Transcription d'un exposé de Luc Illusie au Colloque Grothendieck de janvier 2009

Je tente de me remémorer les faits ; il me faut faire appel à mes souvenirs. Ces derniers jours, nous avons examiné des applications récentes de la théorie des topos - ce qui revient, en quelque sorte, à voir la fin du film. J'aimerais donc, à présent, tenter d'expliquer comment tout a commencé, comment cette théorie a vu le jour et comment elle s'est développée au cours des années 1960.

De manière générale, nous nous accordons assez bien sur le fait que la théorie des topos est née le 21 avril 1960, lors du séminaire Chevalley. Vous y étiez. Moi, je n'y étais pas, mais vous, oui. Il y fut question d'"espaces fibrés algébriques" ; vous y avez développé une notion de "fibré" un peu plus générale que celle des fibrés usuels dans la topologie de Zariski - des fibrés qui, pour reprendre le langage actuel, sont localement (au sens de la topologie de Zariski) "trivialisés" par des revêtements finis. À l'issue de l'exposé, Grothendieck est allé voir Serre pour lui expliquer comment, à partir de là, il envisageait non seulement de concevoir, mais de construire cette fameuse topologie que nous recherchions, par un processus de "localisation".

Quelques mois plus tard, lors d'un congrès - le vôtre, je crois -, Grothendieck est revenu sur le sujet. Il a expliqué qu'en combinant la théorie des faisceaux, la topologie locale, et l'idée de Serre - selon laquelle la notion pertinente de fibré était précisément celle que nous cherchions -, il voyait désormais comment bâtir cette topologie. Bien entendu, quelques années se sont écoulées avant que le projet ne prenne réellement forme ; on peut se demander pourquoi. En réalité, c'est assez simple : d'après ce que m'a confié Serre, Grothendieck ne savait tout simplement pas par quel bout commencer.

C'était ardu, c'était une entreprise difficile. Certes, il avait d'autres occupations à cette époque ; il n'a pas pour autant oublié ses travaux, notamment sa série d'exposés au séminaire Bourbaki sur les fondements de la géométrie algébrique, ainsi que ses interventions au séminaire Cartan, en 1961, consacrées aux fondements de la géométrie algébrique complexe. Il a également élaboré les SGA1, SGA2 et SGA3.

En 1961, Grothendieck se trouvait à Harvard - j'y reviendrai - et il a entrepris la rédaction des EGA. L'EGA4 a été publié en 1963 ou 1964. Il faut aussi noter, me semble-t-il, qu'en 1958, les concepts n'étaient peut-être pas encore tout à fait mûrs ; il manquait certains fondements, et même la notion de "morphisme étale" n'avait pas, à mon sens, été correctement clarifiée.

D'ailleurs, le terme "morphisme étale" n'existait pas encore. Serre m'a fait remarquer que la notion de "domaine étale" était utilisée en géométrie complexe ; par ailleurs, Godement avait évoqué des "espaces étales". Le mérite de Grothendieck, en matière de terminologie, a été de... pardon, je me suis trompé, donc, "domaine étale". Quoi qu'il en soit, les diverses définitions équivalentes de "morphisme étale" - incluant les notions de morphisme plat, non ramifié, étale, ainsi que les propriétés de séparation infinitésimale - constituaient le fondement de la démarche initiale qui allait permettre de construire la cohomologie étale. C'est ce qui est exposé au début du SGA1. Il existait, bien

---

Référence : https://www.dailymotion.com/video/x8jesz. Ce colloque s'est tenu en janvier 2009 et était lié aux célébrations des 50 ans de l'IHÉS.

Révision de la transcription par une ia : Denise Vella-Chemla, octobre 2026

entendu, l'opération inverse - la localisation, ou la descente - mais celle-ci avait déjà été largement développée dans ses exposés au sein du séminaire Bourbaki, et Giraud avait également contribué à mener ce projet à terme. Il était tout naturel qu'avec cette nouvelle notion de localisation étale ou du moins revêtement étale fini, on parvienne à obtenir les outils adéquats, notamment la bonne catégorie de faisceaux (le bon π_1). C'est précisément l'objet du SGA1, dans lequel Grothendieck propose une construction relativement formelle de cette catégorie (du π_1, dans un cadre qui préfigure déjà celui de la théorie tannakienne - faisant intervenir, en quelque sorte, l'automorphismes des foncteurs fibre. Il y aura donc pas mal de "sorites".

Pour la petite histoire, Mourre m'a raconté qu'il a suivi les cours de Grothendieck - qui n'avaient pas lieu ici, mais à la Fondation Thiers. Il m'a confié que Grothendieck développait alors des "sorites" - une sorte de "calvaire" (une accumulation fastidieuse de détails techniques). Serre, impatient, lui a demandé : "Alors, quand allez-vous nous montrer quelque chose de vraiment substantiel ?" Ce "quelque chose de substantiel" visait, en réalité, à déterminer le groupe fondamental - non pas au sens motivique, mais le groupe fondamental π_1 - d'une courbe X définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique p. L'objectif était d'obtenir, pour le quotient "pro-p" de ce groupe fondamental, une structure analogue à celle du groupe fondamental d'une courbe définie sur le corps des nombres complexes.

Pour y parvenir, Grothendieck a dû démontrer des théorèmes de spécialisation pour le groupe fondamental. Ces théorèmes allaient, un peu plus tard, constituer l'un des piliers des résultats fondamentaux concernant les courbes sur des corps algébriquement clos. Le groupe fondamental est largement traité dans le SGA1 ; par ailleurs, le SGA2 contient des théorèmes de type "Lefschetz" qui, eux aussi, joueront par la suite un rôle crucial. Quoi qu'il en soit, la question de savoir comment appréhender les groupes de cohomologie supérieurs restait entière ; il n'est donc guère surprenant que Grothendieck n'ait guère progressé sur ce point précis.

Malgré tout, je pense que Grothendieck avait sans doute en tête l'idée que si nous comprenons déjà la cohomologie des courbes - plus précisément, la cohomologie des courbes à coefficients constants - dès les années 1950 (je fais référence à un article de Kawada, rédigé dans une autre langue, qui aborde la question en termes galoisiens ; quoi qu'il en soit, c'était, pour l'essentiel, déjà connu), dans l'esprit de Grothendieck, l'idée - avec son célèbre schéma X au-dessus de S - consistait, en quelque sorte, à utiliser des fibrations en courbes (éventuellement en s'appuyant sur des suites spectrales de Leray, etc.) pour atteindre des espaces plus généraux. C'est effectivement ce qui s'est produit ; et, rétrospectivement, il est presque miraculeux que les choses aient si bien fonctionné. Grothendieck lui-même en fut le premier surpris.

