Le premier texte est extrait des proceedings de l'ICM 1897 à Zurich, le second des proceedings de l'ICM 1900 à Paris.

L'unification des concepts dans les mathématiques.
Z. García de Galdeano y Yanguas à Saragosse.

Ainsi que le XVIIe siècle peut être considéré comme une période de création pour la Mathématique, notre siècle sera sans doute l'époque de la systématisation des concepts de cette science.

La théorie des quantités imaginaires entra dans le domaine fécond des applications à la théorie des fonctions, quand Cauchy, d'après l'interprétation géométrique due à Argand et Buée, publia son mémoire *Sur les quantités géométriques*, et quand Riemann signala les nouvelles allures qu'a suivies l'école allemande.

D'un autre côté l'Algèbre s'avance appuyée sur la théorie des substitutions sous les puissants efforts de Lagrange, Abel et Galois.

De même les fonctions elliptiques, la théorie des nombres, l'Algèbre de la logique, la Géométrie dans l'école de Monge sous l'influence des Carnot, Poncelet, Chasles et Staudt et les théories créées par Bellavitis, Hamilton et Grassmann, fondateurs de la géométrie vectorielle, sont des branches appartenant à la première moitié du XIXe siècle.

L'évènement inauguré par Lobatschewsky et poursuivi par Riemann, qui a mis les géométries non-euclidiennes en face de l'euclidienne et qui a conduit à la nouvelle doctrine de l'hyper-espace, avec le travail d'unification dû à M. Sophus Lie, sous le fécond concept des groupes de substitutions, arrive jusqu'à la considération des familles des mouvements non-euclidiens dans une variété à n dimensions.

Nous pourrons suivre ce travail d'unification dans les ouvrages publiés, ainsi que dans les procédés de notre intelligence, et nous verrons que la Mathématique agit dans ses procédés par une suite de projections.

La catégorie de la raison nommée quantité s'est projetée dans ses variétés, caractérisant, par la prédominance de chacune, les diverses branches de cette science.

Une première projection produit les jugements de subordination, supraordination, égalité, qui donnent le développement de l'Algèbre de la logique, incessamment accrue dès Boole jusqu'à Schræder.

La combinatoire, développée dans la théorie des substitutions, prédomine aussi dans les modernes traités de la théorie des nombres et de l'Algèbre ordinaire ainsi que dans celle des formes.

L'Arithmétique, dès l'unification produite par l'algorithme de la congruence, compte les travaux de Dedekind, fondés sur le concept de corps fini du degré n, outre sa doctrine des idéaux, modification

Transcription en : Denise Vella-Chemla, août 2025.

de celle de Kummer sur les nombres idéaux, les écrits de M. Cantor fondés sur le concept de puissance ou nombre cardinal d'un ensemble, et la relation univoque entre les éléments correspondants de deux ensembles, c'est-à-dire l'image ou projection (Abbildung) $\varphi(s)$, selon M. Dedekind d'un élément s, tout ce qui est développé dans les intéressants ouvrages de MM. Dini et Tannery sur les fonctions et de M. Betazzi sur les grandeurs (grandezze), qui ont donné un nouvel élan à la théorie des nombres irrationnels, dont MM. Hermite et Lindemann ont placé le dernier étage dans les nombres transcendants.

Sous ces vues sont aussi écrits des ouvrages tels que *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* de M. Schræder et *Elemente der Arithmetik und Algebra* de M. Fr. Meyer (Halle).

Nous avons déjà dit que l'Algèbre est fondée sur la théorie combinatoire des substitutions, et dans les ouvrages de Lagrange, Abel et Galois nous trouvons la correspondance continuelle des fonctions qui ont une certaine relation avec les véritables inconnues des équations et les groupes des substitutions.

Mais une nouvelle branche s'entrelace avec celle-ci, celle qu'on a appelée l'Algèbre des formes, caractérisée par le concept d'invariance.

