce qu'on appelle le lemme de Yoneda. Grothendieck a appliqué ce paradigme au topos, c'est-à-dire qu'on va prendre pour C la catégorie des topos de Grothendieck, dont les flèches sont les morphismes entre topos. Et donc, l'idée, c'est de comprendre un topos E en considérant tous les morphismes qui vont vers ce topos.

Et ça, c'est vraiment le point de vue des topos classifiés. Ici, on pourrait dire que, disons, l'objet C classifie les éléments de ce foncteur-là des éléments généralisés. Donc, l'idée, c'est de comprendre le topos classifiant, c'est de comprendre le topos E en termes des morphismes qui vont à d'autres topos, y compris lui-même. Il faut prendre des éléments généralisés définis sur des objets quelconques, donc des topos quelconques, en l'occurrence. Voilà.

Donc, ces choses-là, on essaie de les décrire dans un certain langage. Et c'est ce que Grothendieck veut faire. Donc, dans SGA4, il se demande quel serait un bon langage pour décrire des structures de ce type-là. Et il dit : "ça doit être des structures, en fait, s'exprimant en termes de limites projectives finies, de limites inductives quelconques", c'est ce qu'on appelle aujourd'hui limites finies et les colimites quelconques. Et voilà, il se pose le problème de formaliser ça. Alors, lui, il n'était pas très fan, en fait, des formalismes syntactiques. Du coup, il a laissé ce problème ouvert dans SGA4. Il se limite à dire ça. Donc, c'est clair qu'il avait quand même une idée très précise des structures qu'il s'agissait de caractériser, mais il n'a pas donné, disons, la description détaillée du cadre logique.

Ca, ça a été accompli justement dans le livre que je mentionnais tout à l'heure, celui de Makkai-Reyes dont la référence est Makkai-Reyes, référence, consortium des catégories, cadre logique, 77.

Donc, voilà, c'est là que vous trouvez justement ce théorème de l'existence des topos classifiants pour toutes les théories géométriques du premier ordre. C'est le cadre, voilà, que j'ai mentionné précédemment, cadre extrêmement général. Donc, ils arrivent à montrer, donc ils introduisent en fait ce cadre formellement, la logique géométrique, et ils le montrent à travers une construction purement syntactique, disons, tautologique, on pourrait dire. C'est un peu l'analogue de l'algèbre des termes, vous voyez, qu'on appelle aussi l'algèbre de Lindenbaum-Tarski, d'une théorie propositionnelle, donc c'est une généralisation de ça. Et voilà, ils montrent à travers une telle construction que le topos classifiant d'une théorie géométrique du premier ordre se construit toujours. Et il satisfait cette propriété universelle.

Vous voyez qu'ici j'ai écrit *Geom*, vous voyez, c'est la catégorie des morphismes, morphisme de topos, donc ici je disais qu'on allait étudier les morphismes de topos vers le topos donné. Donc, quand on parle de topos classifiant, on va considérer le topos classifiant d'une théorie, T, on va le dénoter $E(T)$, et du coup on va étudier les morphismes qui vont vers le topos classifiant à partir d'un topos E, c'est ça qu'on va faire. Et donc vous voyez que ce qu'ils ont montré là, c'est qu'on peut identifier ces morphismes-là, on peut les décrire en termes logiques comme les modèles de la théorie T à l'intérieur de E, topos de départ, c'est ça qu'ils ont montré.

Voilà, donc par exemple, vous pouvez appliquer ça aux théories mathématiques habituelles, par exemple à la théorie des groupes, à la théorie des anneaux, à la théorie des espaces vectoriels, voilà. Toutes ces théories ont un topos classifiant qui se construit par ce procédé syntaxique. Alors comme je l'ai dit tout à l'heure, ça ne va pas : je veux dire que par lui-même, ça ne va rien vous donner, mais quand même, ça vous montre que déjà cet objet existe, donc c'est un peu l'invariant ultime de la théorie, donc c'est un théorème d'une importance capitale. Après, bien sûr, le théorème lui-même ne va pas vous fournir des moyens d'exploitation, et donc va se poser la question de quoi faire, et c'est là que, notamment, la théorie des ponts va intervenir.