Il le souligne d'ailleurs au début du séminaire SGA4 : il s'agit d'un fait remarquable - qui sera démontré au cours du séminaire - que le passage de la topologie de Zariski à la topologie étale permet d'obtenir le "bon" H^1 pour des faisceaux à coefficients constants finis. Plus encore, il est remarquable - et cela sera également démontré - que cette approche suffise à déterminer le "bon" H^i pour tout faisceau à coefficients de torsion, du moins lorsque l'ordre du groupe de torsion est premier aux caractéristiques résiduelles.

Dans ce qui suit, deux notions techniques vont jouer un rôle central. D'une part, celle de "faisceau

constructible". La notion d'"ensemble constructible" était, elle, connue depuis longtemps.

On disposait du théorème de... enfin, de la caractérisation d'un sous-ensemble comme réunion finie de parties localement fermées. Il s'agit du théorème de Chevalley ; je crois d'ailleurs que c'est lui qui a introduit cette notion. Oui, c'était bien Chevalley. Avant Chevalley, il n'y avait pas... Si, c'était bien Chevalley. Cela remonte, je dirais, à une dizaine d'années environ. À peine, à peine, à peine.

Nous avions donc cette notion de faisceau constructible - non pas au sens de l'image directe pour un ensemble fini, mais au sens d'un faisceau tel que l'on puisse décomposer l'espace en une réunion disjointe de parties localement fermées sur lesquelles le faisceau se comporte "bien". Il s'agissait d'une notion tout à fait nouvelle, qui ne sera véritablement dévoilée que dans le chapitre IV. J'y reviendrai.

C'était là le premier point. L'idée était que ces faisceaux constructibles présentent un bon comportement vis-à-vis de l'image directe, contrairement, bien entendu, aux faisceaux localement constants. L'autre point concernait la localisation stricte.

Il me semble que c'est Azumaya qui a introduit la notion de faisceau, et que celle de "localisation stricte" apparaît, pour la première fois, dans trois articles de Nagata. Ces articles, toutefois, seraient sans doute passés inaperçus si Grothendieck n'en avait souligné l'intérêt dans le cadre de la cohomologie étale, en considérant des faisceaux d'anneaux - ou, plus précisément, des faisceaux d'anneaux "strictement locaux". Leur pertinence en cohomologie étale tient au fait que les faisceaux d'anneaux dits "strictement locaux" constituent des objets locaux pour la topologie étale, tout comme les faisceaux d'anneaux locaux henséliens le sont pour la topologie usuelle.

Étant donné un schéma X, on peut, en passant à la limite sur les voisinages d'un point x, obtenir une "localisation stricte" $X_{(x)}$; celle-ci joue, en quelque sorte, le rôle d'un petit voisinage autour du point x. Si l'on considère un faisceau, ses sections sur cette localisation stricte correspondent aux fibres du faisceau. Cette notion de localisation stricte joue un rôle crucial lorsqu'elle est combinée au théorème de passage à la limite que Grothendieck avait déjà établi au point 4.8, et qu'il étendra par la suite au cadre de la cohomologie.

La construction, du point de vue des anneaux, repose sur une limite inductive. En un sens, elle s'avère plus pratique que le complété, qui fait intervenir une limite projective ; le lien entre les deux est, par ailleurs, assez subtil. Cela intervient plus loin dans le théorème d'approximation d'Artin et dans le théorème de Lefschetz, dont Gabber nous a déjà parlé.

Voilà donc pour les ingrédients techniques. Mais, pour revenir à l'histoire, comment tout cela a-t-il commencé ? Eh bien, comme l'a expliqué Artin, Grothendieck s'est rendu à Harvard à l'automne 1961 ; il y a été très chaleureusement accueilli par Zariski et ses étudiants, et c'est là qu'il a notamment rencontré Artin. Grothendieck a alors donné un cours sur EGA4, tout en animant un séminaire consacré à EGA2 - plus précisément au théorème de Lefschetz concernant le groupe fondamental π_1.

Artin a sollicité Grothendieck pour obtenir l'autorisation de réfléchir à cette nouvelle notion de "localisation" au sein d'une catégorie - où les intersections sont remplacées par des produits fibrés -, et plus particulièrement, dans ce contexte, pour réfléchir à la localisation de faisceaux. Grothendieck

a accepté, l'encourageant à poursuivre dans cette voie. Artin s'est donc mis au travail et a fini par réaliser... Il a poursuivi ses recherches durant l'automne et le printemps ; au printemps 1962, il a donné un séminaire à Harvard où il a exposé la construction des topologies de Grothendieck dans le cadre de cette localisation au sein d'une catégorie.

Aujourd'hui, cette approche nous semble tout à fait familière, mais à l'époque, elle était, bien entendu, révolutionnaire. Parallèlement à cette théorie générale de la localisation dans les catégories, Artin m'a expliqué le cas des faisceaux. Et là, un point technique important intervient : c'est qu'Artin a fini par comprendre qu'il n'était pas nécessaire de se limiter aux recouvrements étales et à la topologie de Zariski, et qu'il y avait tout intérêt à considérer tous les morphismes lisses.

Il s'agissait donc de familles couvrantes, de morphismes lisses surjectifs, ou quelque chose de ce genre. Grothendieck, quant à lui, n'était pas de cet avis ; il insistait sur le fait qu'un ouvert, dans cette nouvelle topologie, devait nécessairement être un ouvert au sens de Zariski. Artin a soutenu que ce n'était pas la bonne notion. Une difficulté a donc surgi, mais, en fin de compte, c'est le point de vue d'Artin qui s'est imposé. C'est d'ailleurs cette approche qui a permis à la théorie de fonctionner correctement. Par ailleurs, Artin ne s'est pas contenté d'étendre la topologie de Zariski : il a entrepris de calculer la cohomologie des courbes, et ce, au-delà du cas des faisceaux constants. Il a ainsi mis en évidence la notion pertinente de faisceau constructible, calculant la cohomologie d'un tel faisceau sur une courbe. Il est allé plus loin encore, en examinant des courbes sur des courbes, puis des surfaces, pour lesquelles il a calculé la cohomologie. En lisant les notes d'Artin, Grothendieck a immédiatement saisi la pertinence de son approche. Dès lors, entre 1962 et 1963, les deux mathématiciens ont travaillé ensemble - une collaboration enrichie par les échanges avec Verdier, notamment sur la théorie des topos, ainsi que par d'autres contributions.

Au cours de cette période (1962-1963), les théorèmes fondamentaux concernant les coefficients de torsion ont été démontrés. Pour en dresser une liste rapide, on peut citer : le calcul de la cohomologie des courbes à coefficients dans un faisceau constructible ; le théorème de changement de base pour un morphisme propre ; le résultat sur l'acyclicité locale pour un morphisme lisse ; le théorème de pureté relative ; ainsi que le théorème de changement de base pour un morphisme lisse. Il existe un théorème de finitude pour les morphismes "propres" (au sens de la géométrie algébrique) - c'est-à-dire le même théorème que celui que Gabber nous a exposé, mais appliqué à un morphisme propre. Dans ce contexte, les coefficients de torsion ne constituent pas nécessairement l'aspect le plus caractéristique du théorème. Par ailleurs, il existe des résultats concernant la dimension cohomologique, notamment dans le cas des schémas "propres".

