

## Les théorèmes de Jacques Feldbau, Denise Vella-Chemla, mars 2026

Michèle Audin est décédée le 14 novembre 2025. Elle a montré le chemin, pour raviver la mémoire de personnes oubliées par l'Histoire, comme les morts de la Commune, Jacques Feldbau...

Pour tenter de poursuivre sur cette voie, j'ai d'abord souhaité étudier la représentation (qui s'élève environ à 17 %) des thésardes dans la communauté mathématique française, en utilisant les données de la base généalogique mathématique MGP (en décembre 2025 et janvier 2026). J'ai réalisé seulement en mars 2026 que Michèle Audin, alors qu'elle était Présidente de l'association Femmes & Mathématiques, avait réalisé un travail similaire à l'Université de Strasbourg en l'an 2000.

J'ai trouvé, lors de ma lecture des articles de son site professionnel, dans ce document (le livre de Michèle Audin *Une histoire de Jacques Feldbau* édité par la Société mathématique de France en 2009) <https://audin.pages.math.unistra.fr/livres/feldbau-T.pdf> l'extrait (p. 81) que je transcris ci-après. Cet extrait m'intéresse car les dessins qui y sont représentés me rappellent mes "carrés pour la conjecture de Goldbach".

Je dédie ce travail de transcription à Michèle Audin et Jacques Feldbau.

---

### (III.4.) *Les théorèmes de Feldbau*

Yvonne Lévy m'a dit que François Loeser lui a dit qu'on enseigne ce que Feldbau a fait dans sa thèse dans les cours à l'université. Je confirme. Mais j'ai moi-même donné des cours où je démontrerais qu'un revêtement ou un fibré sur une base contractile était trivial, enseignant ainsi un théorème de Feldbau, en utilisant une variante pour les cubes du lemme de recollement pour les simplexes que j'ai apprise dans un cours de Cartan [?]. J'ai même écrit des notes de cours [?] dont j'ai déjà extrait une des figures du chapitre [?] et dont j'extrahis encore celle-ci, la figure [?], qui illustre ce résultat et qui devrait rappeler aux lecteurs la figure de la page ?, sans penser à mentionner le nom de l'auteur de ce théorème. Il est vrai que ce nom ne figurait pas non plus dans le polycopié [?] de Cartan. Pourtant, lorsque, dans leur congrès à Royaumont, du 5 au 17 avril 1950, les collaborateurs de Nicolas Bourbaki, parmi lesquels Cartan était présent, mais pas Ehresmann, avaient fait le plan d'un livre "Espaces fibrés", ils avaient noté :

Cas de la base contractile (ou différentiablement contractile) en un point (Feldbau).<sup>a</sup>

---

a. Archives Bourbaki, numérisées par MathDoc, document `nbt_024.pdf`, page 30.

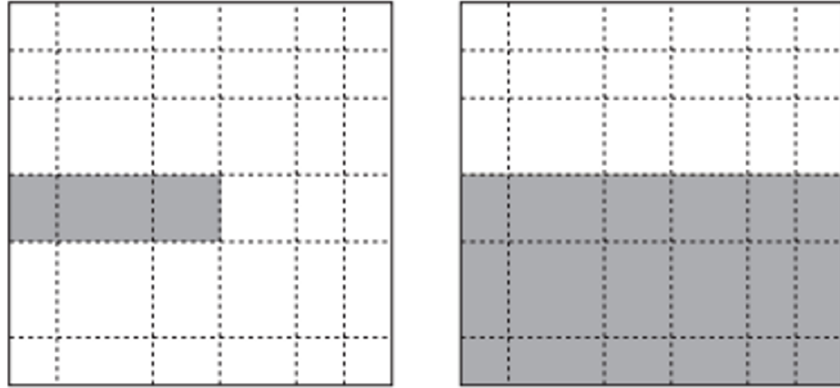
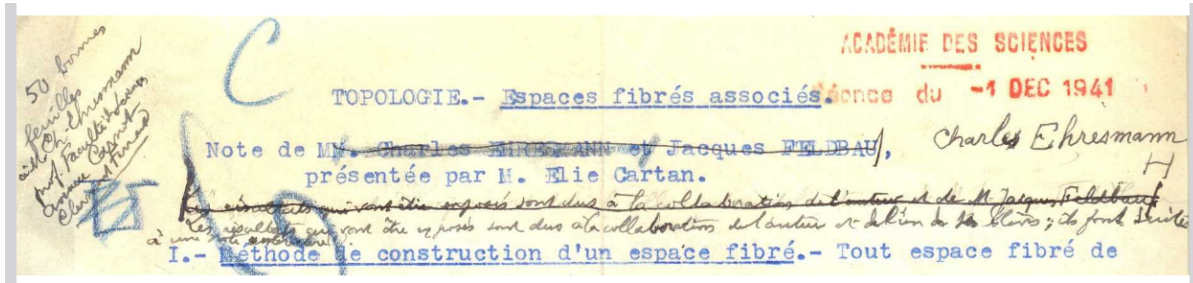


FIGURE 5. Trivialité des fibrés sur un cube

En essayant d'en apprendre davantage sur les théorèmes de Feldbau, j'ai trouvé deux images dans les écrits de Michèle Audin (la première est ci-dessous, la seconde est en annexe) (voir ici <https://audin.pages.math.unistra.fr/slides/marburg.pdf>), ainsi que les références bibliographiques des articles de Jacques Feldbau aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences.



Je transcris ci-dessous les pages 41 à 43 du polycopié du cours de Topologie de Michèle Audin, cours intitulé *Topologie : revêtements et groupe fondamental* <https://audin.pages.math.unistra.fr/polycopies/courstopalg.pdf>.

#### 4. Revêtements des cubes

Le but de cette section est de démontrer que sur les cubes  $[0, 1]^n$ , tous les revêtements sont (globalement) triviaux.

**Théorème 4.1 :** *Tout revêtement de  $[0, 1]^n$  est isomorphe au revêtement trivial.*

*Démonstration.* On peut recouvrir  $[0, 1]^n$  par des ouverts trivialisant le revêtement donné, en nombre fini puisque cet espace est compact. On peut donc écrire  $[0, 1]$  comme réunion d'une suite  $I_1, \dots, I_k$  de segments fermés contigus tels que le revêtement soit trivialisable sur chacun des petits cubes (parallélépipèdes)  $I_{i_1} \times \dots \times I_{i_n}$  (pour  $1 \leq i_j \leq k$ ). On va montrer par récurrence sur  $\ell$  que le revêtement est trivialisable sur

$$[0, 1]^\ell \times I_{i_{\ell+1}} \times \dots \times I_{i_n}$$

(pour  $\ell = n$ , c'est le théorème). L'assertion est vraie pour  $\ell = 0$ .

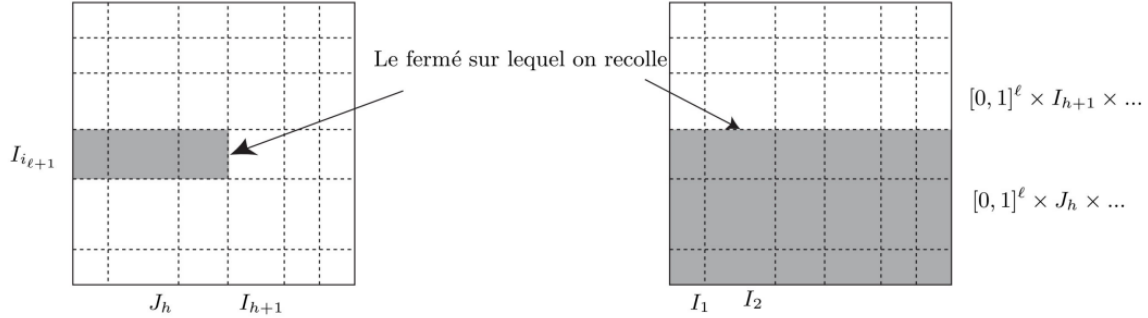


FIGURE 6. Les passages de  $\ell = 0$  à  $\ell = 1$  et de  $\ell = n - 1$  à  $\ell = n$

Supposons-la vraie pour  $\ell < n$  et montrons que le revêtement est trivialisable au-dessus de

$$[0, 1]^{\ell+1} \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n}.$$

On appelle  $J_1 = I_1, J_2 = I_1 \cup I_2, \dots, J_k = J_{k-1} \cup I_k = [0, 1]$ .

Le revêtement est trivialisable au dessus de  $[0, 1]^\ell \times J_1 \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n}$ . On va montrer, de proche en proche, qu'il est trivialisable au dessus de

$$[0, 1]^\ell \times J_2 \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n}, \dots, [0, 1]^\ell \times J_k \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n}.$$

On passe du numéro  $h$  au numéro  $h + 1$  en réunissant

$$[0, 1]^\ell \times J_h \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n} \quad \text{avec} \quad [0, 1]^\ell \times I_{h+1} \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n}.$$

L'intersection de ces deux parallélépipèdes est  $[0, 1]^\ell \times (J_h \cap I_{h+1}) \times I_{i_{\ell+2}} \times \dots \times I_{i_n}$ . Mais  $J_h \cap I_{h+1}$  est constitué d'un unique point (l'extrémité commune de  $I_h$  et  $I_{h+1}$ ), ce dont nous retiendrons que c'est une partie connexe. Le théorème est maintenant conséquence du lemme suivant.  $\square$

**Lemme 4.2.** Soit  $p : E \rightarrow B$  un revêtement. Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux fermés de  $B$  tels que  $B = B_1 \cup B_2$  et que  $B_1 \cap B_2$  soit connexe et non vide. Si le revêtement est trivialisable au-dessus de  $B_1$  et de  $B_2$ , il est trivialisable au-dessus de  $B$ .