Voilà, mais en tout cas, c'était déjà extraordinaire d'arriver à démontrer un tel résultat de représentabilité à un niveau si général. Moi, je considère ce théorème comme l'un des résultats les plus importants de l'histoire des mathématiques, parce que si vous regardez, par exemple, en topologie algébrique, en géométrie algébrique, démontrer que des foncteurs riches en informations sont représentables, c'est toujours, presque toujours, quelque chose de difficile. Donc ici, vous avez que tous les foncteurs d'un type extrêmement général qui sont associés à des théories géométriques, vous savez qu'ils sont représentables, donc c'est vraiment extraordinaire.

Je pense qu'un résultat à ce niveau de généralité, peut-être que c'est inégalé en mathématiques. Voilà, une question ?

L'intervenant : J'étais en train de me dire que deux, c'est un peu du même niveau que trois. Mais sauf que c'est un résultat un peu négatif, je veux dire, je suis ferme.

Olivia Caramello : Oui, alors que là, oui, tout à fait.

L'intervenant : En termes de niveau de généralité, je me serais dit que c'est un peu...

Olivia Caramello : Oui, non, mais bien sûr, mais en logique, on a aussi beaucoup de résultats comme ça. Mais la chose intéressante de ça, c'est que ça fait quand même un lien entre logique et géométrie, c'est-à-dire que les logiciens n'ont jamais vraiment pensé en termes de représentabilité de foncteurs.

Et dans les cadres où les personnes se sont posées la question de représenter des foncteurs riches en informations, le problème de les représenter, en général, c'est un problème hyper-compliqué. Alors que là, on arrive quand même à construire un objet qui représente. Alors bien sûr, pour comprendre la portée d'un tel résultat, si on n'a pas fait l'expérience dans des domaines particuliers des mathématiques de la difficulté de représenter, de construire des espaces classifiés, peut-être qu'on n'apprécie pas à sa juste mesure ce résultat.

Mais je vous assure que c'est vraiment quelque chose d'extraordinaire, bien que malheureusement, assez peu connu, parce qu'en fait, j'ai eu la surprise quand j'ai commencé à m'intéresser aux topos classifiants pendant ma thèse de doctorat. Moi, j'imaginais que tout le monde, par exemple, en géométrie connaissait ce théorème. Mais en fait, presque personne ne le connaît. Mais, je veux dire, même parmi les anciens élèves de Grothendieck, il y avait quand même un peu de séparation entre les communautés. Et du coup, c'est un résultat qui est resté un petit peu lettre morte au-delà du cercle de mathématiciens nommés ici qui ont contribué à cette découverte.

Voilà, mais en tout cas, en ce qui me concerne, j'ai amplement contribué à la diffusion de ce résultat et à le faire connaître, à le valoriser autant qu'il le mérite. Voilà, donc ici, il y a une image tirée de mon livre "Theory, the Sites and Toposes", une image qui représente le concept de topos classifiant. Cette image fait référence à la notion de modèle universel qui existe dans le topos classifiant et qui engendre, vous voyez, par l'application de différents foncteurs qui sont notés $f^\star, g^\star, h^\star *$, tous les modèles de la théorie dans différents topos.

Vous voyez, alors la figure ici, l'étoile jaune foncée, c'est le topos classifiant. À l'intérieur de ce topos, vous avez ce que j'ai noté U, c'est le modèle universel. C'est un modèle, c'est un modèle de la théorie qui en fait permet d'engendrer tous les autres modèles M, N et P que vous voyez ici.

Cette autre forme colorée représente d'autres topos parce que vous pouvez penser chaque topos comme un univers en soi. Donc voilà, j'ai choisi différents couleurs pour les représenter. Et à l'intérieur de ces topos, vous pouvez considérer différents modèles de la théorie.

Donc vous avez M, N, P. Mais en fait, vous voyez ici, vous avez un résultat de symétrie qui vous dit qu'en fait, tous les modèles que vous pouvez considérer s'obtiennent de façon unique et canonique comme image de ce modèle universel par des foncteurs qui préservent un certain type de structure logique. Il y a peut-être des questions ? Non, il y a des questions sur les techniques. Ah ok, voilà.