On trouve également des théorèmes de comparaison, sur $\mathbb{C}$, entre la cohomologie étale et la cohomologie de Betti, ainsi que des théorèmes de dualité, tant globale que locale.

Pour l'essentiel, les trois piliers sur lesquels repose la théorie de la cohomologie étale sont : la cohomologie des courbes, le théorème de changement de base lisse, et le théorème de finitude locale. Concernant la cohomologie des courbes - un résultat déjà connu -, l'ingrédient principal est le théorème de Tsen (probablement une référence à un résultat de type "théorème de finitude"), qui constitue une extension du "théorème 1". On y observe, en particulier, que la cohomologie d'une courbe à coefficients dans $\mathbb{G}_m$ s'annule à partir du degré 2. C'est de là que découle la cohomologie

des courbes.

Le théorème de changement de base lisse, quant à lui, concerne les morphismes lisses. Il s'agit d'un résultat exprimé par un diagramme commutatif impliquant un changement de base lisse pour un morphisme f. Plus précisément, on considère un diagramme de changement de base lisse, faisant intervenir les foncteurs images directes supérieures $(R^q f_*)$; pour un faisceau de torsion et un morphisme lisse, on obtient une relation de compatibilité entre ces images directes.

Il était évident, dès le départ - comme le montrent des contre-exemples simples impliquant $\mathbb{Z}$ -, qu'une telle propriété de changement de base lisse ne pouvait pas être générale ; il était donc nécessaire de restreindre les coefficients à des faisceaux de torsion. Ce théorème de changement de base lisse constitue l'un des résultats les plus longs et les plus complexes de l'ouvrage SGA4. Une fois la question de la lissité traitée, on obtient un théorème de comparaison pour H^1, puis pour π_1 ; ce sont ensuite les théorèmes de spécialisation pour π_1 qui permettent d'établir le théorème de changement de base lisse. Une difficulté supplémentaire consistait à passer du cas complet au cas hensélien, étape qui est simplifiée grâce au théorème d'approximation d'Artin. Le théorème de lissité locale concerne les morphismes lisses, qui possèdent des propriétés analogues à celles rencontrées en topologie.

Plus précisément, si l'on considère un morphisme lisse $f : X \to S$ et un point géométrique x de X au-dessus d'un point s de S, on peut examiner la fibre en x (en travaillant dans le localisé strict). De même, en considérant un point géométrique t dans S, on peut étudier la fibre correspondante. Dans ce contexte, la cohomologie est essentiellement triviale : elle est isomorphe à $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ en degré 0, et nulle pour les degrés supérieurs. En un certain sens, ces fibres sont donc très simples. Ce résultat est plus délicat à établir que le théorème de changement de base lisse ; sa démonstration repose, outre les acquis de SGA1, sur des résultats issus de SGA2 ainsi que sur les travaux d'Artin sur π_1.

Ce sont là les trois piliers. Naturellement, on peut se demander : comment justifier que cette cohomologie est "bonne" ? Deux approches principales peuvent être envisagées. Tout d'abord, il y a la comparaison avec l'homologie transcendante ; dans le cas où nous travaillons sur $\mathbb{C}$, il s'agit de la comparaison avec la cohomologie de Betti - ce que j'ai noté ici au point 7. Par ailleurs, dans le cas d'une dimension supérieure, par exemple, pour un espace lisse épointé de dimension N, qui est topologiquement équivalent à une sphère de dimension $2N-1$, on devrait retrouver la même homologie. Il en va de même si, au lieu d'un espace lisse épointé, on considère une localisation stricte. Ces deux aspects font partie du programme présenté ici. Je peux peut-être dire quelques mots sur le théorème de comparaison. Concernant le point 7, deux approches ont été envisagées. Dans un premier temps, Artin a proposé un théorème de comparaison dans le cadre des schémas lisses. L'idée consistait alors à introduire la notion de fibrations élémentaires et de "bonnes résolutions". Ces dernières sont apparues dans le contexte des espaces de type $\mathbb{P}^n$. La cohomologie de tels espaces se calcule de manière analogue à la théorie de Galois. Les espaces $\mathbb{P}^n$ en question jouent ici un rôle central. On obtient ainsi un théorème de comparaison classique ainsi qu'une cohomologie "profinie". Un peu plus tard, dans son texte $\mathrm{SGA4}_{1/2}$, Artin a fourni une démonstration plus générale, valable non seulement pour des coefficients constants, mais aussi pour des faisceaux constructibles sur un schéma lisse, en utilisant les travaux d'Illusie. Il ne s'agit pas seulement d'homologie, mais aussi de

la comparaison des foncteurs f_* et $f_!$ appliqués à des faisceaux constructibles. Ainsi, la comparaison pour la cohomologie de Betti a été établie. Quant à l'homologie des espaces lisses épointés, elle découle de l'homologie des schémas lisses grâce au théorème de pureté relative.

Le théorème de pureté relative concerne l'homologie à support dans un sous-schéma fermé lisse. Dans cette configuration, si Y est un sous-schéma fermé lisse d'un schéma X (lui-même lisse sur une base S), alors les groupes de cohomologie à support dans Y (à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) sont nuls pour $q \neq 2D$, et égaux à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $q = 2D$. Il est relativement aisé de démontrer ce résultat à partir du théorème de pureté locale pour les schémas lisses. Ensuite, lorsque nous cherchons à déterminer la structure de la cohomologie de $\mathbb{A}^n - \{0\}$, qui s'apparente, pour l'essentiel, à celle d'une sphère S^{2n-1}, nous y parvenons par récurrence. Vient alors la question de la dualité, la dualité globale.

Grâce aux résultats de la cohomologie galoisienne, il n'était pas très difficile d'obtenir des bornes. En combinant cela avec le changement de base, nous avons pu établir des bornes pour les images directes, en dimension relative D ou $2D$. Ce n'était pas une tâche ardue. En revanche, le théorème de Lefschetz pour les variétés affines - que j'ai noté plus haut, et qui stipule que si X est affine sur une base S (de dimension D), alors sa cohomologie s'annule au-delà de la dimension D - s'est avéré bien plus complexe à démontrer. Il a fallu surmonter des subtilités délicates pour y parvenir. Quoi qu'il en soit, les points 8 et 9 ont ouvert de nouvelles perspectives.

Abordons donc le point 8 : la dualité globale. Comment tout cela a-t-il commencé ? Grothendieck réfléchissait, semble-t-il, simultanément à la dualité pour les faisceaux cohérents et à celle pour les espaces propres (compacts). À quelle époque ces réflexions ont-elles pris forme ? Quel a été l'apport de Verdier, et quelle a été l'influence des diverses théories en présence ? Il me semble que, dans un premier temps, il y a eu la dualité de Serre pour les faisceaux cohérents.