**Remarque 4.3.** Le lemme reste vrai si on remplace "fermés" par "ouverts". L'hypothèse essentielle est que l'intersection  $B_1 \cap B_2$  est connexe. Un contre-exemple simple est celui du cercle, qui peut être écrit comme réunion de deux arcs de cercle fermés (homéomorphes à des intervalles). Sur chacun

d'eux, tout revêtement est trivialisable. Pourtant, nous savons que le cercle possède des revêtements qui ne sont pas globalement triviaux (c'est le cas de tout revêtement connexe à plus d'un feuillet). C'est que l'intersection des deux arcs de cercle n'est pas connexe.

*Démonstration du lemme.* On utilise des trivialisations

$$\Phi_1 : p^{-1}(B_1) \longrightarrow B_1 \times F_1 \quad \text{et} \quad \Phi_2 : p^{-1}(B_2) \longrightarrow B_2 \times F_2$$

La composition

$$\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} : (B_1 \cap B_2) \times F_1 \longrightarrow (B_1 \cap B_2) \times F_2$$

est un isomorphisme de revêtements triviaux sur une base connexe. Comme  $B_1 \cap B_2$  n'est pas vide, on a en particulier une bijection de  $F_2$  sur  $F_1$ . On peut donc supposer que  $F_2 = F_1 = F$  et que  $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$  est un automorphisme du revêtement trivial  $(B_1 \cap B_2) \times F \rightarrow (B_1 \cap B_2)$ . Comme  $B_1 \cap B_2$  est connexe, on a vu (exemple 3.3) que cet automorphisme est de la forme  $(b, f) \mapsto (b, \sigma(f))$ , pour une permutation  $\sigma$  de  $F$ . Définissons  $\sigma_1 : B_1 \times F \rightarrow B_1 \times F$  par la même formule. Ainsi

$$\Phi_1^{-1} \circ \sigma_1 : B_1 \times F \longrightarrow p^{-1}(B_1)$$

est une trivialisations et, sur  $(B_1 \cap B_2) \times F$ , on a  $\Phi_1^{-1} \circ \sigma_1 = \Phi_2^{-1}$ . Enfin l'application  $B \times F \rightarrow E$  qui coïncide avec  $\Phi_1^{-1} \circ \sigma_1$  sur  $B_1 \times F$  et avec  $\Phi_2^{-1}$  sur  $B_2 \times F$  est donc continue et définit clairement une trivialisations de  $p$ . □

---

On trouve également dans la référence

[https://audin.pages.math.unistra.fr/livres/smf\\_doc-math\\_6.pdf](https://audin.pages.math.unistra.fr/livres/smf_doc-math_6.pdf)

à la page p. 228 l'extrait transcrit ci-dessous :

Problème intéressant (pour Koszul ?) : sur un fibré dont les fibres sont seulement supposées *homéomorphes* à la sphère  $S^n$ , peut-on toujours mettre une structure de “sphere-bundle” de Whitney (fibré dont les fibres sont des sphères métriques) ? Là-dessus, cf. l'article de Feldbau, signé Laboureur, dans le Bull. (que je ne connais que d'après le compte-rendu de Math. Rev., d'après lequel l'article serait canulé) <sup>a</sup>.

---

<sup>a</sup>. En marge, manuscrit : “Réponse affirmative pour  $n = 1$  et  $n = 2$ ”.

Dans les pages suivantes, on trouvera les transcriptions en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X des 5 notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Jacques Feldbau (dont deux co-écrite avec Charles Ehresmann).

TOPOLOGIE. *Sur la classification des espaces fibrés.*  
 Note<sup>1</sup> de **M. Jacques Feldbau**, présentée par M. Élie Cartan.

Les espaces fibrés ont été introduits par M. Seifert<sup>2</sup>, dans le cas de variétés à 3 dimensions et de fibres circulaires. M. Whitney<sup>3</sup> a étudié certains espaces fibrés par des sphères. Nous nous proposons d'étudier ici<sup>4</sup> le cas de fibres quelconques.

1. *Définitions.* Un espace fibré est une variété de Hausdorff  $V^p$  localement euclidienne, connexe, par chaque point de laquelle passe une variété compacte, appelée fibre, et une seule, homéomorphe à une variété fixe  $F^r$ . On suppose qu'à toute fibre correspond un voisinage de fibres, c'est-à-dire un ensemble de fibres comprenant la fibre donnée et homéomorphe avec conservation des fibres à un anneau fibré. (On appelle ainsi le produit topologique  $F^r \times B^n$ , où  $B^n$  est une boule à  $n = p - r$  dimensions, les fibres étant les sous-variétés  $F^r \times m$ ,  $m$  étant un point de  $B^n$ ).

On appelle variété de base  $Q^n$  l'espace des fibres de  $V$ , où les voisinages de fibres définissent une topologie. Si l'on associe à un point  $M$  de  $V$  la fibre passant par ce point, on définit une représentation continue  $p$  de  $V$  sur  $Q$ , dite projection. On appelle recouvrement d'un ensemble  $E$  de  $Q$  l'image inverse  $p^{-1}(E)$ . Une classe d'espaces fibrés sur  $Q$  sera l'ensemble des espaces homéomorphes entre eux avec conservation des fibres. Il existe toujours une classe triviale, représentée par le produit  $Q \times F$ .

2. *Système d'homéomorphismes attaché à un espace fibré.* À tout point  $x$  de  $Q$  correspond une fibre  $F_x$  homéomorphe à  $F$ . Si l'on choisit un système d'homéomorphismes  $H(x)$  de  $F$ , sur  $F$ ,  $V$  est évidemment le produit, au sens de la théorie des ensembles, de  $Q$  par  $F$ . Pour que ce soit un produit topologique, il faut et il suffit que l'on puisse choisir la famille  $H(x)$  continue par rapport à  $x$ . Si l'on recouvre  $Q$  par des voisinages-boules  $S_i$ , on pourra toujours supposer, en vertu du théorème A énoncé plus loin, que dans chaque  $S_i$  la famille choisie  $H_i(x)$  est continue en  $x$ .

On peut évidemment remplacer  $H_i(x)$  par toute autre famille continue  $H'_i(x) = H_i(x)\varphi_i(x)$ , où  $\varphi_i(x)$  est une famille d'automorphismes de  $F$ , attachés continûment aux points  $x$  de  $S_i$ .

Si  $x \in S_i \cap S_j$ , on définit une famille continue d'automorphismes de  $F$

$$\varphi_{ij}(x) = H_i^{-1}(x)H_j(x),$$

qui devient, si l'on remplace  $H$  par  $H'$ ,

$$\varphi'_{ij}(x) = \varphi_i^{-1}(x) \varphi_{ij}(x) \varphi_j(x). \quad (1)$$

---

1. Séance du 15 mai 1939.

2. *Acta Mathematica*, 60, 1933, p. 147-238.

3. a. *Recueil math. de Moscou*, nouv. série, 1, 1936, p. 787-791 ; b. *Bull. Amer. math. Soc.*, 43, 1937, p. 785-805.

4. J'ai appris que M. de Rham a obtenu à peu près les mêmes résultats, qui à ma connaissance n'ont pas encore été publiés.

On dira que les familles  $\varphi_{ij}(x)$  et  $\varphi'_{ij}(x)$  sont équivalentes.

Si  $x \in S_i \cap S_j \cap S_k$ , on a la relation d'associativité

$$\varphi_{ik}(x) = \varphi_{ij}(x) \varphi_{jk}(x) \quad (2)$$

Enfin, exprimer qu'au point  $x_0 \in S_i \cap S_j$  correspond un voisinage de fibres revient à dire qu'il existe des automorphismes  $\psi_i(x)$  et  $\psi_j(x)$  de  $F$  attachés continûment aux points  $x$  voisins de  $x_0$  sur les frontières respectives de  $S_i$  et  $S_j$ , et tels que, pour ces points, on ait

$$\varphi_{ij} = \psi_i(x) \cdot \psi_j^{-1}(x). \quad (3)$$

Cette dernière condition entraîne d'ailleurs la condition (2).

Supposons que les  $S_i$  soient les simplexes d'une subdivision fixe de  $Q$ . Alors, à tout espace fibré sur  $Q$  correspond un système d'automorphismes  $\varphi_{ij}$  de  $F$ , défini à une équivalence près et satisfaisant à (3). Réciproquement, un tel système définit une classe d'espaces fibrés. On les obtient en formant les produits topologiques  $\Pi_i = S_i \times F$ , et en identifiant, pour  $x \in S_i \cap S_j$ , les points  $x \times \xi$  de  $\Pi_i$ , et  $x \times \varphi_{ji}(x)\xi$  de  $\Pi_j$ . On montre, en s'appuyant sur le théorème I ci-dessous, que la condition (3) est une conséquence de (2) pour les points intérieurs à une face à  $n-1$  ou  $n-2$  dimensions d'un simplexe  $S_i$ .

3. *Cas où la variété de base est un simplexe.*

**Théorème A.** *Il existe dans ce cas une seule classe d'espaces fibrés, représentée par le produit topologique de la fibre par le simplexe.*

La démonstration s'appuie sur le fait qu'un espace fibré est localement un produit topologique, et sur les théorèmes suivants :

**Théorème 1.** *Si deux simplexes de la variété de base, adjacents le long d'une face à  $n-1$  dimensions, sont recouverts par un produit topologique, il en est de même de leur réunion.*

**Théorème 2.** *Soit  $T^n$  un simplexe à  $n$  dimensions,  $t_i^n$  les simplexes constituant sa  $g^{\text{ième}}$  subdivision normale. Il existe une suite de complexes  $K_1 = t_1^n, K_2, \dots, K_n = T^n$  (avec  $N = [(n+1)!]^g$ ), formés avec les simplexes  $t_i$ , tous homéomorphes à un simplexe, et tels que  $K_h$  se déduit de  $K_{h-1}$  par adjonction aux simplexes de ce dernier d'un seul simplexe  $t_i$  adjacent aux précédents le long d'une ou de plusieurs faces à  $n-1$  dimensions.*

Ce dernier théorème se démontre par double récurrence sur  $n$  et sur  $g$ .

