

Transcription de l'intervention de Jean-Pierre Serre, le jour de ses 100 ans.

[...] ¹

Vers les années 1950, il y avait des choses extraordinaires qui venaient de se faire. L'une des choses qui m'avait le plus frappé, c'était la théorie des algèbres normées de Gelfand. Ce dictionnaire entre algèbres commutatives avec évolution et une petite condition sur les normes, très innocente en apparence, qui entraînait, et qui entraîne toujours, que cette algèbre normée, c'est l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact. Et des théorèmes redoutables de ma jeunesse, comme la décomposition spectrale des hermitiens, des choses comme ça, en ont résulté presque immédiatement. Alors ça, ce genre de dictionnaire, ça m'a toujours beaucoup plu en maths. Et il y en a eu de plus en plus, au fur et à mesure qu'on va avancer. Alors, parmi les choses qui se sont faites dans cette période, après 1950, disons, il y avait de vieilles questions qui ont été résolues. Et ça, c'était assez frappant. Par exemple, une question qui était très à la mode vers 1950-1951, c'était le cinquième problème de Hilbert. À savoir, vous avez un groupe localement topologique, localement compact, et vous supposez, disons, que topologiquement, c'est une variété. Il y a une variété de dimension n , peu importe n .

Et qu'est-ce qu'on doit démontrer? On doit démontrer qu'il y a, enfin, démontrer ou contre-exempler, qu'il y a une structure différentiable sur ce groupe, d'ailleurs unique, qui est compatible avec sa structure de groupe topologique, de telle façon que ça devienne un groupe de Lie. Et effectivement, ça a été démontré. Le point essentiel a été fait par Gleason vers 1951, à peu près, et complété par Montgomery-Zippin. Et le résultat définitif est assez simple. Les groupes localement compacts, au fond, ils proviennent tous des groupes de Lie de la façon suivante. Tout d'abord, on remplace le groupe, c'est trop gros, par un sous-groupe ouvert. Alors ça reste encore un groupe topologique. Et ce groupe ouvert, il va être limite projective de groupes de Lie. Ce qui fait que finalement, les outils pour fabriquer des groupes localement compacts, ce sont les groupes de Lie, avec des limites projectives, avec aussi des limites inductives, puisqu'on peut agrandir, et puis des groupes totalement discontinus, qui, à l'époque, étaient considérés un peu comme une petite saleté qui s'ajoutait. Alors évidemment, dès que j'ai fait de la théorie des Galois, cette petite saleté est devenue la chose essentielle. Mais pour l'instant, au point où on en était, c'était ça la situation.

Alors, cet outil était très satisfaisant, mais on pouvait se dire : "à quoi ça peut bien servir en maths?" bien sûr. Ailleurs, il n'y a guerre d'espoir. Mais en maths, eh bien, ça n'a servi à rien pendant assez longtemps. Et puis, au bout de plus de 20 ou 30 ans, il se trouve que Gromov en a eu besoin pour sa théorie des groupes nilpotents. Et ça a joué un rôle essentiel dans la démonstration de Gromov. Un rôle essentiel, mais les maths ont toujours des surprises. Eh bien, ensuite, Tao a montré que cet aspect essentiel n'était pas essentiel. On peut effectivement obtenir des résultats de Gromov sans utiliser la solution du cinquième problème. Enfin, c'est comme ça. Alors ça, c'est l'une des choses remarquables de cette période-là. Il y a eu d'autres problèmes de Hilbert qui ont été résolus. Mais le cinquième était spécialement attirant, en particulier pour moi. J'aurais beaucoup aimé faire ma thèse sur ce sujet-là.