Grothendieck a cherché à généraliser ce concept à des espaces potentiellement singuliers. Il a constaté que l'utilisation de suites spectrales - et notamment leur composition - posait de réelles difficultés.

Il a alors imaginé le langage des catégories dérivées pour remplacer l'empilement des suites spectrales. Il était convaincu que la dualité globale, sous sa forme la plus générale, devait s'interpréter comme une adjonction entre faisceaux cohérents, impliquant un foncteur image directe dérivée (Rf_*) et son adjoint, le foncteur "image réciproque exceptionnelle" ($Rf^!$). Dans le cadre des schémas, cette approche s'est révélée particulièrement élégante, tant par ses propriétés que par les méthodes de calcul qu'elle permettait.

Grothendieck a rédigé des notes, destinées, je crois, aux séminaires qui se tenaient à Harvard. Nous sommes alors, en quelque sorte, en 1962. Grothendieck avait déjà l'intuition qu'une démarche analogue pouvait être appliquée à la cohomologie étale ; or, dans le contexte de la cohomologie étale - tout comme dans celui de la cohomologie classique (pour les univers), la cohomologie étale, la cohomologie pour les faisceaux dans l'espace localement compact, on a non seulement l'image directe, mais aussi une image directe à support propre. Alors, Verdier avait déjà, la note date de février 1963, sur le modèle de l'adjonction que Grothendieck avait proposé pour les faisceaux co-

hérents, Verdier donc, avait écrit une formule d'adjonction, un $f^!$ en haut, un $f_!$ en bas, pour des morphismes relativement gentils entre espaces topologiques localement compacts, donc qui sont forcément localement fermés dans un espace affine au-dessus de la base. Et à ce moment-là, en fait, il n'y avait pas de difficulté pour l'exclamation, on prenait l'image directe à support propre et on la dérivait, et Verdier avait remarqué qu'on pouvait a priori définir un adjoint à droite, et ensuite, on pouvait le calculer dans certains cas, il n'y avait pas une adjonction fermée, une adjonction de l'espace affine sur la base.

Alors Grothendieck ne va pas suivre tout à fait le même chemin. D'abord, on peut se demander qu'est-ce que c'est que le $f^!$ en terminologie étale, le point étant que si on imite la théorie, la construction topologique, on peut parler d'images directes à support propre, mais si on dit ça, ce n'est pas bon du tout, comme on le voit déjà pour la projection d'une courbe sur un point, on ne trouve pas du tout ce qu'il faut, ce n'est pas du tout ce qu'on veut. Alors par ailleurs, il n'y a pas tellement le choix, si on a une version ouverte, ce qu'on veut c'est le prolongement par zéro, et si on amorphise le propre, on veut le $R\Gamma_!$, donc comme on veut une composition, on est forcé de prendre $R\Gamma_!$ en bas, et ! en bas.

Donc effectivement, il n'y avait pas tellement le choix pour définir ça, et a priori ça peut dépendre de la compactification, mais fort heureusement, le théorème de changement de base propre était là pour nous montrer que ça ne dépendait pas de la compactification. Cela dit, ça reste quand même un comptage, cette définition hybride où le $Rf^!$ n'est pas du tout dérivé d'un quelconque compteur, et finalement, ça a bien marché. Je dois me rappeler qu'au début d'ailleurs, Grothendieck, pour justement montrer que ce n'était pas un dérivé, il écrivait $R!f$, comme ça.

Et donc voilà, on a un compteur image directe à plus court temps, et alors il fallait construire un $Rf^!$ et Grothendieck, inspiré par ce qu'il faisait pour les coefficients cohérents, a plutôt choisi de regarder le cas où on a globalement un plongement fermé dans un lisse. Parce que pour une immersion fermée, on voyait quelle était l'exclamation en haut, quelle était la jointe, la cohomologie à support, et pour un morphisme lisse, on imaginait que ça devait être l'image inverse un petit peu twistée et décalée. Donc, disons, pour cette fois une immersion fermée, ici c'est lisse, S, on appelle, $f^!G = f^!G2D^*$ a été défini comme $R!$ de, alors ici, disons, G étoile décalée de $2D$ et tensorisé de D, si D est la dimension relative de G. Alors, bien sûr, à partir de là, si on prend cette définition-là, on va montrer que c'est indépendant, et puis il faut montrer une adjonction entre $Rf_!$ en bas et ! en haut.

Là aussi, je dois dire que comme ce n'était pas du tout un dérivé, au début on écrivait plutôt comme ça. Et, montrer qu'on avait des foncteurs adjoints consistait à définir une flèche d'adjonction, et c'était toute la difficulté d'un morphisme [...] $Rf_!$ en bas, $Rf^!$ en haut vers l'identité, et donc c'est comme ça que Grothendieck avait établi la dualité globale dans le séminaire, oralement. Ça a été repris dans les notes de Verdier qui sont parues dans Driebergen.

Et, alors, un peu après, Deligne s'est aperçu qu'on pouvait en fait aussi imiter la construction de Verdier, c'est-à-dire définir a priori le $Rf^!$ en haut comme adjoint à droite $Rf_!$ en bas, et à partir de là, le problème devenait celui de le calculer pour un morphisme lisse. Dans ce cas, on obtenait au bout du compte la dualité de Poincaré pour un morphisme lisse, disons, pour un lisse

sur un corps de l'enclos, disons, on obtenait la dualité entre le H^i de X, alors disons dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et puis le $R\Gamma$ à support compact de X, alors dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les deux étant couplés dans $\mathbb{Z}/n(-d)$, la dualité de Poincaré $H^i \times H_c^{2d-i} \to Z/n(-d)$. Et donc, en particulier, on trouvait ça de cette façon.