La liaison de cette branche avec toutes les branches mathématiques est nécessaire au moment où nous voyons que la propriété d'invariance de certaines fonctions a lieu, lorsqu'on a fait des transformations linéaires entre les variables.

Pour abréger, nous dirons que la nouvelle Algèbre a fourni à la Géométrie analytique des principes qui lui manquaient, moyennant les théories des invariants et des covariants.

Nous voyons originairement ces développements dans les excellents traités de MM. Salmon et Clebsch, et plus encore dans les cinquième et sixième mémoires *Upon Quantics* de Cayley, où l'on fait la traduction des relations anharmoniques, d'homographie et d'involution dans le langage de l'Algèbre des formes, et où l'on établit la Géométrie métrique projective rapportée à l'Absolu, après avoir rapporté les Géométries à une et à deux dimensions aux formes quadriques binaires et ternaires.

Poursuivant l'énumération des analogies qui conduisent à l'unification des concepts, nous trouvons que les propriétés restant invariantes pour une classe quelconque de transformations, dépendent du caractère du groupe de celles-ci, c'est-à-dire, de l'ensemble des transformations, qui se reproduisent, moyennant une quelconque de ses combinaisons, ce que nous avons vu dans d'autres branches.

Les transformations des formes les unes dans les autres, ou le problème de l'équivalence, étendu aussi aux faisceaux de formes, la représentation de ceux-ci à l'aide d'un ensemble de faisceaux élémentaires, la transformation d'une forme en elle-même, la réduction des formes à la forme type, sont des questions qui montrent combien contribue à l'unification de la science le concept de groupe de substitutions.

Le problème de la transformation des formes lié avec l'égalité de certains invariants et covariants conduit à une correspondance entre les groupes finis et les formes et les mouvements dans l'espace, considérations qui ont conduit M. Klein à établir une théorie générale de l'équation du cinquième degré dans ses *Vorlesungen über das Ikosaēder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.*

La recherche d'un domaine fini pour l'ensemble des formes déduites des opérations invariantes de certaines formes, la détermination du système de formes fondamentales, questions mises en lumière par M. Gordan, et les synthèses faites par MM. Salmon, Serret et Weber dans leurs notables traités témoignent combien s'est avancée cette branche de l'Analyse.

Dans la Géométrie, nous voyons comment la transformation des figures à l'aide des projections, faite par Monge, est suivie de la tentative de Carnot, pour établir des corrélations entre les figures, et des travaux de Poncelet sur le principe de continuité, confirmé par sa doctrine des cordes supplémentaires et des cordes idéales, et sur les éléments à l'infini qu'il introduit par la méthode de projections.

La théorie de la polarité germe de celles de la dualité et de la corrélation, employées par Gergonne, Steiner et Chasles. L'unification qu'introduit ce dernier géomètre sous le concept du rapport anharmonique qui lia la Géométrie moderne avec la doctrine des porismes d'Euclide ; la géométrie de situation exposée par Staudt indépendamment des considérations métriques et unifiée par l'introduction des éléments impropres et les deux procédés de la projection et de la section ; l'application de l'imaginaire faite par Plücker dans la définition des foyers, et l'élargissement de la Géométrie par le nouveau concept des complexes ; le concept des droites isotropes dont M. Laguerre a fait des indications intéressantes : tout cela montre combien ces représentations ont fourni à la Géométrie des moyens d'unification et de simplicité dans ses procédés et dans son ensemble.

Un autre ordre d'idées est celui qu'ont importé Cauchy et Riemann par la correspondance entre les fonctions et les points d'un plan, le premier considérant deux points dont les affixes sont la variable et une fonction de celle-ci et le deuxième sa surface, célèbre par ses continuelles applications à l'étude des fonctions, et à cette correspondance nous aurons à ajouter celle de M. Cremona qui conduit à la surface homoloïde ou représentable point par point dans un plan, aux relations unidéterminatives qui changent une courbe dans une autre, et nous citerons encore l'important théorème établi par Riemann de la conservation du genre d'une courbe dans toutes les transformations unidéterminatives.