1. *J'ai oublié de lancer l'enregistrement dès le début de l'intervention de Jean-Pierre Serre. Il a dit qu'il souhaitait nous parler du plaisir des mathématiques, mais non pas du plaisir qu'il avait pris à les faire, mais du plaisir qu'il avait pris à les regarder progresser.*

Et puis, ça s'est passé autrement. Qu'est-ce qu'il y a eu d'autre ? Alors, dans les problèmes de Hilbert, il y a le fait que pour les équations polynomiales à coefficients entiers, on ne peut pas décider à l'avance qu'il y aura des solutions. Je suis incapable de vous donner l'énoncé précis de ça. Mais ça, c'est Julia Robinson et Matiassevitch qui ont fait ça. Pour l'instant, il ne me revient pas d'autres choses si importantes. Mais quand même, quelque chose qui était déjà un petit peu ancien quand j'ai commencé, c'était la théorie des distributions de Schwartz. Alors, cette théorie, bon, elle avait un aspect, comment dire, un peu populaire. Elle donnait un sens à la fonction de Dirac. La fonction de Dirac, bon, ce n'était pas une fonction, mais c'était une distribution. Et du coup, on pouvait la dériver et on pouvait interpréter des distributions de couches, par exemple, de choses. Mais il y avait un aspect dans la théorie des distributions qui, à l'époque, n'a pas été bien compris. Qu'est-ce qu'on veut pour les distributions ? On veut des choses qui étendent les fonctions. Et comment on les définit ? Eh bien, on ne les définit pas comme des fonctions, mais comme des duals de fonctions. Alors, quand vous avez un objet qui joue deux rôles comme ça, d'un côté ou de l'autre, quelle est la conclusion intelligente (intelligente ou pas ?), la conclusion que vous pouvez en tirer ? Eh bien, qu'il y a une forme bilinéaire derrière et un accouplement.

Alors, dans l'espace $\mathbb{R}^n$, qui était l'espace initial de Schwartz, le $\mathbb{R}^n$ s'était donné pour l'intégrale sur l'espace entier, pour la forme évidente des x_1 et des x_n . Mais si vous êtes sur deux variétés, là, ça devient moins évident et même amusant. Et en réalité, ça contient en germe pratiquement ce qu'on appelle le théorème de dualité pour certains faisceaux, et même le théorème de dualité qui est moins connu que celui-là, le théorème de dualité pour les équations aux dérivées partielles de type elliptique. Là aussi, il y a une dualité, il y a des équations adjointes et vous avez exactement comme dans Riemann-Roch des formules. Bon, ça, s'il me revient quelque chose d'autre qui me frappe beaucoup, des choses anciennes résolues, ah, eh bien, des choses anciennes résolues, bon, évidemment il y a Fermat, ça, il n'y a pas de doute, mais je dois dire qu'à l'époque, je considérais Fermat, je le considère encore un peu de la même manière maintenant, comme quelque chose plutôt pour les amateurs qui s'amusent avec ça et qui croient le résoudre, mais que telle équation n'ait pas de solution, ce n'est pas... a priori, ce n'est pas passionnant. Alors, ce qui s'est passé, c'est que par contre, la démonstration était passionnante. C'est ça, et ça, c'est bien mieux, au fond. Bon, alors, maintenant, comment vais-je grouper les choses dont j'ai envie de vous parler ? Eh bien, je vais commencer par un sujet qui, à mon avis, n'est pas estimé, comme on dit, à sa juste valeur. Plus exactement, il est estimé moins qu'à sa juste valeur. C'est la notion de *contre-exemple*.

Le terme de contre-exemple est un peu... est un peu désagréable. On a l'impression que c'est quelque chose qui n'est pas bien, quoi. Alors qu'en fait, un contre-exemple, ça s'énonce ainsi : "il existe, machin, qui a telle et telle propriété". C'est le théorème. Simplement, la propriété en question, les gens disent "Ah, on ne croyait pas que c'était vrai". Donc, c'est en fait un résultat positif très intéressant. Alors, il y a eu pas mal de contre-exemples intéressants. Alors, quels sont les contre-exemples ? Ah, par exemple, imaginons que nous sommes dans l'amphithéâtre Hermite. Vous le connaissez. Et vous êtes, je ne sais plus quelle année. J'ai oublié l'année. J'ai oublié l'année et je suis assis au troisième rang, au milieu. Et à côté de moi, il y a Terjeanian. Et Terjeanian me glisse à l'oreille pendant que quelqu'un parle. C'est Nicolas Bourbaki qui parle ! Il me glisse à l'oreille : "Ça y est, j'ai un contre-exemple à la conjecture d'Artin."