4. *Cas où la variété de base est une sphère  $S^n$ .*

**Théorème B.** *Il existe une correspondance biunivoque entre les classes d'espaces fibrés sur  $S^n$  et les classes de représentations de la sphère  $S^{n-1}$  dans le groupe  $G$  des automorphismes de la fibre.*

Supposons, dans ce qui suit, que la fibre est aussi une sphère et que nous limitons  $G$  au groupe orthogonal à  $r + 1$  variables  $\Omega_{r+1}$ . On obtient des *Sphere-spaces* de M. Whitney. Le théorème B permet d'énoncer des résultats relatifs soit aux classes de représentations, soit aux espaces fibrés. Ainsi, le fait que la sphère  $S^{2n}$  n'admet pas de parallélisme absolu signifie que la variété de ses directions orientées tangentes, qui est fibrée de façon évidente par  $S^{2n-1}$ , n'est pas le produit topologique de  $S^{2n}$  par la fibre. Donc il existe des représentations essentielles de  $S^{2n-1}$  dans  $\Omega_{2n}$ . De même, du fait que toute représentation de  $S^2$  dans  $\Omega_n$  est homotope à zéro<sup>5</sup>, on déduit que tout espace fibré par  $S^r$  sur  $S^3$  est homéomorphe à  $S^r \times S^3$ .

---

---

5. Cf. WHITNEY *b*, p. 798.

La seconde note aux Comptes-Rendus a pour référence : “Charles Ehresmann, Espaces fibrés associés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 213, 1941, p. 762-764”.

p. 762

ACADÉMIE DES SCIENCES

TOPOLOGIE. *Espaces fibrés associés.*

Note<sup>6</sup> de **M. Charles Ehresmann**, présentée par M. Elie Cartan.

Les résultats qui vont être exposés sont dus à la collaboration de l’auteur et de l’un de ses élèves ; ils font suite à une Note antérieure<sup>7</sup>.

I. *Méthode de construction d’un espace fibré.* Tout espace fibré de groupe structural  $G$ , de symbole  $E(B, F, G, H)$ <sup>8</sup>, peut être obtenu de la façon suivante : soient  $B$  et  $F$  deux espaces topologiques,  $G$  un groupe d’automorphismes de  $F$ ,  $\Phi$  une famille d’ensembles ouverts de  $B$  formant un recouvrement de  $B$ ,  $S = \sum_{U \in \Phi} U \times F$  la somme topologique des produits topologiques  $U \times F$  considérés comme des espaces topologiques disjoints. Soit  $R$  la relation d’équivalence dans  $S$  telle que deux points  $y_1 \in U_1 \times F$  et  $y_2 \in U_2 \times F$  soient équivalents lorsque : 1° la projection canonique de  $y_1$  sur  $U_1$ , et celle de  $y_2$  sur  $U_2$ , correspondent au même point  $x \in B$  ; 2° la projection canonique  $\bar{y}_2$  de  $y_2$  sur  $F$  se déduit de la projection canonique  $\bar{y}_1$  de  $y_1$  sur  $F$  par une transformation  $t_{U_2 U_1}(x) \in G$  dépendant du couple  $(U_1, U_2)$  et de  $x \in U_1 \cap U_2$ , de telle façon que  $\bar{y}_2$  soit une fonction continue de  $(\bar{y}_1, x)$  ; 3°  $t_{U_k U_i}(x) = t_{U_k U_j}(x) t_{U_j U_i}(x)$  pour  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ . L’espace quotient de  $S$  par  $R$  est un espace fibré  $E(B, F, G, H)$ .

Soit  $p_1$  la projection canonique de  $S$  sur  $E$  correspondant à  $R$  et soit  $p_2$  la projection canonique de  $S$  sur  $B$ , c’est-à-dire celle qui se réduit pour les points de  $U \times F$  à la projection canonique de  $U \times F$  sur  $U$ . La projection canonique  $p$  de  $E$  sur  $B$  sera l’application composée  $p_2 p_1^{-1}$ . Considérons une fibre  $F_x = p^{-1}(x)$ , où  $x \in B$ . Si  $x \in U$ , l’application réciproque de la restriction de  $p_1$  à  $U \times F$  est un homéomorphisme de  $F_x$  dans  $U \times F$  ; en le composant avec la projection canonique de  $U \times F$  sur  $F$ , on obtient un homéomorphisme  $h_{x,U}$  de  $F_x$  sur  $F$ . Si  $U' \in \Phi$  et  $x \in U'$ , on a  $h_{x,U'} = t_{U'U}(x) h_{x,U}$ . À chaque fibre  $F_x$  correspond donc une famille bien définie d’homéomorphismes de  $F_x$  sur  $F$  : c’est la famille  $H_x = G h_{x,U}$ . L’ensemble  $H$ , somme des ensembles  $H_x$ , définit une structure d’espace fibré  $E(B, F, G, H)$ .

II. *Espace fibré principal associé à  $E(B, F, G, H)$ .* Nous supposons que  $G$  est une réalisation continue fidèle d’un groupe abstrait topologique  $\tilde{G}$ . Soit  $U \in \Phi$  et désignons par  $H_U$  la somme des ensembles  $H_x$  correspondant à tous les  $x \in U$ . L’équation  $H_x = G h_{x,U}$  établit une correspondance biunivoque  $\varphi_U$  entre les éléments de  $H_U$  et les couples  $(x, s)$ , où  $x \in U, s \in \tilde{G}$ . Munissons  $H_U$  de la topologie image par  $\varphi_U$  ou de la topologie  $U \times \tilde{G}$ . Soit  $S^*$  la somme topologique  $\sum_{U \in \Phi} H_U$ , tous les espaces topologiques  $H_U$  étant considérés comme disjoints. Soit  $R^*$  la relation d’équivalence dans  $S^*$  telle que deux éléments de  $S^*$  soient équivalents lorsqu’ils correspondent au même élément de  $H$ .

6. Séance du 27 octobre 1941.

7. *Comptes-Rendus*, 212, 1941, pp. 945-948.

8. *Comptes-Rendus*, 212, 1941, pp. 945-948.

Munissons  $H$  de la topologie d'espace quotient de  $S^*$  par  $R^*$ . L'espace topologique  $R$  ainsi défini est un espace fibré  $H(B, \tilde{G}_t, \tilde{G}, H^*)$  que nous appelons espace fibré principal associé à  $E(B, F, G, H)$ . Les fibres sont les ensembles  $H_x$ ; elles sont homéomorphes à  $G$ . Étant donné  $h_x \in H_x$ , considérons l'homéomorphisme  $h_x^*$  de  $H_x$  sur  $G$  qui applique tout  $h'_x \in H_x$  sur l'élément  $s'$  de  $\tilde{G}$  réalisé par la transformation  $h'_x h_x^{-1}$  de  $G$ . Soient  $H_x$  la famille des homéomorphismes  $h_x^*$  et  $H^*$  la somme des familles  $H_x$ . La transformation  $k_x^* h_x^{-1*}$  où  $h_x^*$  est la transformation du groupe  $\tilde{G}_t$  des translations à droite de  $\tilde{G}$  qui applique  $s \in \tilde{G}$  sur  $s\sigma$ , où  $\sigma$  est l'élément de  $\tilde{G}$  réalisé par  $h_x k_x^{-1} \in G$ . L'espace  $H$  est donc bien muni de la structure d'espace fibré  $H(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^*)$ .  $H$  pourrait d'ailleurs aussi être muni d'une structure d'espace fibré à groupe structural  ${}_t\tilde{G}$ , groupe des translations à gauche de  $\tilde{G}$ . Si  $\tilde{G}$  n'est pas connexe,  $H$  n'est pas forcément connexe.

III. *Construction de tous les espaces fibrés dont les espaces fibrés principaux associés sont isomorphes à  $E^*(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^*)$ .* Un isomorphisme de  $E(B, F, G, H)$  sur  $E'(B', F', G', H')$  est un homéomorphisme  $T$  de  $E$  sur  $E'$  tel que : 1°  $T$  transforme toute fibre  $F_x$  de  $E$  en une fibre  $F'_x$  de  $E'$ ; 2° il existe un homéomorphisme  $\Theta$  de  $F$  sur  $F'$  tel que  $\Theta H T^{-1} = H'$ . Il en résulte  $\Theta G \Theta^{-1} = G'$ .

Soit  $E^*(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^*)$  un espace fibré, où  $\tilde{G}$  est un groupe topologique et  $\tilde{G}_t$  le groupe des translations à droite dans  $\tilde{G}$ . Supposons qu'il soit construit par le procédé indiqué dans I, qui fera intervenir un recouvrement  $\Phi$  de  $B$  et des transformations  $\theta_{U_j U_i}(x) \in \tilde{G}_t$ . Soit  $G$  une réalisation fidèle de  $\tilde{G}$  dans un espace topologique  $F$ . On peut construire un espace fibré  $E(B, F, G, H)$  dont l'espace fibré principal associé est isomorphe à  $E^*(B, G, G_t, H^*)$ . À tout élément  $\theta$  de  $\tilde{G}_t$  correspond un élément  $t$  de  $G$ , réalisation du même élément de  $\tilde{G}$ . Soit  $t_{U_j U_i}(x)$  la transformation correspondant à  $\theta_{U_j U_i}(x)$ . Les transformations  $t_{U_j U_i}(x)$  de  $F$ , satisfaisant aux conditions 2° et 3° de I, permettent de définir avec le recouvrement  $\Phi$  un espace fibré de symbole  $E(B, F, G, H)$  dont l'espace fibré principal associé est isomorphe à  $E^*(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^*)$ .