Comme résumé de ces considérations sur l'adjonction de l'imaginaire et de l'infini ainsi que sur l'idée de correspondance, nous pourrons placer à côté de *A sixth Memoir upon Quantic* de Cayley, qui établit la projectivité de la Géométrie métrique à l'aide de l'adjonction de l'absolu, le mémoire de M. Klein : *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* et les travaux de M. Lie exposés dans ses récentes publications.

Nous ajouterons que cette unification donnée à la Géométrie dans ses branches supérieures peut s'introduire dans la branche élémentaire au bénéfice de l'enseignement, parce que l'admission du postulat permet d'introduire une correspondance univoque qui facilitera les démonstrations. Les éléments pourront de même se compléter par les nouveaux développements de la Géométrie récente ou du triangle, continuant l'initiative de M. Casey dans son intéressant ouvrage : *A sequel to Euclid.*

Aux travaux de Lobatschewsky, Bolyai, Riemann, Helmholtz qui ont fondé la pangéométrie nous aurons à ajouter ceux des MM. Beltrami, Frischauf, Tilly, Flye Sainte-Marie, Killing, Gérard, Neuberg, Klein qui ont conduit à la classification, due à ce dernier géomètre, des géométries parabolique, hyperbolique et elliptique.

Nous citerons encore le mémoire de Riemann : *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* qui souleva la question des dimensions de l'espace et élargit le champ de la Géométrie et de l'Analyse avec la généralisation qui porta la Géométrie à n dimensions dont la littérature est aujourd'hui si riche ; nous rappelons les travaux de M. Schlegel sur les polyèdres quadridimensionels, l'ouvrage classique de M. Killing, le traité sur l'Analyse situs de M. Poincaré, les intéressantes connexions établies par M. Picard dans ses traités sur les Fonctions algébriques et sur l'Analyse, ce dernier en rapport avec les théories de Galois, et s'approchant des investigations de M. Lie.

Nous terminerons en rappelant les très importants recueils : *Bulletin des Sciences mathématiques, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Synopsis der höheren Mathematik* de M. Johann G. Hagen, les mémoires présentés au Congrès de Chicago et publiés par la Société américaine des mathématiciens et surtout, l'ouvrage international poursuivi par la Commission du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques dont le but est l'unification de la science mathématique qui jaillira de la classification des travaux publiés pendant ce siècle.

Et dans les Proceedings de ICM 1900 à Paris :

Note sur la critique mathématique
Z. García de Galdeano y Yanguas (Saragosse)

Dans sa Note, M. de Galdeano a indiqué le besoin, dans l'état actuel des Mathématiques, de compléter leur enseignement au moyen d'une nouvelle branche pédagogique, qui pourrait être nommée Critique mathématique.

Elle contiendrait des développements historiques et étudierait les liens de parenté qui unissent la génération historique et la génération logique de nos connaissances. Dans une étude synthétique des diverses branches, on viserait à l'enchaînement des idées. On s'y occuperait systématiquement de toutes les méthodes d'une portée très générale, telles, par exemple, que l'introduction d'êtres de pure raison, grâce auxquels la Science s'unifie, se simplifiant et se généralisant à la fois.

Il ne faut pas perdre de vue qu'un plan d'enseignement universitaire doit embrasser non seulement l'enseignement technique qui fait connaître la Science en soi, mais aussi d'autres enseignements dont le but soit de former les futurs professeurs, et de développer en eux des vocations scientifiques inébranlables, capables de se communiquer aux élèves. Les nations ont besoin autant des hommes aptes à appliquer les connaissances théoriques, que des savants dévoués au perfectionnement de l'esprit, source des découvertes dans un avenir plus ou moins lointain.