Alors, quelle conjecture d'Artin ? C'est celle-ci : vous prenez le corps des nombres p -adiques, vous fixez un p , vous prenez un polynôme homogène, à coefficients p -adiques, d'un certain degré et à un certain nombre de variables. Et vous supposez que le nombre de variables est strictement plus grand que le carré du degré. Alors, la conjecture, c'est qu'il y a un zéro, non trivial, différent de 0. Alors, Artin avait fait cette conjecture, il ne l'avait pas publiée, mais c'était au même moment où il faisait la conjecture analogue sur les corps finis, celle qui a été démontrée par Chevalley et Warning. Et elle est devenue connue, c'était Lang, surtout, qui avait fait de la propagande pour cette conjecture. Et elle était connue en degré 2 depuis très longtemps, en degré 3 depuis pas longtemps, et en degré 4 pour les $\mathbf{Q}_p$ p différent de 2. Et c'était justement l'intervenant que l'on avait chargé, peut-être que c'était moi d'ailleurs qui m'occupait du séminaire, qui lui avait dit "Vous exposerez la démonstration", c'était un théorème de Ax et Katz, que ça marche pour tout p assez grand. Et ce "assez grand", c'était finalement strictement plus grand que 2. Et puis, il me dit comme ça au séminaire, "J'ai un contre-exemple en degré 4." Alors, on attend que l'exposé soit fini. On passe au tableau et des gens s'agglomèrent autour de Terjanian et moi.

Et il nous écrit une belle équation de degré 4 à coefficients entiers, tout petits d'ailleurs, des 2 et des 4. Et il nous dit "Ça n'a pas de solution." Je regarde et hop, je trouve une solution. Alors Terjanian nous dit "Ah oui, j'ai fait une erreur de signe." Il change un signe. Alors, on cherche : "Pas de solution.". Et effectivement, quand je rentre chez moi, je me rappelle que dans un demi-sommeil, je vais vérifier complètement que ce n'était pas difficile du tout, qu'il n'y avait pas de solution. Alors, c'est le genre de contre-exemple qui, en quelque sorte, arrête un sujet. On ne peut pas dire que ça a eu beaucoup de conséquences parce que les gens ont abandonné l'idée de chercher des variantes de ça. Ce n'était pas très passionnant. Il y a d'autres conjectures. Bon, je vais quand même parler encore de conjectures qui n'ont pas beaucoup de conséquences mais qui représentent plutôt des choses très difficiles.

Les travaux de Enflo sur les espaces de Banach et sur l'existence de choses bizarres dans certains espaces de Banach avec des opérateurs qui n'ont pas de souveraineté stable ou des choses comme ça. Il y a eu deux grands contre-exemples par Enflo, l'un répondant à une question de Grothendieck, sur l'approximation par les opérateurs compacts, mais c'étaient des démonstrations extrêmement difficiles. Bombieri s'était acharné à essayer de comprendre et à simplifier un petit peu la démonstration de Enflo et ça lui a pris du temps et pourtant, il est rapide, Bombieri.

Alors, quels autres exemples ? Ah, voilà un autre exemple curieux. Et vous allez d'abord penser que ce n'est pas un contre-exemple. C'est Carlson qui démontre que toute fonction L^2 périodique est presque partout somme de sa série de Fourier. Alors, ce sont des genres dénoncés où quand on est un peu innocent, on se dit "Ah ben oui, bien sûr, c'est le développement de Fourier d'une fonction périodique, bon, point." Puis, quand on est un peu moins innocent, on se dit "Ah, Diable ! Oui !" mais on démontre ça dans l'espace L^2 . Et ce n'est pas pareil."

Et les gens avaient essayé pendant longtemps de démontrer ça. Et il y avait eu un contre-exemple, je crois, pour les fonctions qui sont simplement de valeur absolue sommable, L^1 au lieu de L^2 . Et Carlson raconte que pendant deux ans, il a essayé de faire un contre-exemple. Et puis, au bout de deux ans, à force de se heurter à la difficulté de faire un contre-exemple, il a fait une démonstration. Alors ça, c'est aussi une chose pour laquelle j'aurais tendance à faire de la propagande. Le fait de

chercher tantôt un contre-exemple, tantôt une démonstration pour un sujet. Il n'y a aucune raison de croire dans les conjectures, que ce soit de Hodge, ou de n'importe qui, ou de Grothendieck... ou de moi. Ça n'a pas d'importance. Elles ne sont pas démontrées. Et j'ai moi-même fait des conjectures dans des choses bien plus faciles que celle de Enflo. J'ai aussi une expérience d'avoir fait pendant presque toute une journée l'essai de construire un contre-exemple et puis d'avoir fini par comprendre pourquoi il ne marchait pas, et en comprenant pourquoi il ne marchait pas, de faire une démonstration.

