

Transcription d'une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, 1881, volume de janvier, p.448-450.

Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\dots$ Note de M. J. FRANKLIN, présentée par M. Hermite

Euler a obtenu ce développement au moyen d'un arrangement spécial des opérations de multiplication. Je vais obtenir le terme général comme solution d'un problème de partitions.

Le coefficient de x^w dans le développement est évidemment l'excès du nombre de manières dont on peut décomposer w en un nombre pair de parties entières et différentes sur le nombre de manières dont on peut le décomposer en un nombre impair de telles parties ; c'est donc cette différence qu'il faut trouver.

Je désignerai par (a) un nombre qui est $\geq a$.

Supposons que, dans chaque partition, les parties soient écrites en ordre ascendant, et considérons une partition quelconque contenant r nombres dont le premier est 1. En effaçant le nombre 1 et augmentant de l'unité le dernier nombre, on obtient une partition qui contient $r-1$ nombres dont le premier est (2) et qui n'a pas deux nombres consécutifs à sa fin, et, réciproquement, de chaque partition qui contient $r-1$ nombres dont le premier est (2) et qui n'a pas deux nombres consécutifs à sa fin, on obtient (en diminuant le dernier nombre de l'unité et mettant 1 devant le premier nombre) une partition contenant r nombres dont le premier est 1. Or, ces classes de partitions étant l'une d'ordre pair et l'autre d'ordre impair, leur présence n'affecte pas la différence cherchée, et nous n'avons à considérer que les partitions commençant par (2) et finissant par deux nombres consécutifs.

Parmi ces partitions, considérons une quelconque contenant r nombres dont le premier est 2 ; en effaçant 2 et augmentant de l'unité chacun des deux derniers nombres, on obtient une partition qui contient $r-1$ parties dont la première est (3) et qui n'a pas trois nombres consécutifs à sa fin ; et réciproquement. On peut donc supprimer ces classes de partitions, et il ne faut considérer que les partitions qui commencent par (3) et qui finissent par trois nombres consécutifs. En continuant ainsi, il est évident qu'on éloignera pas à pas toutes les partitions, à moins qu'il n'y ait des cas dans lesquels le procédé indiqué ne soit pas applicable. Considérons donc le cas général où les partitions à considérer commencent par (n) et finissent par n nombres consécutifs.

1° Si le premier nombre d'une partition est n , on doit effacer n et augmenter de l'unité chacun des n derniers nombres ; cela peut se faire, à moins que le nombre des parties ne soit exactement n . Dans ce cas, w est la somme de n nombres consécutifs dont le premier est n , c'est-à-dire

$$w = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

2° Si le premier nombre est $(n+1)$ et si la partition n'a pas $n+1$ nombres consécutifs à sa fin, on doit diminuer de l'unité chacun des n derniers nombres et mettre le nombre n devant le premier

nombre ; rien n'empêche d'opérer ainsi, à moins que le premier nombre ne soit $n + 1$ et le nombre des parties exactement n (car alors la partition transformée contiendrait deux fois le nombre n , ce qui n'est pas possible). Dans ce cas,

$$w = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

Nous avons donc démontré que les partitions d'ordre pair contrebalancent exactement celles d'ordre impair, à moins que w ne soit de la forme $\frac{n(3n \pm 1)}{2}$, et que, dans ce cas, il restera, après toutes les suppressions possibles, une partition qui contient n parties. On a donc

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4) \cdots &= \sum_n (-1)^n x^{\frac{n(3n \pm 1)}{2}} \\ &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} + \dots \end{aligned}$$

Tout ce qui précède peut s'exprimer plus brièvement comme il suit. Étant donnée une partition quelconque (à parties inégales), écrite, comme auparavant, en ordre ascendant, on peut appeler partition conjuguée celle qui en dérive par la règle suivante. Soient r le premier nombre de la partition donnée, n le nombre exact de nombres consécutifs à sa fin. Si $r > n$, on obtient la partition conjuguée en effaçant r et augmentant de l'unité chacun des r derniers nombres ; si $r \leq n$, on l'obtient en diminuant de l'unité chacun des n derniers nombres et mettant n devant le premier nombre. Et l'on s'assure facilement que, par la même règle, la première partition est la conjuguée de la seconde. Mais, si tous les nombres sont consécutifs et que $r = n$ ou $r = n + 1$, on ne peut pas former la conjuguée, et c'est seulement dans ces cas qu'on ne peut pas la former¹.

Ainsi les conjuguées de

$$23\ 467, \quad 3\ 589, \quad 3\ 456, \quad 6\ 789$$

sont

$$3\ 478, \quad 23\ 578, \quad 567, \quad 45\ 678;$$

mais aux partitions 4 567, 5 678 on ne peut pas former de conjuguées.

1. En fait, je crois qu'on pourrait mettre en regard la note de Franklin avec les arbres de compositions de la note ici <https://denisevellachemla.eu/avenue.pdf> (toutes proportions gardées) et il faut comprendre comment l'appariement de Franklin relie certaines feuilles.