(Alors là, on a encore un quart d'heure, c'est ça ? Ok, oui, c'est bien). Donc voilà, maintenant que nous avons défini les topos classifiants, il est naturel de se poser la question : "quand est-ce que deux théories ont le même topos classifiant ?". Alors ça, j'ai déjà introduit la terminologie tout à l'heure. Donc c'est la relation de l'équivalence de Morita. Et je vous ai dit qu'en général, on peut avoir différentes théories classifiées par un même topos. En fait, ça arrive précisément quand les théories décrivent dans des langages éventuellement très différents un même contenu. Étant donné que ce contenu est incarné par le topos classifiant, ils vont avoir le même topos classifiant. Vous voyez ? Donc c'est quelque chose qui peut arriver et qui en fait arrive tout le temps. En fait, si vous fixez un topos, il y a une infinité de théories Morita-équivalentes classifiées par ce topos.

Un intervenant : C'est un théorème ? Ce n'est pas...Possible ?

Olivia Caramello : Oui, possible. Oui, oui, oui. Tout à fait. Voilà, donc, dans l'autre sens, tout topos de Grothendieck peut se décrire comme le topos classifiant d'une théorie, mais encore une fois, pas d'une seule théorie, d'une infinité de théories. Du coup, un topos peut être vu comme un représentant canonique d'une classe d'équivalence de théories modulo cette notion d'équivalence de Morita.

Voilà, alors maintenant, avant de terminer mon exposé de ce matin, parce qu'on pourra reprendre les ponts cet après-midi, ce n'est pas grave, voilà, je voudrais aborder brièvement la question de la réception des topos dans la communauté mathématique parce que voilà, ça soulève des questions d'ordre sociologique, d'ordre psychologique, d'ordre éthique également. Voilà, donc ça vaut la peine de lire ce que Grothendieck dit, déjà sur la nature intrinsèque de ces objets, les topos qu'il y a entre eux. Donc, c'est très intéressant de voir que Grothendieck, à la différence de la plupart des mathématiciens qui ont plutôt certaines craintes, disons, à accepter un concept si général que celui des topos, on va le voir qu'effectivement, ça engendrait de l'ostracisme, même des réactions virulentes d'opposition. Et Grothendieck dit quelque chose de déroutant, il dit : "Mais non, mais les topos, c'est quelque chose d'enfantin. Alors, il faut savoir que Grothendieck attribuait à la nature enfantine des qualités essentielles de créativité, de fécondité. Donc, le thème de l'enfant est très important dans la pensée grothendieckienne.

Et donc, Grothendieck n'avait pas peur de la simplicité, bien au contraire, il pensait que les choses les plus importantes se trouvaient parfois avec cette disposition d'innocence qui est propre à l'enfant. Alors, il dit :

> "Comme l'idée même des faisceaux dû à l'arrêt ou celle des schémas, comme toute grande idée qui vient bousculer une vision des choses, celle des topos a de quoi déconcerter par son caractère naturel d'évidence, par sa simplicité, à la limite, dirait-on, de naïf ou de simpliste, voire de bébête, par cette qualité particulière qui nous fait nous écrier si souvent "oh, ce n'est que ça" d'un ton mi-déçu, mi-envieux, avec en plus, peut-être, ce sous-entendu de farfelu, de pas sérieux qu'on réserve souvent à tout ce qui déroutent par un excès de simplicité imprévu, à ce qui vient nous rappeler peut-être les jours depuis longtemps enfouis et régnés de notre enfance."

Je trouve que ce passage est vraiment extraordinaire parce qu'il pointe là quelque chose de profond. C'est comme si, en fait, cet excès de simplicité imprévu déroutait parce que, justement, les contraintes sociales nous poussaient à avoir une approche de domination vers la connaissance, d'imposition de son propre ego au-dessus de la réalité. Et donc, c'est comme s'il y avait des superstructures qui se forment dans la psyché et qui empêcheraient cette approche d'innocence caractéristique de l'enfant qui est vraiment la clé de la créativité.

Je pense qu'il y a beaucoup à réfléchir et à développer à partir de ça. Effectivement, il dit, en fin de compte, les topos, c'est quelque chose de très naturel. Il dit, voilà, c'est très innocent et il ajoute :

> "Par contre, je ne vois personne d'autre sur la scène mathématique au cours des trois décennies écoulées qui aurait pu avoir cette naïveté, cette innocence de faire à ma place cet autre pas crucial entre tous, introduisant l'idée si enfantine d'éthopos ou ne serait-ce que celle des sites."