Et je sais que Nagata, le grand expert de l'algèbre commutative, raconte que pour toutes les questions d'algèbre commutative qu'il a étudié, il essayait toujours les deux points de vue. Il faut dire qu'en l'algèbre commutative, vous manquez un petit peu d'intuition sur ce qui doit être vrai ou faux, des histoires de chaînes d'idéaux premiers qui font ceci ou cela. En tout cas, Nagata faisait ça et étant Nagata, en général, l'un des deux marchait, raisonnablement, rarement les deux à la fois ! Alors ça, ce sont des cas assez simples, mais ça va quand même m'inciter à vous dire que je suis choqué quelquefois par ce que disent ou écrivent des collègues. Par exemple, Grothendieck, même, qui un jour, je crois, m'a écrit : "Pour moi, la conjecture de Hodge et celle de Tate sont des, je ne sais plus, des axiomes, des faits.", elles sont vraies, quoi ! Et ça, ça... Ça me choque, ça me choque beaucoup. À mon avis, elles ne sont pas vraies, provisoirement.

Alors, il y a des fois où c'est encore bien mieux. C'est bien mieux parce que le contre-exemple ouvre un domaine complètement différent. Alors là, il y a un nom qui s'impose, je vais l'écrire (on va voir si ce stylo marche), le nom de Milnor. Alors, il a fourni un contre-exemple à quoi ? En fait, ce n'est pas vraiment une conjecture sur quelque chose parce que personne n'avait osé tout à fait dire que si on a une variété topologique, il y a une seule structure différentiable dessus à homéomorphisme près, enfin, il y avait des petites choses comme ça. Personne n'avait quand même osé dire ça, mais on le croyait. En tout cas, on avait le sentiment que la structure différentiable sur une variété, c'est un petit, un petit rabiot que l'on met dessus, sans aucune gravité, sans aucune importance. Et puis, Milnor arrive et il nous fabrique des exemples, et avec des variétés extrêmement simples à écrire. Ce n'était pas du tout des monstres qu'on fait quelquefois en topologie où on passe à la limite, où on enchevêtre des choses. Ce n'est pas ça du tout. Des variétés bien lisses, bien, des fibrés en sphère, des choses comme ça, absolument splendides et qui, du coup, changent nos idées sur ce genre de choses. On s'arrête de voir la structure différentiable comme sans importance. Elle devient décisive.

Il y a eu des tas de cas intermédiaires. Le Kervaire-Milnor de la classification des structures sur les sphères de dimension 7, par exemple. Sauf qu'il y en a 7, si je me souviens bien, il ne faut pas généraliser cet énoncé. Mais le cas que je trouve splendide, c'est le cas des variétés de dimension 4. Alors ça, ce sont deux auteurs et j'ai toujours du mal à retrouver leur nom. Quelqu'un va m'aider sûrement. Est-ce que c'est Freedman et Donaldson ? Ah, bravo, merci. Freedman et Donaldson, les variétés de dimension 4. Alors là, compact, connexe, non vide, simplement connexe. Ce qui fait que le grand intérêt, c'est le H^2 , et sur ce H^2 , vous avez une forme bilinéaire, symétrique, de l'étude pour un carré, qui est de discriminant 1 ou -1 . Je crois que n'importe quelle forme quadratique de discriminant 1 est possible. Donaldson, qui est un ancien élève de Atiyah, suppose que c'est différentiable. Et il montre que les seules formes quadratiques possibles sont des sommes de ± 1 , les sommes les plus bêtes que vous pouvez faire de discriminant 1. Alors, non seulement c'est joli, mais en plus, ça montre qu'il existe des formes, qu'il existe des variétés topologiques de dimension