*Pour que deux espaces fibrés  $E(B, F, G, H)$  et  $E'(B, F, G, H')$  soient isomorphes, il faut et il suffit que leurs espaces fibrés principaux associés soient isomorphes.*

IV. *Espaces fibrés isomorphes à un produit topologique.* Nous dirons que  $E(B, F, G, H)$  est isomorphe au produit topologique  $B \times F$  lorsqu'il est isomorphe à l'espace fibré à groupe structural  $G$  défini<sup>9</sup> par  $B \times F$ . Pour que l'espace fibré principal associé  $H(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^*)$  soit isomorphe à  $B \times \tilde{G}$ , il faut et il suffit qu'il existe dans  $H$  un système continu de représentants de  $B$ , c'est-à-dire une application de  $B$  dans  $H$  telle que son composé avec la projection canonique de  $H$  sur  $B$  se réduise à l'identité. Donc, pour que  $E(B, F, G, H)$  soit isomorphe à  $B \times F$ , il faut et il suffit qu'il existe dans  $H(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^*)$  un système continu de représentants de  $B$ .

En particulier, si  $B$  est contractile en un point, tout espace fibré de base  $B$  admet un système continu de représentants de  $B$ , d'après le lemme de déformation de la Note citée<sup>10</sup>. On a donc le théorème :

*Tout espace fibré  $E(B, F, G, H)$  dont l'espace de base  $B$  est contractile en un point est isomorphe au produit topologique  $B \times F$ <sup>11</sup>.*

9. Voir *Comptes-Rendus*, 212, 1941, p. 946.

10. *Comptes-Rendus*, 212, 1941, p. 945-948.

11. Généralisation, avec nouvelle démonstration, d'un théorème dû à J. Feldbau [*Comptes-Rendus*, 208, 1939, p.

V. *Espace fibré des automorphismes de fibre associé à  $E(B, F, G, H)$ .*

Les transformations  $h_x^{-1} h'_x$  et, où  $h_x, h'_x \in H_x$  sont des automorphismes de  $F_x$ . Leur ensemble est un groupe  $A_x$ , transformé de  $G$  par  $h_x : h_x^{-1} G h_x = A_x$ . Soit  $A$  la somme des ensembles  $A_x$ . Comme dans  $H$ , on peut munir  $A$  d'une structure d'espace fibré de symbole  $A(B, \tilde{G}, \tilde{G}_a, H_*)$ . À chaque  $h_x \in H_x$  correspond l'homéomorphisme  $h_{*x}$  de  $A_x$  sur  $\tilde{G}$  qui applique  $a_x \in A_x$  sur l'élément de  $\tilde{G}$  correspondant à  $h_x a_x h_x^{-1} \in G$ . La transformation  $k_{*x} h_{*x}$  est la transformation du groupe adjoint  $\tilde{G}_a$  de  $\tilde{G}$  définie par  $G \rightarrow (k_x h_x^{-1}) G (k_x h_x^{-1})^{-1}$ .  $H_x$  est l'ensemble des homéomorphismes  $h_{*x}$ .

Si  $G$  est abélien,  $A(B, \tilde{G}, \tilde{G}_a, H_*)$  est isomorphe à  $B \times \tilde{G}$ .

---

La troisième note aux Comptes-Rendus a pour référence : “Jacques Laboureur, Les structures fibrées sur la sphère et le problème de parallélisme, *Bull. Soc. Math. France.* 70, 1942, p. 181-186”.

Jacques Laboureur<sup>12</sup> est le pseudonyme que Jacques Feldbau a été contraint d’adopter (c’est quasiment la traduction de son nom)<sup>13</sup>.

– 181 –

COMMUNICATION

FAITE À LA SECTION DE CLERMONT-FERRAND LE 16 AVRIL 1942.

---

LES STRUCTURES FIBRÉES SUR LA SPHÈRE  
ET LE PROBLÈME DU PARALLÉLISME ;

PAR M. JACQUES LABOUREUR.

L’exposé qui suit est consacré à l’étude de deux problèmes particuliers de la théorie des espaces fibrés ; il s’agit d’une part de la classification des espaces fibrés dont la variété de base est une sphère à  $n$  dimensions ; d’autre part, de l’étude de certaines conditions pour qu’une sphère soit parallélisable<sup>14</sup>.

1. *Mode de définition d’une structure fibrée.* Soit  $E$  un espace fibré,  $F$  la fibre,  $B$  la base que nous supposons recouverte par une famille d’ensembles ouverts  $U_i$ . Deux structures fibrées  $E(B, F, G, H)$  et  $E(B, F, G, H')$  correspondant au même groupe structural  $G$  seront dites isomorphes s’il existe un automorphisme  $\omega$  de  $F$  et un automorphisme  $\alpha$  de  $E$ , conservant chaque fibre<sup>15</sup>, tels que

$$H' = \omega H \alpha.$$

Il en résulte que

$$G = \omega G \omega^{-1} ;$$

autrement dit, que  $\omega$  appartient au plus grand groupe d’automorphismes de  $F$  admettant  $G$  comme sous-groupe distingué. Ce groupe  $\bar{G}$  est le normalisateur de  $G$  (dans le groupe de tous les automorphismes de  $F$ ).

Pour tout couple  $(U_i, U_j)$ , soit  $t_{ij}$  une application continue de  $U_i \cap U_j$  dans  $G$  vérifiant la relation d’associativité

$$t_{ij}(x) \cdot t_{jk}(x) = t_{ik}(x) \quad \text{pour } x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

---

12. Note de la transcriptrice : “Le laboureur fait ses semailles, et plus tard, ses récoltes.”

13. Note de la transcriptrice : cette note est (difficile) à trouver à la page 8 d’un document s’appelant *Vie de la Société*.

14. Pour les définitions et notations relatives aux espaces fibrés, voir *Comptes-Rendus*, 208, 1939, p. 1621 ; 212, 1941, p. 945 ; et 213, 1941, p. 762.

15. Condition plus restrictive que celle adoptée dans [3].

Note de la traductrice : ce [3] correspond sûrement à la troisième note aux *Comptes-Rendus* de la note de bas de page n° 14.

La donnée d'une telle famille  $T = \{t_{ij}\}$  permet de définir une structure fibrée bien déterminée <sup>16</sup>. Deux familles  $T = \{t_{ij}\}$  et  $T' = \{t'_{ij}\}$  seront dites équivalentes s'il existe un automorphisme  $\omega \in \overline{G}$  et, pour chaque  $U_i$ , une application continue  $g_i$  de  $U_i$  dans  $G$ , tels que

$$t'_{ij}(x) = \omega \cdot g_i(x) \cdot t_{ij}(x) \cdot g_j^{-1}(x) \cdot \omega^{-1}.$$

On peut alors dire : *La donnée d'une classe de familles  $T$  équivalentes définit sur  $B$  un type de structures fibrées isomorphes.*

2. *Structures fibrées sur la sphère  $S^n$ .* Supposons que la variété de base soit une sphère orientée  $S^n$  ( $n \geq 2$ ), que nous partagerons en deux hémisphères par une sphère équatoriale  $S^{n-1}$ . La famille  $T$  se réduit ici à un seul élément, à savoir une classe de représentations de  $S^{n-1}$  dans  $G$ , ou encore (si l'on suppose le groupe  $G$  localement contractile), un élément du groupe d'homotopie  $\pi_{n-1}(G)$  <sup>17</sup>.

Considérons, dans l'ensemble des applications continues de  $S^{n-1}$  dans  $G$ , la relation d'équivalence suivante : deux telles applications  $\varphi, \varphi'$  seront équivalentes s'il existe des applications  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  de  $S^{n-1}$  dans  $G$ , prolongeables chacune à une hémisphère, c'est-à-dire homotopes à 0, et un élément  $\omega$  de  $\overline{G}$  tels que

$$\varphi' = \omega \cdot \varepsilon_1 \cdot \varphi \cdot \varepsilon_2^{-1} \cdot \omega^{-1}.$$

La classe d'équivalence d'une application  $\varphi$  contient toujours la classe d'homotopie  $[\varphi]$  de cette application, mais elle ne lui est pas identique, en général, si le groupe  $G$  n'est pas connexe. D'autre part, cette classe d'équivalence contient toujours une application de  $S^{n-1}$  dans la composante connexe  $G_0$  de  $G$  contenant l'automorphisme identique de  $F$ .

Soient  $\pi_0(\overline{G})$  le groupe des composantes de  $\overline{G}$  et  $\pi_{n-1}(G_0)$  le  $(n-1)$ <sup>ième</sup> groupe d'homotopie de  $G_0$ . Les éléments de  $\pi_0(\overline{G})$  forment un système d'opérateurs pour le groupe  $\pi_{n-1}(G_0)$  : le transformé d'un élément  $c \in \pi_{n-1}(G_0)$  par un élément  $\gamma \in \pi_0(\overline{G})$  sera par définition la classe d'homotopie  $c'$  de l'application  $\varphi' = a \cdot \varphi \cdot a^{-1}$  de  $S^{n-1}$  dans  $G_0$ , dans laquelle  $\varphi$  représente une application de  $S^{n-1}$  dans  $G_0$  appartenant à la classe  $c$ , et  $a$  un automorphisme de  $F$  appartenant à la composante connexe  $\gamma$  de  $\overline{G}$ . On a alors le résultat suivant : *à tout type de structures fibrées isomorphes sur  $S^n$  correspond de façon biunivoque une classe d'éléments de  $\pi_{n-1}(G_0)$  équivalents par rapport à  $\pi_0(\overline{G})$*  <sup>18</sup>.

Cette classe sera dite classe caractéristique de la structure fibrée considérée. La classe des applications inessentiels correspond à la structure de produit topologique  $S^n \times F$ . Le résultat précédent reste valable pour  $n = 1$ , à condition de remplacer le groupe d'homotopie  $\pi_{n-1}(G_0)$  par le groupe des composantes  $\pi_0(G)$ .