Pour lui, les sites, c'est quelque chose quand même d'auxiliaire pour arriver à l'objet invariant par excellence qu'est le topos. Donc, vous voyez ici, c'est très intéressant parce que c'est lié aussi à cette innocence, par exemple, qui a poussé les mathématiciens à un moment à se dire : "Mais introduisons le nombre zéro, par exemple". Vous voyez, ce n'est pas un pas qui demande de l'effort technique, mais c'est quand même un pas conceptuel majeur qui ouvre un horizon.

Et donc, dans l'introduction des topos, il y a ça. Et voilà, donc après, il y a des passages un peu amers, je ne vais pas tout lire, mais après, vous pouvez les retrouver dans les transparents et surtout dans *Récoltes et Semailles*, qui fait une analyse très, très détaillée de la situation. Mais voilà, il dit qu'à un moment, les topos était devenu objet de dérision dans la communauté mathématique.

Donc, "pléthorique et gigantesque bavardage sur ce que de toute façon, tout le monde connaissait déjà depuis toujours et sans l'avoir attendu. Oui, c'est typique de ces découvertes qui, une fois que sont faites, semblent évidentes, mais personne n'y avait pensé auparavant". Effectivement, quand on commence à penser en termes des topos, on s'habitue et on ne peut plus revenir en arrière.

Et ça peut arriver, effectivement, c'est arrivé malheureusement, parce qu'il y a eu des problèmes éthiques assez graves dans la communauté mathématique, que le créateur lui-même soit en quelque sorte en partie oublié, en partie approprié [2]. En tout cas, les topos ne sont pas le seul objet de

2. au sens de spolié.

l'héritage grothendieckien qui a subi de l'ostracisme. Ici, il est question aussi des motifs.

Il dit :

> "Ces motifs dont il vous rabattait les oreilles et que personne n'avait jamais vus."

Il est assez ironique aussi, mais c'est vrai qu'il y a eu une incompréhension assez profonde. On peut dire aussi que Grothendieck était en avance de plusieurs décennies, voire de siècles, par rapport à ses contemporains. C'est aussi quelque chose qu'on peut humainement comprendre. Par contre, se sont mis en place des mécanismes de répulsion assez lamentables, en fait, sur le plan éthique et sociologique. Et de tout ça, il est question amplement dans *Récoltes et semailles*.

Et voilà, donc, autre observation qu'il fait, justement, le parallèle avec les objets imaginaires, comme le nombre zéro, qui ont été introduits se retrouve explicitement. Vous voyez ici dans ce passage, il dit : "La notion de topos s'est vue condamnée depuis mon départ à une existence marginale. Les topos se rencontrent pourtant à tous les pas en géométrie, mais on peut bien sûr fort bien se passer de les voir".

Ca, c'est très intéressant aussi. Comment s'est-on passé, pendant des millénaires, de voir les groupes de symétrie des ensembles ou le nombre zéro ? Donc, vous voyez ce qu'il dit ici, c'est très intéressant, parce qu'il dit bien sûr, c'est le monde virtuel. On a dit tout à l'heure que les topos représentent un peu un saut dans le virtuel. Donc, étant donné que c'est virtuel, on peut dire, pourquoi s'occuper de ça ? Et par contre, le virtuel, c'est ce qui permet de mieux appréhender le réel. Donc, il dit, oui, "Le zéro, par exemple, on pouvait fort bien se passer de le voir. Par contre, si vous regardez l'impact que ça a eu, l'introduction du zéro en mathématiques, c'était révolutionnaire, ça a changé les mathématiques.".

Aujourd'hui, ce n'est même plus concevable de penser les mathématiques sans le zéro, vous voyez. Mais au début, il y a eu des fortes résistances psychologiques. Donc, il faut comprendre cet ostracisme et ces résistances vraiment à l'échelle de l'histoire des mathématiques, en faisant des parallèles avec d'autres résistances qui se sont produites justement quand de nouveaux objets mathématiques, des imaginaires, sont arrivés sur la scène.