4, simplement quadratiques, etc., qui n'ont pas de structure différentiable. Il suffit d'en faire une, dont la forme, par exemple, est une forme du type de 8. Alors, ça, vraiment, c'est... Alors, Milnor ne s'est pas arrêté là, parce que tant qu'il était à démolir des conjectures, il a continué. Alors, il a continué et il a fait des contre-exemples également à ce que les Allemands appelaient la Hauptvermutung, la conjecture principale en topologie combinatoire, qui était que, par exemple, sur une variété, il y a une seule structure combinatoire possible, à subdivision près, la notion d'équivalence de ce cas combinatoire était, à vrai dire, assez désagréable, à tel point qu'il y a un mathématicien que je ne nommerai pas, qui travaillait dans ce sujet et l'a quitté, parce qu'il n'arrivait plus à savoir exactement quelles étaient les définitions qu'il fallait employer.

Bon, mais en tout cas, Milnor, lui, il a démolé ça. Bon, mais je crois que j'ai assez fait de propagande sur la notion de contre-exemple. Mais j'aurais quand même ajouté à ça une petite critique. Cet exposé ne devrait pas avoir de critique. J'ai déjà fait une fois à Harvard un exposé entièrement de critiques, sur la façon de mal écrire des mathématiques. Donc là, j'ai envie de vous parler de choses, mais quand même, ça m'agace quand je vois des gens qui disent "Malheureusement, la condition A n'est pas équivalente à la condition B". Quels imbéciles ! Ils savent à ce point-là de leur démonstration que A n'est pas B. Donc en disant ça, ils sont en train de dire "Oh, quel dommage que 0 ne soit pas égal à 1 !". Je suis toujours choqué par les gens qui mettent une émotion de ce style-là. L'émotion de savoir, oui, mais l'émotion de regretter quelque chose qui est vrai, je ne comprends pas. C'est absolument contraire à notre métier. Bon. Alors, on va s'arrêter là-dessus.

Et je vais continuer, en reprenant, maintenant, à partir de 1950, quelles sont les différentes étapes qui m'ont frappé. De façon générale, il y a le fait, qui va tout à fait dans la direction de Bourbaki, que les différentes branches des maths se sont rapprochées de plus en plus. Et avec grand succès. Par exemple, prenez la théorie des groupes de Lie. Traditionnellement, ce sont des groupes de Lie réels. Alors, d'accord, on accepte des groupes de Lie complexes, mais c'est déjà un petit peu différent. Mais on s'est aperçu que si on prenait le corps des p -adiques, on trouvait des groupes. Bon, localement, ils ne sont pas très jolis. Un espace p -adique, c'est plein de trous. Mais ils ont cependant un espace tangible, une algèbre de Lie. On peut les classer. On peut les classer le plus souvent, quitte à les remplacer par un sous-groupe ouvert d'indice fini. Et ça a été une cause de grand progrès, parce qu'on s'est aperçu que, en théorie des Galois, on trouve des groupes profinis, et quelquefois, et même souvent, ce sont des groupes p -adiques de dimension finie, des groupes de Lie. Et tout à fait au début de la théorie, ça a énormément servi. Je me suis intéressé à essayer de montrer que les groupes de Galois pour les groupes elliptiques sont gros. La première chose que je me suis dite, c'est : "Ah, quelle est leur algèbre de Lie ?" Parce que l'algèbre de Lie est le plus important, au fond, parce qu'elle est invariante quand on remplace le groupe par un sous-groupe ouvert. Ce qui fait que, si vous faites une extension finie du corps, la technique ne change pas. Alors, rapidement, Grothendieck m'a dit : "Ce n'est pas bien non plus. Ce qui est mieux, c'est de prendre l'enveloppe algébrique, le plus petit groupe algébrique". En pratique, ça revenait presque au même, mais c'était le bon point de vue... une fois de plus !

Et puisque je citais Grothendieck, autant dire que dans les choses qui m'ont frappé, ça a été les débuts de Grothendieck, avec en particulier sa théorie des espaces nucléaires, de faire des théories d'espaces topologiques qui sont à la fois utiles, ce sont des espaces de distribution, par exemple, et qui se comportent presque comme des espaces de dimension finie. Ils ont une notion de produit

tensoriel qui a toute une série de bonnes vertus. Je me rappelle avoir été à l'Institut avec Bott et d'avoir dit à Bott : 'Écoute, le machin que tu fais, si tu prenais des distributions, tu verrais, tu fais comme si c'était un produit tensoriel. La cohomologie va être le produit tensoriel et ainsi de suite.' Ça, c'était magnifique. Il a quitté le sujet, comme vous savez, parce qu'au fond, il avait résolu des questions intéressantes, sauf celle qu'Enflo a résolue négativement.

