

Transcription de deux articles aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Marie-Hélène Schwartz ¹

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur une propriété de la fonction $m(r, A)$ de M. Nevanlinna dans les fonctions méromorphes.* Note de Mme **Laurent-Schwartz** ², présentée par M. Jacques Hadamard.

Soit $z = g(Z)$ la fonction inverse. Soit A un point du plan des Z intérieur à un domaine Δ qui ne contient aucun point critique de $g(Z)$ et que nous pouvons supposer à distance finie.

Les déterminations $g_n(Z)$ de $g(Z)$ sont holomorphes et univalentes dans Δ . Soient $g'_n(Z)$ les fonctions linéaires des fonctions $g_n(Z)$ qui pour $Z = A$ sont nulles et ont une dérivée égale à 1 ; elles forment une famille normale sans limites constantes à l'intérieur de Δ , soit par exemple dans le domaine fermé Δ , contenant à son intérieur le cercle Γ de centre A et de rayon $\rho \leq 1$. Nous désignerons par la même lettre en caractère majuscule, minuscule et minuscule accentuée les éléments homologues correspondant à $Z, g_n(Z)$ et $g'_n(Z)$, ou leurs affixes. z et z' décrivent des figures semblables.

Soit le cercle $|z| = r$. Soient $\alpha_i, \beta_i, u_i, v_i$ les arcs de ce cercle respectivement intérieurs à l'un des homologues γ_n de Γ et à l'un des homologues δ_n de Δ .

$$m(r, A) < \text{Log} \frac{1}{\rho} + \sum_i \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Arg } \alpha_i}^{\text{Arg } \beta_i} \text{Log} \frac{1}{|Z - A|} d\theta,$$

$$m(r, A) < \text{Log} \frac{1}{\rho} + \sum_i \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Arg } u_i}^{\text{Arg } v_i} \text{Log} \frac{1}{|Z - A|} d\theta.$$

Un arc $u_i v_i$ n'étant pris dans la somme que s'il contient un arc $\alpha_i \beta_i$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\text{Arg } u_i}^{\text{Arg } v_i} \text{Log} \frac{1}{|Z - A|} d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int_{u_i}^{v_i} \text{Log} \frac{1}{|Z - A|} ds = \frac{1}{2\pi r'} \int_{u'_i}^{v'_i} \text{Log} \frac{1}{|Z - A|} ds'$$

Du fait de la normalité, l'arc $u'_i v'_i$ est borné supérieurement et, d'autre part, on a

$$|z'| > \lambda |Z - A| \quad (\lambda \geq 1).$$

Il vient donc

$$\int_{u'_i}^{v'_i} \text{Log} \frac{1}{|Z - A|} ds' < \text{Log} \lambda \text{Arc } u'_i v'_i + \int_{u'_i}^{v'_i} \text{Log} \frac{1}{|z'|} ds'$$

1. Marie-Hélène Levy, de son nom de jeune-fille, fut l'épouse de Laurent Schwartz.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, février 2026.

2. *Note de la transcriptrice : on constatera ici que c'est le fait que le prénom du mari de Marie-Hélène Schwartz puisse être transformé en nom de famille qui transforme Mme Schwartz en Mme Laurent, rendant plus difficile la récupération de cette note ; cela eut été différent si le prénom de son mari n'avait pas été un patronyme plausible.*

Référence : Comptes-Rendus de Mathématiques de l'Académie des Sciences, 210, séance du 8 avril 1940, p. 525-526.

Cette dernière intégrale est bornée ; elle est inférieure à $k \operatorname{Arc} u'_i v'_i$, car l'arc $u'_i v'_i$ est borné inférieurement du fait qu'il contient l'arc $u'_i \alpha'_i$ dont l'homologue est borné inférieurement.

$$m(r, A) < \operatorname{Log} \frac{1}{\rho} + (\operatorname{Log} \lambda + k) \sum_i \frac{\operatorname{Arc} u_i v_i}{2\pi r}$$

$$m(r, A) < \operatorname{Log} \frac{1}{\rho} + \operatorname{Log} \lambda + k.$$

Lorsque Δ contient des points critiques de $g(Z)$ tels que le nombre de déterminations qui s'échange dans Δ soit borné, on peut faire un raisonnement analogue à celui-ci. Nous énoncerons donc ce théorème :

Soit une fonction méromorphe ; si A est une valeur régulière de la fonction inverse ou plus généralement si le nombre des déterminations, qui s'échangent dans un voisinage arbitrairement petit mais fixe de A , est borné supérieurement, la fonction $m(r, A)$ est bornée ; en particulier A n'est pas une valeur déficiente³.