Bon, je vais peut-être dire un mot maintenant des théorèmes de finitude. Les théorèmes de finitude, c'est ici, le numéro 5. Pour un morphisme propre, les théorèmes de finitude se ramènent essentiellement au cas des courbes, bon, des courbes relatives, mais des courbes relatives très gentilles, donc ce n'est pas difficile, modulo le théorème de changement de base propre. Et c'est encore plus facile une fois qu'on dispose du formalisme de cohomologie à support propre des $Rf_!$, puisqu'on peut simplement se ramener finalement au cas de l'espace affine, on a écrit l'espace affine de dimension N au-dessus de l'espace affine de dimension N moins 1, etc. C'est encore plus facile. En revanche, la finitude pour la cohomologie, donc en particulier ici, alors on avait la finitude, donc aussi ici, puisque c'est le dual, mais ce n'était pas évident a priori. Donc, en fait, pour un schéma séparé de type fini sur un corps, eh bien, on ne savait pas, sauf en caractéristique 0. Donc, en caractéristique 0, avec Hironaka, on faisait à peu près tout ce qu'on voulait, mais en dehors de ce cas-là, pas vraiment. Donc, ça restait un problème jusqu'à ce que Deligne trouve un argument pour prouver la finitude sur un corps, ou sur un schéma régulier de dimension au plus 1, pour un schéma séparé de type fini. Donc, c'est ce que Gabber nous a expliqué. Et puis, finalement, on obtient la généralisation du théorème de finitude au cas des schémas excellents. Donc, le cas des schémas excellents de caractéristique nulle, ayant été fait par Artin, et le cas général, tout reste à voir. Donc, c'est la dualité. Donc, ça, c'est la finitude. La dualité globale, donc, je l'ai expliquée. Alors, la dualité locale, Gabber nous a un petit peu expliqué. Donc, sur un X, il s'agit de trouver des bons complexes K_X, tels que quand on prend le dual à la valeur d'un K_X, on traite D_X, et bien, on le répète, on trouve un isomorphisme, comme ceci, et que ce complexe soit gentil, soit comme logique constructive, borné, et que le dual, ici, on voit l'effet qu'on a déguisé dans D_C. Donc, la théorie, formellement, était assez bien posée, notamment l'unicité d'un complexe dualisant, la translation à un twist près par un faisceau inversif, voilà, c'était l'existence. Alors, bon, en caractéristique nulle, bon, on avait aussi, par Hironaka, on avait, finalement, une théorie qui fonctionnait, mais en dehors de ce cadre-là, et du cadre des dimensions 1, essentiellement, on n'avait rien, sinon, la conjecture de Grothendieck, que pour X régulier, excellent, et bien, le faisceau constant $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devait être un complexe dualisant. Grothendieck faisait, à ce moment-là, le démontrait sous des hypothèses de résolution, pureté, etc., qui étaient conjecturales à l'époque. Finalement, le fait que pour X régulier, excellent, peut-être faut-il ajouter, pour être tout à fait correct, avec une fonction de dimension, le faisceau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est dualisant, c'est ce que, d'abord, on nous a expliqué un autre jour.

Donc, voilà les principaux théorèmes qu'on a pu démontrer entre l'automne 1961 et l'automne 1962, et qui ont été expliqués ensuite dans le séminaire SGA4. Alors, ici, on est toujours dans les coefficients de torsion. Le problème, c'était quand même d'avoir une logique qui fournisse des espaces vectoriels sur des corps de caractéristiques zéro. Et donc, la cohomologie ℓ-adique, comment la définir ? Alors, bon, l'idée, c'était, bon, déjà pour les variétés abéliennes, l'idée, on prend le module de T, c'est la limite projective des points dans l'algèbre en scène, sur $\overline{K}$, de la variété abélienne. Bon, et donc, cette idée de passer à la limite projective suivant des ℓ-modules $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, était assez naturelle. Et donc, il était assez naturel de définir, disons, H^i à support compact de X, donc pour X sur K, j'ai pris le ..., alors dans les ℓ, comme limite projective des H_c^i de X, de ce module $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. Et, en fait, bien que ça ne soit pas évident, ces objets-là ont des dimensions finies, et le H^i, ici, X

dans $\mathbb{Z}_\ell$, devient, en fait, un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini.

Alors, dans le cas ici, on obtient des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini, et si on veut des $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriels, et bien, on tensorise avec $\mathbb{Q}_\ell$, et on obtient, comme j'ai dit, le support compact, alors dans $\mathbb{Q}_\ell$. Donc, ça, ça marche pour X sur K, séparé de type fini. Ben, c'est-à-dire, le système des H^i, les X $\mathbb{Z}$-modules, ils s'insèrent pas exactement les uns dans les autres, mais presque. Donc, c'est ça. Donc, on obtient quelque chose de bien, et, en particulier, si on se limite aux variétés projectives, eh bien, on obtient une bonne théorie. Alors, on obtient, effectivement... Ah eh bien, parce que, pour X qui n'est pas support compact, à l'époque de Grothendieck, on ne savait pas, on ne savait pas.

Alors, je vais revenir sur les générations, les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux, etc., mais, je veux juste dire qu'à partir de là, si on se limite aux schémas projectifs, eh bien, on obtient une bonne théorie de cohomologie de Weil. Donc, X, on a H^i de X $\mathbb{Q}_\ell$. Donc, pour X sur K projectif, alors, le K doit être mon nom, c'est-à-dire satisfaisant, qu'une ℓ, qualité de coin carré, et aussi, un ingrédient clé, qui est la classe d'homologie d'un cycle.

Donc, du CH^D de... de H^{2D}, peut-être, de X, vers H^{2D} de X. Pour bien faire, il faudrait, ici, un petit peu le X à la tête. Cette classe de cohomologie avait été construite, en détail, pour n'importe quel cycle, en fait, par Grothendieck, dans son séminaire, et un point clé était que, cette formation, on transforme ici le produit en produit. Donc, c'est compatible avec le produit, et, à partir de là, formellement, on avait, notamment, une formule de Lefschetz, un peu formelle, et, en particulier, si on est sur un... disons, si on a X_0 sur $\mathbb{F}_q$, et X égale X_0 sur $\overline{\mathbb{F}_q}$, eh bien, on n'obtenait qu'une seule formule de Lefschetz, comme pour X_0 projectif, on obtenait la formule de Lefschetz désirée par Weil, à savoir que le nombre de points de X_0 sur $\mathbb{F}_q$, si les points sont les points fixes de X par le Frobenius de X, le nombre de points est égal à la somme alternée de traces du Frobenius sur la cohomologie de X à l'horizontale ℓ. Donc, ici, le F est vu comme un élément de la loi de $\overline{K}$ sur K, $\overline{\mathbb{F}_q}$ sur $\mathbb{F}_q$, et c'est plutôt, dans la terminologie que Katz avait expliquée l'autre jour, le Frobenius géométrique, c'est-à-dire A de A puissance 1 sur Q. Donc, on obtenait cette formule qui suffisait à elle seule à prouver la rationalité de la fonction ζ, un produit alterné de nombre caractéristique de Frobenius sur les groupes de cohomologie.

Donc, c'était très bien, mais Grothendieck va aller beaucoup plus loin, et il va considérer, bien sûr, des faisceaux, alors, des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux. Les $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux sont des systèmes projectifs de $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$-faisceaux constructibles qui s'induisent les uns les autres, c'est-à-dire F_n, F_{n+1}, réduit modulo ℓ^n.

Donc, parmi ceux-ci, ceux pour lesquels les F_n sont lisses, correspondent essentiellement à des $\mathbb{Z}_\ell$-modules de type fini, quand on prend une ligne projective en un point géométrique, munis d'une action continue du groupe fondamental. Et puis les autres s'obtiennent sur une stratification formelle, comme le faisceau X, donc une famille de représentations continue du groupe fondamental. On avait donc les notions de $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux, et aussi de $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux, en inversant ℓ. Et la question se posait de la stabilité des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux par les diverses opérations, prendre la cohomologie, les images directes, etc.