Mais j'ai perdu le fil de ce que je voulais vous raconter. Alors, une chose surprenante de cette époque, ça a été un théorème de Grothendieck, c'est ça. Ça a été un théorème Grothendieck parce que, bien sûr, c'est sa forme de Riemann-Roch qui a frappé tout le monde à l'époque, son Riemann-Roch avec des paramètres, on n'avait jamais pensé à ce genre de choses et ensuite, c'est devenu standard. Et pour lui, pour lui, au fond, les espaces, ça n'existait pas. C'était les flèches qui l'intéressaient, pas les objets. D'ailleurs, c'est un point de vue. Ce n'est pas totalement ridicule. C'est ce qu'il faut se dire. Par exemple, quand vous enseignez l'algèbre linéaire, alors maintenant, vous enseignez l'algèbre linéaire en disant que ce sont des modules, s'ils sont libres ou pas libres. Il y a des matrices. Non, il n'y a pas de matrices, ce sont des applications linéaires. Et dans le temps, c'était, on prend $\mathbb{R}^n$ et on regarde. En fait, du point de vue des catégories, le point de vue ancien avec les entiers est très propre. L'ensemble des objets, c'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls. L'ensemble des flèches entre 3 et 5, ce sont les matrices 3×5 . Et d'ailleurs, Deligne, qui est en train de rigoler, a fabriqué de magnifiques catégories, comme la catégorie des $GL(n)$, mais n est un paramètre t , ou bien le groupe symétrique S_n et n est un paramètre t .

J'espère qu'il a publié ça, je ne me souviens plus. Est-ce que tu as publié ça ? Oui, ah, très bien. Bon, alors, continuons, parce que quand même, il s'est passé beaucoup de choses dans ces années-là, et dans les années 1950 en particulier. Donc, la clarification des grandes catégories, comme la géométrie algébrique, la géométrie analytique, différentielle, d'accord, mais de façon plus originale, Ah, quand même, ce qui m'a le plus frappé de tout, alors, c'est vraiment ce qu'on appelle le programme de Langlands. Là, alors, c'est un niveau différent, parce que c'est vraiment faire des connexions. Je ne connais personne qui fait des connexions aussi étonnantes. Le seul qui s'en approche, pour moi, c'était André Weil. Lui, il avait vu longtemps avant Cartan ou d'autres, par exemple, qu'il y avait des espaces fibrés en géométrie algébrique. Alors, mais le programme de Langlands, et ce qui était beau, ce qui était beau, ce qui est toujours beau dans le programme de Langlands, c'est qu'il contient des quantités de petits cas particuliers.

Et l'un de ces petits cas a donné Wiles et la résolution de Fermat auxiliairement, mais surtout le fait que les courbes elliptiques sont modulaires. Donc, ce lien entre le modulaire et le reste est extrêmement puissant. D'ailleurs, nos prédécesseurs, en particulier nos prédécesseurs allemands, aimaient beaucoup les formes modulaires et les vieux livres, les livres, disons, par exemple, je pense, Fricke (son Algebra) ou bien Weber (son Algebra), deux livres, donc, chacun ayant trois volumes. Et il y avait un volume entier sur les formes modulaires. En particulier, il donnait explicitement des équations modulaires reliant des courbes elliptiques liées par des isogénies de tel type. Et ça, ça avait été un petit peu oublié par les gens entre 1900 et 1950.