Le raisonnement fait s'applique aussi aux fonctions méromorphes dans un cercle. On peut l'étendre aux fonctions algébroides, car, étant données des fonctions $g_n(Z)$ holomorphes dans Δ et d'ordre de multivalence borné, on peut opérer, sur chacune d'elles, une transformation linéaire de façon à obtenir une famille normale.

3. Certains, résultats compris dans cet énoncé ont été donnés par M. Collingwood (*Comptes-Rendus*, 179, 1924, p. 1125) et par M. Ullrich (*Journal für die reine u. ang. Mathematik*, 166, 1932, p. 220-234).

THÉORIE DES FONCTIONS. – *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques.* Note de M^{me} **Laurent Schwartz**, présentée par M. Paul Montel.

Soit

$$f(z) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{1 + \frac{z}{4^n}}{1 - \frac{z}{4^n}} \right)^{(-2)^n}$$

Posons

$$z = 4^\nu u, \quad 1 \leq |u| < 4,$$

$$f(z) = \left[\prod_{p=0}^{p=\infty} \left(\frac{1 + 4^p u}{1 - 4^p u} \right)^{\frac{1}{(-2)^p}} \prod_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{1 + \frac{u}{4^p}}{1 - \frac{u}{4^p}} \right)^{(-2)^p} \right]^{(-2)^\nu} \left[\prod_{p=\nu}^{p=\infty} \left(\frac{-1 + \frac{1}{4^p u}}{1 + \frac{1}{4^p u}} \right)^{\frac{1}{(-2)^{p-\nu}}} \right];$$

$$f(z) = [g(u)]^{(-2)^\nu} [1 - \varepsilon(z)], \quad |\varepsilon(z)| < \frac{k}{4^2}, \quad g(4z) = \frac{1}{g^2(z)}.$$

Remarquons que $g(z)$ ne change pas de détermination tant que $|z| > 1/4$.

I. *Zéro et l'infini sont pas des valeurs asymptotiques pour $f(z)$.* – Considérons en effet l'ensemble Γ des courbes du plan des z où $|g(z)| = 1$. Il ne dépend pas de la détermination de $g(z)$; il se conserve par les symétries par rapport aux axes et les homothéties de centre σ et de rapports $4^{\pm n}$; il comprend l'axe des y et un nombre fini d'arcs analytiques dans la couronne $C_1[1 \leq |z| < 4]$ dans chacune des couronnes C_R homothétiques; il n'a ni point d'arrêt, ni ensemble asymptote en dehors des points $z = 0$ et $z = \infty$. La dérivée $g'(z)/g(z)$ réelle sur Oy , s'y annule en un point A de C_1 car elle a des signes opposés aux points $z = i$ et $z = 4i$. De A part une branche γ de Γ non tangente à Oy . γ ne peut pas, avant d'avoir rencontré Ox , déterminer soit seul, soit avec Oy , un domaine fermé, car $g(z)$ y serait holomorphe et sans zéro, alors que sur le contour on aurait $|g(z)| = 1$. γ ne peut, sans rencontrer Ox , tendre vers l'origine ou vers l'infini car traversant une infinité de couronnes C_n , elle comprendrait au moins deux arcs homothétiques, et l'on en déduirait par homothétie l'existence d'un arc de γ aboutissant à Oy en un point distinct de A , ce qui, nous l'avons vu, est impossible. Donc γ coupe Ox en un point d'abscisse finie non nulle. Il en résulte, par symétries et homothéties, une famille de courbes fermées γ_n qui tendent uniformément vers l'infini, sur lesquelles $|g(z)| = 1$ et, pour n assez grand, $0 < 1 - \varepsilon < |f(z)| < 1 + \varepsilon$. Ceci implique l'absence de chemins de détermination zéro ou l'infini.

Référence : Comptes-Rendus de Mathématiques de l'Académie des Sciences, 210, Séance du 10 mars 1941, p. 382-384.