3. *Le problème du parallélisme absolu dans les sphères.* On appelle variété de Stiefel  $V_{n+1,p+1}$  <sup>19</sup> l'ensemble des systèmes orthonormés et ordonnés de  $p+1$  vecteurs issus de l'origine dans l'espace numérique  $R^{n+1}$  ( $0 < p < n$ ). Ces variétés admettent une structure fibrée de base  $S^n$ , de fibre  $V_{n,p}$ , le groupe structural étant le groupe orthogonal mixte  $\Omega_n + \sigma_0 \Omega_n$  à  $n$  variables. ( $\Omega_n$  désigne le

16. Voir EHRESMANN, *Espaces fibrés associés* (Comptes-Rendus, 213, 1941, p. 762).

17. Voir W. HUREWICZ, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 37, 1935, p. 112-119.

18. Ceci constitue une rectification du théorème B de la première Note citée en note de bas de page (1). Ce théorème n'est exact que si l'on suppose  $\overline{G}$  connexe.

19. STIEFEL, *Comm. math. helv.*, 8, 1936, p. 305-353.

groupe orthogonal connexe, et  $\sigma_0$  une symétrie fixe de l'espace  $R^n$ ).

La classe caractéristique de  $V_{n+1,p+1}$  est définie dans le groupe

$$\pi_{n-1}(\Omega_n).$$

Un élément représentatif en est l'application qui à tout point  $x$  de  $S^{n-1}$  associe la symétrie par rapport au diamètre de  $S^{n-1}$  passant par  $x$ . Désignons, de façon plus précise, par  $\sigma_{n-1}(x)$  cette symétrie si  $n$  est impair, et le produit de cette symétrie par  $\sigma_0$  si  $n$  est pair. Ainsi  $\sigma_{n-1}$  est toujours une application de  $S^{n-1}$  dans le groupe connexe  $\Omega_n$ . La classe caractéristique de  $V_{n+1,p+1}$  comprend les classes d'homotopie  $[\sigma_{n-1}]$  et  $[\sigma_{n-1}^{-1}]$ , distinctes ou non suivant que  $n$  est pair ou impair.

L'espace fibré associé principal<sup>20</sup> de  $V_{n+1,p+1}$  est l'espace de groupe  $\Omega_{n+1}$  quel que soit  $p < n$ . Cet espace n'est d'ailleurs autre que  $V_{n+1,n}$ . Il est fibré par  $\Omega_n$  sur  $S^n$ . Soit  $p_n$  la projection canonique de  $\Omega_{n+1}$  sur  $S^n$ .

On dit que la sphère  $S^n$  est parallélisable s'il existe dans l'espace  $\Omega_{n+1}$  un système continu de représentants de la base  $S^n$ . Il résulte de la Note citée en<sup>21</sup> et de ce qui précède que les propriétés suivantes sont toutes équivalentes :

- (a)  $S^n$  est parallélisable ;
- (b)  $V_{n+1,p+1}$  est isomorphe au produit topologique  $V_{n,p} \times S^n$  ; en particulier : (b<sub>1</sub>)  $\Omega_{n+1}$  est isomorphe à  $\Omega_n \times S^n$ <sup>22</sup> ;
- (c) l'application  $\sigma_{n-1}$  de  $S^{n-1}$  dans  $\Omega_n$  est homotope à zéro.

À toute application  $\varphi$  de  $S^n$  dans  $\Omega_{n+1}$  correspond une application  $p_n \cdot \varphi$  de  $S^n$  dans  $S^n$ , dite projection de  $\varphi$  ; on voit immédiatement que les conditions de parallélisabilité énoncées sont encore équivalentes à la suivante :

- (d) Il existe une application de  $S^n$  dans  $\Omega_{n+1}$  projetée suivant une application de  $S^n$  dans  $S^n$  de degré topologique 1.

4. *Le problème des recouvrements fibrés.* Étant donné un espace topologique  $B$  et une fibre  $F$  convenablement choisie, peut-on construire un espace  $E$  fibré par  $F$  sur  $B$  et dont les  $n$  premiers groupes d'homotopie s'annulent ( $n \geq 1$ ) ? Pour  $n = 1$ , ce problème admet, moyennant des hypothèses convenables sur  $B$ , une réponse affirmative, et conduit à la théorie des espaces de recouvrements universels ; la fibre est alors un espace discret. Mais pour  $n > 1$  une telle fibre ne suffira pas en général, d'après un résultat de Hurewicz [théorème IV de l'article cité<sup>23</sup>].

20. Voir EHRESMANN, *Espaces fibrés associés* (Comptes-Rendus, 213, 1941, p. 762).

21. Voir EHRESMANN, *Espaces fibrés associés* (Comptes-Rendus, 213, 1941, p. 762).

22. L'implication (a)→(b) se trouve dans la Thèse de M. ECKMANN (*Comm. math. helv.*, 14, 1942, p. 141-192).

23. Voir W. HUREWICZ, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, 37, 1935, p. 112-119.

Étudions ici le cas où  $B$  est la sphère  $S^n$ . On peut alors prendre pour fibre une sphère  $S_0^{n-1}$  et pour groupe structural  $\Omega_n + \sigma_0\Omega_n$ . Les théorèmes d'isomorphie<sup>24</sup> montrent que l'on a toujours, dans ce cas,

$$\pi_k(E) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n - 2.$$

Il faut donc construire  $E$  de façon à d'abord annuler  $\pi_{n-1}(E)$ . Pour caractériser  $E$  (à un isomorphisme près), il faut se donner une application  $\varphi$  de  $S^{n-1}$  dans  $\Omega_n$  à une équivalence près. L'application  $p_{n-1} \cdot \varphi$  est une application de  $S^{n-1}$  dans  $S_0^{n-1}$  dont le degré topologique a une valeur absolue  $d$  bien déterminée, indépendante de l'application  $\varphi$  choisie dans la classe caractéristique de  $E$ . On déduit alors des théorèmes d'isomorphie que  $\pi_{n-1}(E)$  est isomorphe au groupe quotient du groupe additif  $Z$  des entiers par le groupe  $dZ$  des multiples de  $d$ . Pour que  $\pi_{n-1}(E)$  se réduise à l'unité, il faut et il suffit que  $d = 1$ , donc, en vertu de (d), que  $S^{n-1}$  soit parallélisable. Donc la propriété suivante est encore équivalente à la parallélisabilité de  $S^n$  :

(e) *Il existe un espace  $E$  fibré par  $S^n$  sur  $S^{n+1}$ , de groupe structural  $\Omega_{n+1}$  tel que  $\pi_n(E) = 0$ .*

En particulier : pour qu'une sphère  $S^N$  soit fibrée par une sphère  $S^{N-n}$  sur une sphère  $S^n$ , il faut que  $N = 2n - 1$  et que la fibre  $S^{n-1}$  soit parallélisable.

Dans les seuls cas connus de parallélisabilité d'une sphère, cette condition est d'ailleurs suffisante, car Hopf a montré<sup>25</sup> que  $S^{2n-1}$  est fibrée par  $S^{n-1}$  sur  $S^n$  pour  $n = 2, 4, 8$ .



24. Voir la deuxième des Notes citées en note de bas de page (1).

25. H. HOPF, *Fundamenta Math.*, 25, 1935, p. 427-440.

La quatrième note aux Comptes-Rendus a pour référence : “Jacques Laboureur, Propriétés topologiques du groupe des automorphismes de la sphère  $S^n$ , *Bull. Soc. Math. France*, 71, 1943, p. 206-211”. Jacques Laboureur est le pseudonyme que Jacques Feldbau a été contraint d’adopter<sup>26</sup>.

– 206 –

COMMUNICATION

FAITE À LA SECTION DE CLERMONT-FERRAND LE 21 JANVIER 1943.

---

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DU GROUPE DES AUTOMORPHISMES  
DE LA SPHÈRE  $S^n$

PAR M. JACQUES LABOUREUR.

Soit  $S^n$  la sphère à  $n$  dimensions de centre  $O$  et de rayon 1 dans l’espace  $R^{n+1}$ . Considérons le groupe  $G_n$  de tous les automorphismes de cette sphère conservant l’orientation, et le sous-groupe  $\Omega_{n+1}$  constitué par les rotations de  $S^n$ , c’est-à-dire le groupe orthogonal connexe à  $n + 1$  variables. Alors que la topologie de  $\Omega_{n+1}$  est assez bien connue, on ne sait presque rien sur celle de  $G_n$ , dans le cas où  $n > 2$ . Nous nous proposons, dans cet exposé, d’étudier les relations entre ces deux groupes.

**1. Fibration d’un groupe topologique**<sup>27</sup>. *a.* Soit  $G$  un groupe topologique,  $H$  un sous-groupe,  $B = G/H$  l’espace homogène correspondant et  $p$  la projection canonique de  $G$  sur  $B$ . Soit  $x_0 \in B$  la projection de l’unité  $e$  de  $G$ . Pour que la décomposition de  $G$  en classes suivant  $H$  soit une fibration, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : ( $\alpha$ ) Il existe dans  $B$  un voisinage  $V$  de  $x_0$  admettant dans  $G$  une section (ou système continu de représentants) relativement à la projection  $p$ ; c’est-à-dire il existe une application continue  $s$  de  $V$  dans  $G$  telle que  $p \circ s$  soit l’application identique de  $V$ . Si cette condition est remplie, on peut définir dans  $G$  une structure d’espace fibré correspondant au groupe structural  ${}_tH$  (groupe des translations à gauche de  $H$ ), de symbole  $G(B, H, {}_tH, \dots)$ .

*b.* Soit  $K$  un autre sous-groupe de  $G$ , permutable avec  $H$ , et tel que  $G$  soit produit (pas forcément direct) de  $H$  et  $K$

$$G = HK = KH.$$

Soit  $L$  l’intersection de  $H$  et  $K$ . Il existe une application canonique, biunivoque et continue, de  $K/L$  sur  $G/H$ . Pour que ce soit un homéomorphisme, il suffit que l’une ou l’autre des conditions suivantes soit vérifiée<sup>28</sup> : 1°  $K$  est ouvert dans  $G$ ; 2°  $G/H$  est séparé, c’est-à-dire  $H$  est fermé, et  $K/L$  est compact. En supposant ceci réalisé, on voit facilement que si la décomposition de  $K$  suivant  $L$  est une fibration, il en est de même de la décomposition de  $G$  suivant  $H$ .