Alors, ce que Grothendieck avait montré, c'était que les H^i_c en particulier, dans la situation présente, si un support compact X a valeur dans un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau F, c'est encore un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini.

Et généralement, les $R^q f_!$ transforment le $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau constructible en $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau constructible. Et il avait proposé à Jouanolou, c'était la tâche qu'il lui avait assignée pour sa thèse, de généraliser ce résultat aux autres foncteurs.

Alors c'était déjà difficile pour celui où il n'y a pas d'exclamation, puisque déjà, même en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on ne savait pas. Enfin, Grothendieck n'était pas producteur de conjectures, il pensait que ça allait très bien marcher, mais même en faisant les conjectures, ce n'était pas du tout évident qu'on allait pouvoir obtenir un formalisme de catégorie dérivée $\mathbb{Z}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$, et ceci n'a été fait que plus tard, comme Olsson nous l'a expliqué, d'abord par Deligne dans L^2, et puis ensuite par Ekedahl, et puis finalement, on a vu l'état final, enfin le dernier état de la chose, qui n'est peut-être pas encore l'état final, mais cet état se trouve bien dans l'exposé d'Olsson. Mais cela dit, le simple fait d'avoir la finitude ici permettait d'écrire une formule de transfert plus générale, bien sûr. Il faudra peut-être descendre quelque chose. Donc ce que Grothendieck va démontrer, c'est ce qu'on appelle la formule de transfert de Grothendieck pour Frobenius, et qui est essentiellement comme celle du cas de faisceaux en constant, mais contrairement à celle de faisceaux en constant, n'est plus de nature formelle. Également pour X sur K, alors maintenant on n'a pas besoin de rien supposer sur X, sinon c'est pareil, c'est fini.

Ce sera que la somme étendue au point fixe en cas Frobenius, c'est-à-dire ici c'est le $\overline{K}$, ici c'est le K, de la trace de Frobenius local, enfin même F sur X, la fibre de E au point X, le point rationnel ici, sera somme alternée des traces de F sur G, comme le G est un support compact, de X à valeur dans ce faisceau E. J'ai pris E pour éviter le trou de F. Donc ici, E c'est simplement un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau sur X. Donc ça c'est la formule des traces de Grothendieck, dans le cas où E est le faisceau $\mathbb{Q}_\ell$, c'est la formule précédente. Et alors, le point c'est que, ici bien sûr c'est très important de mettre le G à support compact, sinon ce ne serait pas vrai du tout, et ce n'était pas formel, en ce sens que la démonstration que Grothendieck a donnée, consistait d'abord par divers dévissages, le fait que le Frobenius est partout, donc on peut dévisser en courbe, et finalement on se ramène au cas des courbes, et d'un faisceau, on a des faisceaux arbitraires, et on a un endomorphisme, et on doit montrer cette formule-là, dans le cas des courbes. Alors, plus généralement, si on a une courbe maintenant, une courbe propre, c'est ce que je vais peut-être supposer maintenant, pour simplifier, je vais abandonner la situation arithmétique, je suppose que là il y a le $\overline{K}$ propre, une courbe, et si on a un endomorphisme, une petite f, de X, et si on a un $\mathbb{Z}_\ell$-faisceau, ici, E sur X, avec un relèvement de f à E, c'est-à-dire un endomorphisme de, disons, U, de f^*E, dans E, alors, la formule, si l'on suppose que f est gentil, comme un Frobenius, c'est-à-dire f transverse à la diagonale, c'est-à-dire un point fixe isolé, transversaux, alors la trace du couple FU, sur la cohomologie, disons, si on met simplement H^* de X, de la somme alternée des traces, est égale à la somme des traces naïves, comme Olsson nous l'a expliqué l'autre jour, de FU, disons, de U_X, tout simplement, sur X, pour X dans l'ensemble des points fixes de F. Alors, c'est cette formule des traces qui a eu, en fait, deux démonstrations, l'une incomplète et l'autre complète, dans le temps de Grothendieck.

Grothendieck a donné une démonstration utilisant... Comment ? Il n'y a plus de Frobenius ici. F c'est juste un endomorphisme de la courbe sur K, U c'est un relèvement, qui pose des points fixes isolés, transversaux, et donc la trace, ici c'est la somme alternée des traces, c'est la somme des traces naïves de X sur X. Pour une courbe, oui, je crois que j'ai écrit, d'ailleurs, pour une courbe.

Alors, bon, dans la version Grothendieck, Grothendieck a utilisé une notion de trace particulière, une notion de Grothendieck, qui lui a servi non seulement pour un endomorphisme de courbe, mais aussi, bon, non seulement pour les points fixes isolés, mais aussi même pour l'identité, les formules d'Euler-Poincaré.

Donc ça a été toute l'histoire des formules Grothendieck-Ogg-Shafarevich, et cette fameuse correspondance entre Serre et Grothendieck à ce moment-là pour définir précisément les termes locaux à l'infini, les conducteurs qui devaient apparaître à ce moment-là. Et donc, il y a eu cette démonstration qui a été complète, qui a été... Alors, évidemment, le SGA5 n'était pas publié, mais il y avait des notes Par ailleurs, Grothendieck avait esquissé une autre démonstration à partir de la formule de Lefschetz (généralisée par Verdier aux correspondances). Donc, Verdier avait démontré, tout au moins énoncé, une formule générale pour des correspondances, comme Olsson nous a expliqué, et cette formule générale, quand on la spécialisait au cadre de cette situation-là, Verdier avait montré qu'elle donnait exactement les termes locaux qu'on voulait ici. Alors, il y avait des problèmes là. Il y avait deux types de problèmes. Le premier, c'était que les compatibilités n'avaient pas été soigneusement vérifiées. Et d'autre part, qu'il y avait des hypothèses pour la définition des termes locaux qui étaient, à priori, pour la formule générale, du moins, existence de... Enfin, termes de pureté, finitude, etc., qui étaient conjecturables à l'époque. Sauf que, dans le cas des cours, on avait tous les ingrédients, on avait la résolution des surfaces, donc on avait la version définitive, on avait tout à ce moment-là. Mais simplement, les compatibilités n'avaient pas été vérifiées.

Cela dit, dans la mesure où on avait une démonstration complète, de ce côté-là, on pouvait considérer qu'il n'y avait pas de problème. Finalement, dans SGA5, on fera les deux, on complétera ça, et puis, les compatibilités seront vérifiées. Donc, à partir de là, on a la formule des traces, on a la rationalité des fonctions L, et c'est cette formule-là, et non pas son avatar tout plus simple du cas des glissants constants, qui servira, bien sûr, qui sera le nom de base pour le guide pour les conjectures de Weil, et qui sera utilisé un peu partout ensuite.