II. *Zéro et l'infini sont des valeurs déficientes.* – Soit $r = 4^\nu \rho, 1 \leq \rho < 4$.

$$\begin{aligned}
N(r, 0) = N(r, \infty) &= \sum_{p=0}^{p=\nu-1} 2^{\nu-p} \text{Log } 4^p \rho = (2^{\nu+1} - 1) \text{Log } \rho \left[\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{p}{2^p} - \sum_{p=\nu}^{p=\infty} \frac{p}{2^p} \right] 2^\nu \text{Log } 4 \\
&= 2 \cdot 2^\nu \text{Log } 4 \rho [1 - \eta_1(r)] && [|\eta_1(r)| < \frac{k_1 \nu}{2^\nu}], \\
N_1(r, 0) = N_1(r, \infty) &= N(r, 0) - \sum_{p=1}^{p=\nu} \text{Log } 4^p \rho = N(r, 0) [1 - \eta_2(r)] && \left[|\eta_2(r)| < \frac{k_2 \nu^2}{2^\nu} \right], \\
m(r, 0) = m(r, \infty) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\text{Log} |\rho(r e^{i\theta})|| d\theta = 2^\nu \mu(\rho) [1 + \eta_2(r)], \\
\mu(\rho) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\text{Log} |g(\rho e^{i\theta})|| d\theta.
\end{aligned}$$

avec

$$\mu(\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\text{Log} |g(\rho \cdot e^{i\theta})| d\theta.$$

On a

$$\left| |\text{Log} |f(z)|| - |(-2)^\nu \text{Log} |g(z)|| \right| \leq \left| \text{Log} |f(z)| - (-2)^\nu \text{Log} |g(z)| \right| = \left| \text{Log} |1 - \varepsilon(z)| \right| < \frac{k}{4^\nu},$$

donc

$$\eta_3(r) < \frac{k_3}{2^\nu}.$$

$$\frac{m(r, 0)}{T(r)} = \frac{m(r, \infty)}{T(r)} = \frac{\mu(\rho)}{2 \text{Log } 4\rho + \mu(\rho)} [1 - \eta(r)] \quad \left[\eta(r) < \frac{k\nu}{2^\nu} \right].$$

Les valeurs limites de ces rapports sont les valeurs prises pour $1 \leq \rho < 4$ par $\mu(\rho)/2 \text{Log } 4\rho + \mu(\rho)$. Elles forment un intervalle α, β ($\beta < 1, \alpha > 0$). – En effet, pour que $\mu(\rho)$ s'annule, il faudrait que $|g(z)| = 1$ sur un cercle par rapport auquel le pôle simple $z = 1$ et le zéro double $z = 4$ devraient, d'après le principe de symétrie de Schwarz, avoir pour inverses un zéro simple et un pôle double, ce qui est impossible. Donc

$$\delta(\sigma) = \delta(\infty) = \alpha > 0.$$

III. *Montrons que $\alpha \neq \beta$.* – Prolongeons dans l'intervalle $4 \leq \rho < 16, \mu(\rho)$ la même intégrale et $\text{Log } 4\rho$ par $2 \text{Log } 4(\rho/4)$. Les deux fonctions doublent en passant de ρ à 4ρ , si elles étaient proportionnelles entre 1 et 4, elles le seraient entre 1 et 16 ; or, on vérifie immédiatement que, pour $\rho = 4$, leurs dérivées ont des discontinuités de signes opposés. Les rapports oscillent donc, d'où il résulte que l'on a à la fois

$$\frac{m(r, 0)}{T(r)} + \frac{N_1(r, 0)}{T(r)} = 1 - \eta_1(r) \rightarrow 1, \quad |\eta_1(r)| < k_1 \frac{\text{Log}^2 r}{\sqrt{r}},$$

et

$$\delta(0) + \vartheta(0) = 1 - (\beta - \alpha) < 1.$$

Conclusion. – Nous avons précédemment vu⁴ que A n'est pas une valeur déficiente si le nombre de déterminations de la fonction inverse qui s'échangent dans un voisinage fixe de A est borné. Nous venons de voir que, si cette condition n'est pas réalisée, A peut être valeur déficiente sans être nécessairement valeur asymptotique.

4. Comptes-Rendus 210, 1940, p. 525-526.