---

26. Note de la transcriptrice : cette note est (difficile) à trouver à la page 15 d’un document s’appelant *Vie de la Société*.

27. Pour les définitions et notations relatives à la Topologie générale et aux groupes topologiques, voir [1]; pour les espaces fibrés, voir [2], [3], [4]. (Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie donnée en Appendice.)

28. [1], Chap. I, § 9, prop. 2 et § 10, coroll. 2 du Th. 1.

c. Appliquons ce qui précède au groupe  $G_n$ . Soit  $G_n^0$  le groupe d'isotropie de  $x_0 \in S^n$  (sous-groupe de  $G_n$  laissant fixe  $x_0$ ). On voit facilement que  $G_n^0$  est fermé dans  $G_n$  et que  $G_n$  est le produit de  $G_n^0$  et  $\Omega_{n+1}$

$$(A) \quad G_n = G_n^0 \Omega_{n+1} = \Omega_{n+1} G_n^0.$$

La condition 2° ci-dessus est vérifiée et nous pouvons énoncer : *Le groupe  $G_n$  est fibré par  $G_n^0$  sur  $S^n$ .*

**2. Rétraction de  $G_n^0$  sur  $G_{n-1}$ .** a. Soit  $E$  un espace topologique,  $F$  un sous-espace de  $E$ . On dit que  $F$  est rétracte de déformation de  $E$  s'il existe une application continue  $g$  du produit topologique  $E \times [0, 1]$  sur  $E$  telle que :

- 1°  $g(x, 1) = x$  quel que soit  $x \in E$  ;
- 2°  $g(x, 0) \in F$  quel que soit  $x \in E$  ;
- 3°  $g(x, t) = x$  si  $x \in F$ , quel que soit  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ )<sup>29</sup>.

On dit que  $E$  est contractile sur  $F$  si l'application identique de  $E$  est homotope à une application de  $E$  sur  $F$ , c'est-à-dire si l'on impose seulement à  $g$  les conditions 1° et 2°. On a, dans ce cas, le lemme de Kneser [5] :  $E$  et  $F$  ont même nombre de composantes continûment connexes<sup>30</sup> et toute composante de  $E$  contient une composante de  $F$  et une seule. Si  $E$  est continûment connexe,  $F$  l'est aussi, et leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. On peut ajouter la remarque que, dans ce cas, les groupes d'homotopie de tous ordres de  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

b. Les points de la boule  $B^n$  intérieure à  $S^{n-1}$  peuvent être représentés biunivoquement par les couples  $(r, x)$  ( $0 \leq r \leq 1, x \in S^{n-1}$ ), à condition d'identifier tous les points  $(0, x)$ . Soit  $\Gamma_n$  le groupe des automorphismes de  $B^n$  conservant l'orientation.  $\Gamma_n$  contient le sous-groupe  $\Gamma'_n$  des automorphismes "radiaux" de  $B^n$  définis par  $(r, x) \rightarrow (r, \alpha(x))$ , où  $x \rightarrow \alpha(x)$  est un automorphisme de  $S^{n-1}$ , et  $\Gamma'_n$  est évidemment isomorphe à  $G_{n-1}$ . On a le théorème d'Alexander [5], [6] :  $\Gamma'_n$  est rétracte de déformation de  $\Gamma_n$ . En effet, tout  $\varphi_1 \in \Gamma_n$  définit un automorphisme de  $S^{n-1}$ , donc un automorphisme radial  $\varphi_0$  bien déterminé. Soit  $h_t$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $t$ . La fonction

$$\begin{aligned} g(\varphi_1, t) &= \varphi_0 && \text{pour } r \geq t \\ &= h_t \varphi_1 h_t^{-1} && \text{pour } r \leq t \end{aligned}$$

définit la rétraction de  $\Gamma_n$  sur  $\Gamma'_n$ . On remarquera que  $g(\varphi_1, t)$  définit un homomorphisme de  $\Gamma_n$  dans lui-même, c'est-à-dire que

$$g(\varphi_1 \cdot \psi_1, t) = g(\varphi_1, t) \cdot g(\psi_1, t).$$

c. Soit  $j$  une application de  $B^n$  sur  $S^n$  telle que  $S^{n-1}$  soit appliqué sur  $x_0$  et que l'intérieur de  $B^n$  soit appliqué topologiquement sur  $S^n - \{x_0\}$ . La correspondance qui à tout  $\varphi \in \Gamma_n$  associe  $f = j \circ \varphi \circ j^{-1} \in G_n^0$  est un isomorphisme. On peut alors transposer la rétraction d'Alexander de  $\Gamma_n$  sur  $\Gamma'_n$  aux images topologiques  $G_n^0$  et  $G_{n-1}$ , et énoncer le

29. On remplace d'habitude 3° par la condition plus faible :  $g(x, 0) = x$  si  $x \in F$ .

30. On appelle composante continûment connexe de  $E$  l'ensemble des points de  $E$  qui peuvent être joints à l'un d'eux par une courbe continue (image continue du segment  $[0, 1]$ ).

**Théorème I.** *Il existe une rétraction de déformation homomorphe de  $G_n^0$  sur un sous-groupe isomorphe à  $G_{n-1}$ .*

Pour simplifier, nous considérerons, dans tout ce qui suit,  $G_{n-1}$  comme un sous-groupe de  $G_n^0$ .

d. Du lemme de Kneser, de la rétraction précédente et de la relation (A), on déduit par récurrence le

**Théorème II.** *Le groupe  $G_n$  est continûment connexe.*

Ce théorème, qui semble nouveau pour  $n > 2$ , est d'ailleurs une conséquence du théorème III ci-dessous. On peut en donner une application à la théorie des nœuds. Étant donnée une subdivision simpliciale de  $S^3$ , un nœud est une image topologique simpliciale d'une circonférence dans  $S^3$ , et deux nœuds sont équivalents s'ils sont homologues dans un homéomorphisme de tout l'espace conservant l'orientation. Il résulte du théorème II que deux nœuds équivalents sont homologues dans une isotopie de tout l'espace<sup>31</sup>.

### 3. Fibration associée au produit direct de deux sous-groupes d'un groupe topologique.

Reprenons les notations du n° 1, et soit  $D = H \times K$  le produit direct de  $H$  et  $K$ . À tout élément  $(a, b)$  de  $D$ , faisons correspondre l'élément  $q(a, b) = a.b = \tau$  de  $G$ .  $q$  est une application continue de  $D$  sur  $G$ . Soit  $\Delta = q^{-1}(e)$  l'image inverse de  $e$ ; on voit aisément que  $\Delta$  est l'ensemble des éléments  $(l, l^{-1})$ , où  $l \in L$ .  $\Delta$  est homéomorphe à  $L$ , et l'on peut y définir une structure de groupe image de celle de  $L$ , mais il est à remarquer que, muni de cette structure,  $\Delta$  n'est pas un sous-groupe de  $D$ . Les classes d'équivalence définies dans  $D$  par l'application  $q$ , c'est-à-dire les images inverses  $\Delta_\tau = q^{-1}(\tau)$  des éléments  $\tau \in G$ , sont toutes homéomorphes. De façon précise, à tout point  $(a_0, b_0)$  de  $\Delta_\tau$  correspond un homéomorphisme bien déterminé  $h_{\tau,0}$  de  $\Delta_\tau$  sur  $\Delta$ , et si  $h_{\tau,1}$  est un autre homéomorphisme de  $\Delta_\tau$  sur  $\Delta$ , correspondant au point  $(a_1, b_1)$  de  $\Delta_\tau$ , on voit que  $h_{\tau,1}h_{\tau,0}^{-1}$  est un automorphisme de  $\Delta$ , défini par

$$\varphi_\lambda(l, l^{-1}) = (\lambda.l, l^{-1}.\lambda^{-1}),$$

où  $\lambda = a_1^{-1}a_0 = b_1b_0^{-1} \in L$ . L'ensemble de ces automorphismes  $\varphi_\lambda$  forme un groupe  $S$  isomorphe à  $L$ . Pour que  $D$  soit un espace fibré (de base  $G$ , de fibre  $\Delta$ , de groupe structural  $S$ ), il faut encore qu'il soit localement un produit topologique. Cette condition n'est pas toujours vérifiée, mais elle l'est en particulier si l'on se place dans les conditions du n° 1, b, à savoir si  $K/L$  et  $G/H$  sont homéomorphes et si la décomposition de  $K$  suivant  $L$  est une fibration. Dans ce cas,  $D$  admet une fibration qui n'est pas triviale, en ce sens qu'elle ne correspond pas à une décomposition de  $D$  suivant un sous-groupe.

Remarquons que si  $G$  n'est pas abélien, on obtient une deuxième structure fibrée, en définissant la projection de  $D$  sur  $G$  par  $q'(a, b) = b.a$ .

**4. Rétraction de  $G_n$  sur  $\Omega_{n+1}$ .** a. En appliquant les résultats du n° 1, c, on voit que  $D_n = G_n^0 \times \omega_{n+1}$  est fibré sur  $G_n$  par une fibre  $\Delta$  homéomorphe à  $\Omega_n$ . On peut alors démontrer par récurrence le

---

31. Ceci constitue une réponse à une question de Seifert-Threlfall (*Lehrbuch der Topologie*, p. 323, Note 39).

**Théorème III.** *Il existe une rétraction de déformation  $r_1$  de  $G_n$  sur  $\Omega_{n+1}$  vérifiant la condition suivante :*

(C) Si  $\tau, \tau' \in G_n, \tau^{-1}\tau' \in \Omega_{n+1}$ , alors

$$r_t^{-1}(\tau) \cdot r_t(\tau') = \tau^{-1}\tau'$$

quel que soit  $t$ .