L'école japonaise, vers 1950, était revenue là-dessus, sans doute sous l'influence de Iyanaga, qui avait fait ses études en Allemagne et en France, d'ailleurs, je crois, aussi. Donc là, alors voyons, est-ce que j'ai un peu de temps ? Oui, j'ai même beaucoup de temps. Mais je ne vais quand même

pas essayer de faire une liste, parce qu'il y a tellement de choses qui se sont passées dans cette période-là des années 1950. Par exemple, la conjecture de Mordell par Faltings, et qui était essentiellement la culmination d'une série de programmes fait par l'école russe et en France par Spiro. Mais c'est Faltings qui a fait la démonstration définitive. Du côté modulaire, il se passait aussi des tas de choses, parce que le rapport entre forme modulaire et représentation galoisienne, cet aspect théorie des groupes, des congruences, par exemple, quand je me suis aperçu de ça, c'était délicieux ! Des formules de Ramanujan un peu bizarres. Ah, ben oui, il y a une représentation de degré 2. Et puis voilà, c'était... Et c'est Deligne qui a démontré qu'elle existait. Moi, je m'étais borné à les voir, ce n'est pas pareil. Bon, écoutez, je crois que je vais presque terminer là, parce que je n'ai pas cité encore l'une des choses de ce siècle qui m'a beaucoup frappé. Mais je l'ai réservée pour la bonne bouche, comme on dit.

C'est-à-dire la démonstration par le monsieur qui est là, il s'appelle Deligne, des conjectures de Weil. Alors, sur les conjectures de Weil, j'ai déjà fait quelquefois des exposés où j'ai essayé de la présenter... Je ne vais pas vous raconter la démonstration, et même en suivant de démonstration. Ce n'est pas du tout que ce soit difficile, parce que ce qui est remarquable dans cette démonstration, c'est qu'elle n'est pas difficile, modulo tout ce qui a été fait avant. Non, il y a quand même... Bon. Alors, voilà. En 1995, sauf erreur, en 1995, je crois, le 30 janvier 1995, nous sommes à l'École Normale Supérieure. Petite salle. On va donner des Doctorats honoris causa. Alors, on donne un Doctorat honoris causa à un historien, et il y a quelqu'un qui présente les travaux de l'historien. Et ce quelqu'un, il nous raconte... Bon, avec mes mains, je vous explique (*Serre agite ses mains pour montrer que l'exposé précédant le sien est long, mais long.*)... Il raconte des tas de choses. En principe, un petit exposé comme ça, ne devrait pas être long. Bon, en tout cas, heureusement, il termine.

Et c'est moi qui suis sensé, qui suis chargé de raconter les raisons pour lesquelles Deligne se voit décerner un Doctorat honoris causa de l'École Normale Supérieure. Alors, j'ai dit : "Imaginez...". Je lève la main, et je dis : "Il était une fois...". Et je prends la voix du grand-père qui s'adresse à ses petits-enfants pour leur raconter un conte de fées. "Alors, il était une fois... Il était une fois dans une forêt, une clairière, avec un beau jardin, brillamment éclairé, avec des fleurs splendides, mais le jardin était entouré de grilles. Il y avait une porte, une grande porte blindée, où il n'y avait pas de serrure, mais par les grilles, on pouvait voir qu'il y avait de très belles fleurs, et on pouvait deviner que ces fleurs, si on les cueillait, elles repousseraient. C'était un jardin magique, ce n'était pas un jardin de tous les jours. Alors, évidemment, j'ai essayé de pénétrer dans ce jardin, moi aussi, mais ça ne marchait pas. C'était un jardin qui était très bien protégé. Par exemple, on pouvait essayer, par force brutale, d'enfoncer la porte. La porte résistait. On pouvait essayer de se faufiler à travers la grille, mais les barreaux se rétrécissaient, ou s'allongeaient. Ça ne marchait pas. Et puis, ce monsieur Deligne, qui est là, est arrivé, il est arrivé devant la porte, il a fait des petits gestes, il a pris dans sa poche un peu de quelque chose, il n'a pas dit grand chose. Et la porte s'est ouverte. La porte s'est ouverte, et on a pu rentrer, et on a tous pu cueillir des fleurs et tout ça. Alors, il y avait, derrière le jardin, d'autres jardins qui étaient fermés aussi, mais ce serait pour une autre fois. Mais ce jardin-là...", c'est ça que j'ai dit ce jour-là, "ce jardin-là, c'est celui qui est là, qui nous l'a ouvert. Et c'est pour ça que donnons le titre de Docteur honoris causa à Monsieur Pierre Deligne.", et je me suis arrêté là.

Et je m'arrête là.