Alors, bien sûr, j'ai mentionné ici la formule de Grothendieck-Ogg-Shafarevich, elle aussi aura des avatars, mais actuellement, Takeshi Saito, Beilinson, et d'autres y réfléchissent, mais le problème d'obtenir une généralisation proprement grothendieckienne de cette formule pour des morphismes est encore, semble-t-il, assez éloigné. Alors, pour terminer, dans les cinq minutes qui me restent, je vais peut-être essayer de dire quelques mots de monodromie des cycles évanescents, parce que c'est quelque chose qui n'est pas là, et qui a préoccupé Grothendieck dès le début des SGA4. En fait, je me suis toujours demandé pourquoi Grothendieck avait placé les SGA6 après les SGA5, alors qu'en fait, il aurait pu commencer la monodromie tout de suite.

Je pense qu'il voulait souffler un peu, et alors il donnait à Berthelot et à Illusie le soin de rédiger l'historique sur les conditions de finitude dans les catégories dérivées, la formule de Riemann-Roch, qui était en quelque sorte un plat servi longtemps à l'avance, et qu'on réchauffait, parce que c'était une forme, en quelque sorte, sous le sommet, on dirait, une forme élaborée de ce qu'il avait fait sur Riemann-Roch en 57, qui avait été rédigé par Borel-Serre. Donc bref, il s'accorde une année sympathique, et ensuite, il commence ses affaires sérieuses sur la monodromie. Alors curieusement, il ne réfère pas à Lefschetz dans SGA4, il dit, ce sont des idées d'Illusie, ces calculs d'Illusie, qui m'avaient motivé.

Donc il n'y a pas grand chose, je pense. Cela dit, dans une lettre de Grothendieck à Serre, en 1964, à propos du terrain de réduction semi-stable pour la variété abélienne, en fait, on a le cas des courbes. Donc le séminaire SGA7 va concerner les faisceaux de cycle évanescent, qui sont concentrés ici, et que Grothendieck calcule dans un cas crucial.

Alors je pense qu'à l'époque aussi, probablement, bien qu'il ne soit pas encore paru à l'époque, le livre de Milnor sur les singularités des hypersurfaces, je pense, a joué un rôle, et notamment la conjecture de Milnor que la monodromie d'une singularité isolée devait être quasi-unipotente. Bref, Grothendieck va concevoir sa grande théorie des foncteurs ψ, et à partir de là, SGA7 va être développé, et il y aura trois grands résultats dans SGA7. Il y aura, d'une part, le théorème de réduction semi-stable. Dans SGA7, c'est pour les variétés abéliennes. Bon, à peu près au même moment, Mumford montrait que ce qu'on pouvait faire pour les variétés abéliennes, ou pouvait le faire de façon équivalente pour les courbes. Mais ce n'est pas une chose évidente.

La démonstration de Grothendieck, du théorème de réduction semi-stable aux variétés abéliennes, on utilisera notamment les biextensions dont on a entendu parler il n'y a pas si longtemps, et un théorème d'orthogonalité pour les modules de Tate, les variétés abéliennes, les variétés duales. Donc, ça c'est... Je ne me souviens plus, est-ce qu'il utilise le modèle de Néron ? Je ne crois pas qu'il y avait vraiment une démonstration complète à l'époque, mais Grothendieck en savait suffisamment alors à propos de ce formalisme pour pouvoir l'utiliser.

Alors, l'autre chose, c'est le théorème de monodromie locale. Alors, là, il faut que je dise quelque chose là-dessus. Bon, le théorème de monodromie locale dit qu'on est sur une fibre, donc on a la fibre spéciale, la fibre générique, et si on regarde sur η, l'action de l'inertie sur la cohomologie de X_η, à valeurs dans, je ne sais pas, dans $\mathbb{Q}_\ell$ par exemple, est quasi-unipotente. Alors, dans le cas d'un corps résiduel fini, ceci résultait d'une chose magnifique : quand on dit que Grothendieck avait découvert que, dans n'importe quelle représentation ℓ-adique, en fait, dès que le corps résiduel n'est pas trop gros, et si une extension finie ne contient toutes les racines et toutes les formes de puissance de ℓ de 1, eh bien, la représentation est automatiquement quasi-unipotente. Donc il écrit ça dans une lettre à Serre, Serre est enthousiaste. C'était un peu faux, enfin, il y avait quelques petites coquilles, mais enfin, ce n'était pas tout à fait faux non plus, la démonstration était là. Donc c'est un résultat magnifique. Et donc ensuite, le passage... bon, il y avait un peu de technique pour passer du cas d'un corps résiduel fini au cas d'un corps résiduel quelconque, une lissification de Néron. Mais c'était ça, le cas délicat. Bien sûr, bien sûr, le cas résiduel fini, c'est évidemment. Voilà, ça, c'était essentiellement... une fois qu'on l'a vu, c'est presque un exercice. Cela dit, un point intéressant, c'est que Grothendieck avait donné une autre démonstration conjecturale du théorème de monodromie locale, ici, en utilisant la résolution des singularités. Et en fait, cette démonstration conjecturale a pu être rendue non conjecturale en utilisant non pas la résolution des singularités, mais les altérations de Deligne. Donc ça complétait le programme. Et alors, bien sûr, il nous reste une minute, peut-être. Le résultat classique de Hironaka, c'était en 1965, 1966, je ne sais pas. Oui, mais c'est dans le petit. Mais là, c'est en tant que caractéristique, là, hein. Donc, en caractéristique p, on nous l'a expliqué : Deligne, en quelque sorte, sert de substitut, et à partir de là, on peut faire marcher aussi l'argument de Grothendieck. Alors, bien sûr, le point essentiel, Grothendieck l'avait : la théorie de Lefschetz, la théorie des pinceaux de Lefschetz, et c'est ça qui sera développé dans les

exposés de 2004 de SGA7, en particulier la théorie cohomologique et la formule de Picard-Lefschetz, qui sont rédigées par Deligne. Je crois qu'à l'époque, Grothendieck ne voyait pas trop comment démontrer ça, il n'avait pas envie de fouiller dans les papiers de Lefschetz. Je ne sais pas si tu as regardé, tu as lu les papiers de Lefschetz ?

Oui, oui, je vois le livre, "*Anomalies et structures*", c'est ça, pour le Driebergen.

C'est ça, Grothendieck, il ne devait pas comprendre ces choses-là, mais donc quand même, le livre m'intéresse. Donc, théorie de Lefschetz, et bien sûr qui servira pour, bien sûr, pour Weil 1. Donc voilà, à peu près le contenu de SGA7.

Je dois dire que ce théorème de monodromie locale, en mettant l'accent sur la réduction semi-stable, qui apparaissait là, vraiment, la première fois, donc... donc moralement, après une extension finie, on obtient une réduction semi-stable. C'est une philosophie qui a inspiré énormément de travaux ensuite. Bon, il y a eu des extensions, il y a eu Mumford... Bon, là, on avait le cas des courbes, le cas des dimensions quelconques en caractéristique 0, écrit par Mumford dans les années 1970. Et puis il y a aussi... on peut regarder aussi le cas des courbes isolées sur des variétés abéliennes, mais sur une base plus générale. Ça, c'est le théorème de Gabber.