Ce théorème est évidemment vrai pour  $n = 0$ , car  $G_0 = \Omega_1 = \{e\}$ . Supposons-le vrai pour  $n - 1$ , et démontrons-le pour  $n$ . Tout d'abord, on remarque que la condition (C) est vérifiée pour la rétraction d'Alexander de  $G_n^0$  sur  $G_{n-1}$ , puisque celle-ci est homéomorphe. Avec les hypothèses faites, il existe donc une rétraction de déformation de  $G_n^0$  sur  $\Omega_n$ , vérifiant (C). On en déduit qu'il existe une rétraction de déformation de  $D_n = G_n^0 \times \omega_{n+1}$  sur  $\Omega_n \times \Omega_{n+1}$ , et que les fibres restent conservées pendant la rétraction, ce qui permet, en composant avec la projection  $q$ , d'en déduire une rétraction de  $G_n^0 \cdot \Omega_{n+1} = G_n$  sur  $\Omega_n \cdot \Omega_{n+1} = \Omega_{n+1}$ . Enfin on vérifie immédiatement que cette rétraction satisfait encore à la condition (C).

*Remarque.* En utilisant la fibration associée à la projection  $q'$ , on montrerait de même l'existence d'une rétraction de déformation  $s_t$  de  $G_n$  sur  $\Omega_{n+1}$ , satisfaisant à (C') : si  $\tau'\tau^{n+1} \in \Omega_{n+1}$ , alors

$$s_t(\tau') \cdot s_t^{-1}(\tau) = \tau'\tau^{-1}$$

quel que soit  $t$ .

b. Relativement à l'espace homogène  $E_n = G_n/\Omega_{n+1}$ , on a le résultat suivant :

**Théorème IV.** *L'espace  $G_n$  est isomorphe au produit topologique  $E_n \times \Omega_{n+1}$ .*

Pour cela, il suffit de montrer que  $E_n$  admet une section dans  $G_n$  relativement à la décomposition de  $G_n$  en classes suivant  $\Omega_{n+1}$ . À tout  $\tau \in G_n$ , faisons correspondre son image  $r(\tau) \in \Omega_{n+1}$  par la rétraction  $r = r_0$ , et posons  $\sigma(\tau) = \tau \cdot r^{-1}(\tau)$ . On vérifie que : 1° si  $\tau^{-1}\tau' \in \Omega_{n+1}$ ; alors  $\sigma(\tau) = \sigma(\tau')$ , d'après (C); 2° quel que soit  $\tau \in G_n$ , on a  $\sigma^{-1}(\tau)\tau \in \Omega_{n+1}$ . Il en résulte que  $\sigma$  définit bien une section de  $E_n$  dans  $G_n$ .

**Corollaire I.** *L'espace  $E_n$  est contractile en un point.*

**Corollaire II.** *Tous les groupes d'homotopie de  $E_n$  sont nuls.*

**Corollaire III.** *Tout espace fibré par une sphère  $S^n$ , l'espace de base étant un complexe, admet des structures plus précises correspondant au groupe structural  $\Omega_{n+1}$ , et toutes ces structures sont de même classe.*

Ce dernier corollaire résulte du corollaire II et d'un résultat de M. Ehresmann [4]. Il explique et justifie le rôle joué par le groupe orthogonal dans la théorie des espaces fibrés par des sphères.

## Bibliographie.

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I, II, III (*Act. Sc. et Ind. Paris*, 1940-1942).
  - [2] CH. EHRESMANN et J. FELDBAU, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, 212, 1941, p. 945-948).
  - [3] CH. EHRESMANN, *Espaces fibrés associés* (*C. R. Acad. Sc.*, 213, 1941, p. 762-764).
  - [4] CH. EHRESMANN, *Espaces fibrés de structures comparables* (*C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 144-147).
  - [5] H. KNESER, *Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen* (*Math. Zeitschr.*, 25, 1926, p. 362-372).
  - [6] J. W. ALEXANDER, *On the deformation of an  $n$ -cell* (*Proc. Nat. Acad. Sc., U.S.A.*, 9, 1923, p. 406-407).
-

La cinquième note aux Comptes-Rendus, coécrite avec Charles Ehresmann, a pour référence : “Charles Ehresmann, Jacques Feldbau, *Sur les propriétés d’homotopie des espaces fibrés*, C. R. Acad. Sci. Paris, 212, séance du 4 juin 1941, p. 945-948.”<sup>32</sup>

**TOPOLOGIE. Sur les propriétés d’homotopie des espaces fibrés.**  
**Note de MM. CHARLES EHRESMANN et JACQUES FELDBAU,**  
**présentée par M. ÉLIE CARTAN.**

*Définition d’un espace fibré associé à un groupe  $G$  d’automorphismes de la fibre.* Soit  $E$  un espace topologique connexe<sup>33</sup>,  $R$  une relation d’équivalence dans  $E$ ,  $B = E/R$  l’espace quotient de  $E$  par  $R$  (ou *espace de base*),  $p$  l’application canonique de  $E$  sur  $B$ ,  $F_x$  (appelée fibre) la classe d’équivalence  $p^{-1}(x)$  correspondant à  $x \in B$ ,  $F$  un espace topologique,  $G$  un groupe d’automorphismes de  $F$ . Associons à tout  $x \in B$  une famille  $H_x$  d’homéomorphismes de  $F_x$  sur  $F$  telle que :

- a. si  $h, h' \in H_x$ , on ait  $h'h^{-1} \in G$ ;
- b. à tout  $x \in B$  corresponde un voisinage  $U_x$  et un homéomorphisme de  $p^{-1}(U_x)$  sur le produit topologique  $U_x \times F$ , cet homéomorphisme, qui induit pour  $y \in U_x$  un homéomorphisme  $\bar{h}_y$  de  $F_y$  sur  $\{y\} \times F$ , étant tel que l’application composée de  $h_y$  avec la projection canonique de  $U_x \times F$  sur  $F$  appartienne à  $H_y$ .

L’ensemble  $H$  des familles d’homéomorphismes  $H_x$  définit sur  $E$  une *structure d’espace fibré associée au groupe  $G$* . On peut la désigner par  $E(B, F, G, H)$ .

Par exemple, le produit topologique  $B \times F$  définit une telle structure d’espace fibré. Les fibres sont les ensembles  $\{x\} \times F$ , et la famille  $H_x$  s’obtient en composant l’application canonique de  $\{x\} \times F$  sur  $F$  et les automorphismes de  $F$  appartenant à  $G$ .

Le groupe  $G$  peut être le groupe de tous les automorphismes de la fibre  $F$ . Alors  $H_x$  est la famille de tous les homéomorphismes de  $F_x$  sur  $F$ , et les conditions *a* et *b* se réduisent à la suivante : à tout  $x \in B$  correspond un voisinage  $U_x$  tel qu’il existe un homéomorphisme de  $p^{-1}(U_x)$  sur  $U_x \times F$  qui applique, pour tout  $y \in U$  la fibre  $F_y$  sur  $\{y\} \times F$ . Si  $G$  se réduit à la transformation identique dans  $F$ ,  $H_x$  se compose d’un seul élément et l’espace  $E(B, F, G, H)$  est le produit topologique  $B \times F$ .

**LEMME DE DÉFORMATION.** *Soient  $K$  un complexe fini,  $\Phi_0(K)$  une représentation continue de  $K$  dans  $E$ ,  $P\Phi_0(K) = \varphi_0(K)$  la projection de cette représentation sur  $B$ . Toute déformation continue  $\varphi + (K)$  de  $\varphi_0(K)$  dans  $B$  est la projection d’une déformation continue  $\Phi_t(K)$  de  $\Phi_0(K)$  dans  $E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).*

On peut subdiviser  $K$  assez finement pour que,  $\sigma^p$  désignant un simplexe quelconque de la subdivision, à chaque  $t$  et à chaque  $\sigma^p$  corresponde un voisinage ouvert  $U_x$  satisfaisant à la condition *b* et contenant  $\varphi_t(\sigma^p)$ . Le lemme se démontre ensuite par récurrence sur la dimension de  $K$ .

<sup>32</sup>. Enfin, une note posthume a été publiée par Charles Ehresmann et est consultable ici.

<sup>33</sup>. Pour la terminologie, voir N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique*, I, *Théorie des Ensembles*; III, *Topologie générale*, Paris, 1939-1940.

*Groupes d'homotopie.*  $E$  étant connexe, il résulte des définitions que  $B$  est connexe et que, si  $F$  n'est pas connexe, ses différentes composantes connexes sont homéomorphes. Soit  $\pi_n(F)$  le  $n^{\text{ième}}$  groupe d'homotopie de l'une d'elles. Soient  $\pi_n(E), \pi_n(B)$  les  $n^{\text{ième}}$  groupes d'homotopie<sup>34</sup> de  $E$  et  $B$ . Soit  $\pi'_n(F_0)$  le sous-groupe de  $\pi_n(F_0)$  formé des classes de représentations de la sphère  $S^n$  dans une fibre  $F_0$  qui sont homotopes à zéro dans  $E$ . Soit  $\pi'_n(E)$  le sous-groupe de  $\pi_n(E)$  formé des classes de représentations de  $S^n$  dans  $F_0$ . Soit  $\pi'_n(B)$  le sous-groupe de  $\pi_n(B)$  formé des classes de représentations de  $S^n$  dans  $B$  qui sont projections de représentations de  $S^n$  dans  $E$ . Lorsqu'on change  $F_0$ ,  $\pi'_n(E)$  est invariant et  $\pi'_n(F_0)$  reste homologue à un sous-groupe fixe  $\pi'_n(F)$  de  $\pi_n(F)$  dans un isomorphisme de  $\pi_n(F_0)$  sur  $\pi_n(F)$ .