Alors, c'est vrai qu'en ce qui concerne les topos, c'est particulièrement fort, ça, parce que c'est d'une généralité extraordinaire. Donc, il ne s'agit pas d'accepter juste la racine de -1. Vous voyez, déjà ça, c'était un imaginaire et tout ce qui allait avec. Et déjà, ça a engendré des résistances. Là, vous avez quelque chose qui est infiniment plus général. Donc, c'est évident que ça va de pair avec une résistance encore plus forte.

Mais conceptuellement, c'est un peu ce qui s'est passé. Et il y a un autre aspect très intéressant aussi sur le plan philosophique qu'il faut prendre en compte. C'est le fait que depuis le départ de Grothendieck de la scène mathématique, se sont développés deux traditions. Une tradition plutôt de géométrie, qui était représentée par les anciens élèves de Grothendieck, surtout, et les anciens collègues, les gens qu'il y avait autour de lui. Alors, la plupart de ces géomètres a essentiellement abandonné la notion de topos. Ils se sont concentrés juste sur l'étude de certains invariants, par exemple, les invariants cohomologiques, qu'on pouvait considérer. Et qu'on pouvait directement définir à partir des sites. On n'avait pas besoin, forcément, de topos. Là encore, je veux dire, on n'en avait pas besoin. Mais quand même, le cadre correct pour les étudier, c'est le cadre toposique. Mais il y avait quand même ce malaise avec la notion de topos qui faisait que ces gens essayaient vraiment de les négliger autant que possible. Moi-même, j'ai eu des contacts avec un de ces anciens élèves de Grothendieck qui m'avait invitée à éliminer le mot topos de tous mes articles. Je ne plaisante pas. Et voilà, parce que ça faisait peur, ça dérangeait. Après, pour moi, bien sûr, c'est très difficile de comprendre une telle posture, mais c'est quand même bien réel.

Et donc cette pratique, on pourrait la résumer en disant *site sans topos*. Mais de l'autre côté, de façon presque symétrique, on a eu une tradition qui a consisté à étudier les topos en négligeant les sites. Et ça, c'est plutôt la tradition Lawverienne. Donc les gens qui suivaient Lawvere, ils ont vu, ils ont interprété ce manque de canonicité intrinsèque dans la théorie des topos qui est, disons, l'ambiguïté fondamentale quand un topos est associé à une infinité de sites ou de présentations de théories différentes, ils ont vu ça comme un aspect presque diabolique de la théorie, quelque chose, vraiment, de problématique, dont il fallait se débarrasser. Parce que eux, ils étaient intéressés par le fait de faire une étude axiomatique. Quand on fait une étude axiomatique, l'existence de différentes présentations passe complètement au deuxième plan. Et donc c'est une approche qu'on pourrait résumer par le slogan *topos sans sites*. Et vous voyez donc, ces deux traditions ont eu quand même beaucoup d'adeptes.

Mais en fait, ce qui a manqué, et là je parle vraiment de ce qui s'est passé dans les 40 ans qui ont suivi en fait le départ de Grothendieck de la communauté mathématique. Ce qui a manqué, c'est vraiment l'intégration entre les deux niveaux, le niveau des sites et le niveau des topos. C'est-à-dire, ni une école ni l'autre n'a vu l'intérêt, vraiment, non pas seulement d'étudier cette dualité, mais de la mettre au centre.

Parce qu'en fait, vous voyez, ça ce n'est pas un aspect secondaire de l'histoire. L'intégration entre concrétude et abstraction, entre diversité et abstraction, c'est un élément-clé. Et pas seulement sur le plan conceptuel, c'est un élément-clé sur le plan technique.

Parce que comme on le verra, les ponts, justement, ce sont des architectures qui relient les deux niveaux et qui permettent d'extraire de l'information cachée. Et donc de faire des découvertes concrètes, tangibles, en mathématiques. Donc voilà, encore une fois, l'idée, c'est d'utiliser le virtuel pour retomber dans le réel.

Donc ici, il ne s'agit pas seulement de faire de la philosophie. Il s'agit de faire des mathématiques d'une façon dynamique et computationnellement efficace. Et comme on le verra, cela nécessite de travailler à deux niveaux et donc de ne pas les identifier ni les négliger l'un par rapport à l'autre.

Et c'était là un peu le point de départ de la théorie des topos. Donc là, je m'arrête.

[*Applaudissements*]