Donc, si on a un S excellent, normal, avec une variété abélienne dessus, un schéma abélien sur un ouvert dense, eh bien, après extension propre, là c'est pour le cas fini, de S, eh bien, le schéma se prolonge en un schéma semi-abélien. Donc ça, c'est un point qui était important... et puis, bien entendu, toute la théorie de Hodge, la variation de structure de Hodge, théorie de Shimura, etc. Et plus récemment, bien sûr, il y a le cas cristallin, la conjecture semi-stable, etc., tout ça, en quelque sorte, et aussi la monodromie locale théorique, tout ça est, semble-t-il, issu de la théorie de Grothendieck. Alors, je n'ai pas parlé, en ce qui concerne le début, disons, de l'unité globale, de l'unité locale. Bon, je n'ai pas insisté, mais à l'époque, même si on a fait abstraction des conditions de finitude, le simple fait d'avoir tous ces foncteurs et leurs combinaisons, donc les six opérations, évidemment, ça avait, d'un seul coup, changé tout l'aspect de la cohomologie, et ce sera utilisé plus tard un petit peu partout. Voilà.

Bon, je crois que je vais m'arrêter là.

Questions :

Un auditeur : À quel moment est-ce que Grothendieck commence à parler des six opérations, comme Yoga ?

Luc Illusie : Je ne sais pas, je l'ai vu dans "Récoltes et semailles", mais je ne suis pas sûr de... je ne crois pas qu'il en parlait. Il ne parlait pas des six opérations, vraiment.

Le même auditeur : “Récoltes et semailles”, il dit qu'il les avait dans la tête.

Luc Illusie : Oui, mais je n'arrive pas à... tu te rappelles, sinon, est-ce que...

Un autre auditeur : Je ne crois pas qu'il le mentionnait précisément, là.

Luc Illusie : Non, non, le mot n'apparaissait pas. Bien sûr, on avait les opérations, et il était très attentif à toutes les relations qu'on pouvait obtenir. Il y avait la formule d'induction, la formule d'induction complémentaire, enfin, toutes sortes de formules qui, finalement, se résument au fait que D échange les étoiles et les exclamations, comme Olsson nous l'a expliqué. Mais je crois que l'expression arrive dans “Récoltes et semailles”.

Jean-Pierre Serre : Juste un commentaire : tu as cité la théorie de Lefschetz, qui est, j'ai un souvenir assez amusé, de la tête de Grothendieck quand Deligne avait donné son exposé où l'essentiel était de regarder les quadriques. Il avait regardé les quadriques et puis il les avait dévissés, comme il est normal. Et c'était le genre de chose qui n'était vraiment pas du tout dans l'esprit de Grothendieck, mais il était resté pendant une heure et demie.

Luc Illusie : Pantois, oui.

Jean-Pierre Serre : Pantois. Ce n'était pas le style du séminaire.

Luc Illusie : Oui. Ensuite, il y avait pire. Dans la théorie des pinceaux de Lefschetz, Katz exposait et disait : “Je vais prendre des coordonnées”. Donc il a déroulé ça... *(Rires)*

Pierre Cartier : Donc, pour SGA7, alors, où est-ce que Grothendieck est ? Parce que tu as l'air de donner l'impression que la troisième partie, c'était Deligne et Katz plus que Grothendieck.

Luc Illusie : Non, $R\psi$, c'est Grothendieck, incontestablement. Picard-Lefschetz, c'est Deligne, je crois que Grothendieck ne savait pas faire. Et la théorie des pinceaux de Lefschetz, même si Grothendieck avait idée qu'il devait y avoir une théorie, ça devait marcher comme en caractéristique 1, essentiellement, bon, il ne l'avait pas fait. Mais quand même, la chose extraordinaire, c'était cette définition du $R\psi$ qui met ensemble, en quelque sorte, la cohomologie de toutes les petites fibres de milieu nord autour des points singuliers. Ça, c'était... il avait cette idée-là aussi bien sur les complexes qu'en cohomologie étale, et le lien entre les deux, etc. Donc ça, c'était quand même la construction de base. Je veux dire que ça n'a pas été tellement amélioré. Donc, par exemple, sur une base générale, on a une définition proposée par Deligne, sur laquelle Orgogozzo a travaillé récemment, mais c'est une théorie embryonnaire. On n'a pas encore... Enfin, je pense qu'on n'a pas encore fait grand-chose.

Pierre Cartier : Est-ce que Grothendieck était présent dans les dernières...

Luc Illusie : Ah oui, oui, oui. Oui, bien sûr, bien sûr. Oui, bien sûr. Oui, oui, bien sûr.

Un auditeur : Et les topos de cycles évanescents dans SGA, c'était Pierre Deligne... ?

Luc Illusie : Oh, je ne pense pas que dans cette construction, enfin, disons, la construction...*(Luc Illusie écrit quelque chose au tableau et quelques personnes du public rient)* cette construction-là, je pense que c'est Pierre (Deligne), incontestablement. Cela dit, je pense que Grothendieck était conscient que les faisceaux de cycles évanescents et le complexe vivaient sur la fibre spéciale pour la clôture algébrique, et munis d'une action compatible du groupe de Galois. Donc c'était simplement le langage très joli que Pierre (Deligne) a développé ensuite, bon, ce n'était pas dans les exposés de Grothendieck. Il y a beaucoup d'exposés sur les $R\psi, R\varphi$, toutes sortes de relations, sauf qu'à l'époque, bien sûr, on n'avait pas plus de finitude là que déjà pour les schémas de type fini sur un corps. Donc on n'avait pas beaucoup de... la structure des ψ, bon, ce sera à partir de ses résultats dans les années 70. Et je pense que... et après, avec le développement des faisceaux pervers, eh bien, le fait que ψ transforme les faisceaux pervers en faisceaux de Galois, tout ça, ce sont des développements que Grothendieck n'avait pas conçus.

Mais à propos de ça, mais peut-être qu'il faudrait que je m'arrête, le... j'ai parlé du théorème d'Artin, que, bon, la cohomologie d'un schéma de dimension D s'arrête en dimension D, mais la notion relative, ça s'arrête aussi en dimension D. Mais à mesure qu'on prend des RQ de plus en plus grands, le support devient de plus en plus petit. Donc le support de RQ, c'est la dimension du support en haut moins Q Et cette propriété-là était tout à fait étonnante, et on la traduira ensuite en termes de t-exactitude à droite. Ce sera la moitié d'un faisceau pervers, donc ça aura une résonance après.

Bon, s'il n'y a pas d'autres questions, donc on va se réunir à nouveau dans 15 minutes.