**Théorème.** *On a les isomorphismes suivantes :*

$$(1) \quad \pi'_{n-1}(F) \simeq \frac{\pi_n(B)}{\pi'_n(B)} \quad (n > 1),$$

$$(2) \quad \pi'_n(E) \simeq \frac{\pi_n(F)}{\pi'_n(F)} \quad (n \geq 1),$$

$$(3) \quad \pi'_n(B) \simeq \frac{\pi_n(E)}{\pi'_n(E)} \quad (n \geq 1).$$

*Si, de plus,  $F$  est connexe, on a*

$$(1') \quad \pi'_1(B) \simeq \pi_1(B).$$

Voici une esquisse de la démonstration de (1) : Toute représentation  $\varphi(S^{n-1}) \subset F_0$ , homotope à 0 dans  $E$ , est prolongeable à une représentation  $\Phi(B^n) \subset E$  de la boule  $B^n$  intérieure à  $S^{n-1}$ , coïncidant avec  $\varphi$  sur  $S^{n-1}$ . Par projection, on en déduit une représentation  $\psi(S^n) \subset B$ . En prenant tous les prolongements possibles  $\Phi$  de  $\varphi$ , on associe à  $\varphi$  une famille de  $\psi$  qui forme un système de classes de  $\pi_n(B)$ , et ce système de classes est un élément du groupe quotient  $[\pi_n(B)]/\pi'_n(B)$ , qui ne dépend que de la classe de  $\varphi$ . On définit ainsi une application de  $\pi'_{n-1}(F)$  dans  $[\pi_n(B)]/\pi'_n(B)$ . Inversement, en utilisant le lemme de déformation, on montre qu'une représentation  $\psi(S^n) \subset B$  peut toujours être définie par projection d'une représentation de  $B^n$  dans  $E$ , la frontière  $S^{n-1}$  de  $B^n$  étant représentée dans une fibre. Donc  $\pi'_{n-1}(F)$  est appliqué sur  $[\pi_n(B)]/\pi'_n(B)$ . On vérifie que cette application est un homomorphisme et que le noyau de cet homomorphisme se réduit à l'unité.

*Applications.* – a. Soit  $E$  un espace de recouvrement de  $B$ . L'espace  $E$  est fibré sur  $B$ . Chaque fibre (ensemble de points recouvrant un point de  $B$ ) est un espace discret. On retrouve le théorème d'Hurewicz

$$\pi_n(E) \simeq \pi_n(B) \quad (n > 1).$$

b. Soit  $V^n$  une variété admettant la sphère  $S^n$  comme espace de recouvrement universel ( $n > 1$ ), et supposons que  $V^n$  soit recouvert  $q$  fois. On voit alors que les classes de représentations de  $S^n$  dans  $V^n$  sont caractérisées par leur type d'homologie, c'est-à-dire par leur degré, et que l'ensemble de ces degrés est formé des multiples de  $q$ .

---

34. HUREWICZ, *Proceedings Akad. Amsterdam*, 37, 1935, p. 112-119. On suppose que tous ces groupes d'homotopie existent.

c. *Groupes d'homotopie des espaces projectifs complexes.* – La sphère  $S^{2k+1}$  est fibrée par des cercles  $S^1$ , la variété de base étant l'espace projectif  $P_k$  à  $k$  dimensions complexes<sup>35</sup> ( $k \geq 1$ ). Il résulte des théorèmes d'isomorphie que :

$$\begin{array}{ll}
 1^\circ & \pi_1(P_k) = 0; \\
 2^\circ & \pi_2(P_k) \simeq \pi_1(S^1) \quad (\text{cyclique infini}); \\
 3^\circ & \pi_n(P_k) \simeq \pi_n(S^{2k+1}) \quad (n > 2).
 \end{array}$$


---

35. H. HOPF et M. RUEFF, *Commentarii math. Helv.*, 11, I, 1939-1940, p. 46-61.

Ci-dessous sont transcrits trois extraits d'un texte de John McCleary *History of Manifolds and Fibre Spaces : Tortoises and Hares*<sup>36 37</sup>.

Le lièvre est un idéaliste : il privilégie une généralité élégante et englobante. Il souhaite bâtir un nouveau paradis et une nouvelle Terre, sans demi-mesures. La tortue, quant à elle, adopte une vision beaucoup plus restrictive. Elle affirme que son modeste objectif est de formuler plus clairement les théorèmes connus...

*citation de J. F. Adams*

Le déclenchement de la Seconde Guerre mondiale entraîna la fermeture de l'université de Strasbourg et le transfert de ses activités à Clermont-Ferrand, en France non occupée. De là, Ehresmann et Feldbau poursuivirent leurs travaux sur les espaces de fibres. Feldbau publia une seconde note dans le Bulletin de la Société Mathématique de France où il analysait les travaux de Stiefel sur la parallélisabilité dans son contexte. Cette note parut sous le pseudonyme de Jacques Laboureur. Feldbau, juif, craignant les conséquences de la publication de son nom dans une revue parisienne, choisit le pseudonyme Laboureur, forme française de Feldbau. Il fut arrêté en 1943 et mourut à Auschwitz le 22 avril 1945.

Ehresmann et Feldbau étendirent la définition de Feldbau, qui s'appliquait à des variétés, à des espaces, ce qui aboutit à la notion d'espace fibré général associé à un groupe  $G$  d'automorphismes de la fibre. La définition leur permit de prouver leur *lemme de déformation* par un argument de subdivision. Ce lemme est la propriété d'homotopie du revêtement qui donne la définition actuelle d'une fibration :

Une application  $p : E \rightarrow B$  a la propriété d'homotopie de revêtement si, pour toute application  $\Phi_0 : K \rightarrow E$  qui a comme projection  $p \circ \Phi_0 = \phi_0 : K \rightarrow B$  où  $\phi_0(x) = \phi(0, x)$  pour une homotopie  $\phi : [0, 1] \times K \rightarrow B$ , alors il existe une application continue  $\Phi : [0, 1] \times K \rightarrow E$  avec  $\Phi(0, y) = \Phi_0(y)$  et  $p \circ \Phi = \phi$ .

Le lemme amène directement aux relations parmi les groupes d'homotopie d'un espace fibré  $E$ , son espace base  $B$ , et la fibre  $F$ . En langage moderne (qui n'était alors pas disponible), il existe une longue suite exacte :

$$\dots \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots$$

---

36. Référence : [https://pages.vassar.edu/mccleary/files/2011/04/history.fibre\\_.spaces.pdf](https://pages.vassar.edu/mccleary/files/2011/04/history.fibre_.spaces.pdf).

37. On omet les références bibliographiques, identiques à celles déjà fournies.

Ci-dessous, je retranscris le texte En hommage à Jacques Feldbau, publié par ses nièce et neveu..

*En mémoire de Jacques Feldbau, 80 ans après Auschwitz*

Né à Strasbourg en 1914 dans une famille juive orthodoxe, d'origine germano-polonaise, Jacques Feldbau avait tous les talents : brillant mathématicien, il avait réussi l'agrégation de mathématique à 24 ans bien qu'ayant refusé de composer à l'épreuve qui se tenait un Shabath. Ses recherches en topologie et sur les espaces fibrés - parfois publiées sous le pseudonyme de "Laboureur" - ont débouché sur un théorème qui porte son nom. Par ailleurs mélomane et pianiste, il était aussi champion universitaire de brasse-papillon, capitaine de l'équipe de football Yechouroun, passionné de cyclisme et de ski. . .

Révolté par l'antisémitisme ambiant qui se développait à Strasbourg à partir de 1930, il fonda avec quelques amis étudiants le groupe de défense Bar Khorba, qui – entre autres - chassa un groupe d'acteurs pronazis voulant se produire au théâtre de Strasbourg, arracha le panneau "Interdit aux juifs" cloué sur la Maison Kammerzell, se bagarra avec les jeunes fascistes traitant de youpine Mme Cécile Brunshwicg, alors ministre de l'Éducation, de passage à l'université de Strasbourg...

Officier dans l'aviation à l'automne 1939, il effectue des missions depuis Tours jusqu'en juin 1940. Démobilisé, il enseigne les mathématiques, puis se replie à Clermont-Ferrand fin 1940 avec l'université de Strasbourg. Il y donne des cours, travaille à son doctorat, et participe aussi à la "Sixième EIF" (organisme de résistance des Éclaireurs Israélites).

Arrêté à Clermont lors de la "rafle de la Gallia" du 24 juin 1943, Jacques Feldbau est déporté le 7 octobre 1943 dans le convoi n° 60 pour Auschwitz. Ses camarades d'infortune ont unanimement attesté de son courage, et de sa solidarité à l'égard des autres déportés. Il parvint finalement à se faire nommer secrétaire de l'infirmerie du camp d'extermination, ce qui lui permettra de reconforter d'innombrables compagnons de misère. Pour oublier la faim, le froid, et les souffrances quotidiennes, il organisa des cours de mathématiques le dimanche après-midi ; cours auxquels participa notamment Jean Samuel.

En janvier 1945, lors de l'évacuation du camp d'Auschwitz, il est l'un des milliers cheminant en haillons, dans la neige, par une température sibérienne. Il mourra d'épuisement le 22 avril 1945, près du camp de Ganacker. Ses camarades le porteront jusqu'au camp sur une civière de branchage. Ils ont témoigné que leur ami avait alors un léger sourire sur les lèvres...

Jacques, le chagrin inextinguible de ta soeur, notre mère, Ruth-Jeanne Feldbau - épouse de Robert Debré <sup>a</sup> - continue à sourdre en nous quatre-vingt ans plus tard. Mais c'est à ton dernier sourire que nous voulons penser : sourire de suprême dédain à l'égard de tes bourreaux, mais aussi - et surtout - sourire de foi profonde et invincible.

Ta nièce et ton neveu, tes seuls descendants : Joëlle et Jacques Debré

<sup>a</sup>. Robert Raymond Debré, 19/4/1911-9/10/1973.

Annexe : la page de garde de l'article d'Ehresmann et Feldbau, dont le seul auteur retenu sera Ehresmann.

