Les postulats pour la Géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky
C. Burali-Forti à Turin.

Le développement rapide et l'importance que les études sur les fondements des mathématiques ont acquis, viennent d'agiter, aujourd'hui, la question, pas encore résolue, des postulats pour la Géométrie d'Euclide. Mais dans la plupart des traités de géométrie, même parmi les plus récents, les systèmes des postulats sont bien compliqués ; l'analyse des idées géométriques n'est point accomplie ; l'idée abstraite de grandeur géométrique y paraît comme un élément primitif, tandis qu'elle peut être déterminée par le moyen des idées concrètes de position et de mouvement. De plus, dans certains périodiques de mathématique, on arrive jusqu'à proposer d'introduire, pour l'équivalence, des relations de grandeur entre les infiniments grands et les infiniments petits, ou, du moins, d'introduire le concept de figure finie et infinie. De telle sorte, si d'un côté l'on perd la simplicité de la Géométrie d'Euclide, de l'autre on introduit des concepts étrangers à la géométrie, et la question des postulats s'éloigne toujours plus de sa solution complète Cela posé, je crois utile de montrer, en abrégé, comment avec de légères modifications des résultats scientifiques déjà connus, et desquels les auteurs des traités de géométrie ne font point usage, on obtient un système complet de postulats pour la Géométrie d'Euclide, et sous une forme tellement simple et intuitive, qu'il suffit d'un travail de développement bien facile, pour obtenir des traités de géométrie qui répondent aux exigences actuelles scientifiques et didactiques dans les différents degrés de l'enseignement.

Classification. Au moyen des idées exprimées par le mot *point*, et par la relation *le point est situé entre le point a et le point b*, on déduit la signification des mots *figure, segment, droite, plan,...*[1] et les propriétés de ces éléments forment la *Géométrie de position*. En ajoutant aux idées que nous venons de considérer celle du *mouvement*, on obtient un nouvel ensemble de propositions qui donne la *Géométrie du mouvement*. Enfin, en introduisant l'idée abstraite de *grandeur géométrique* (longueur, aire, volume,...), on obtient la *Géométrie métrique*. L'idée de mouvement des éléments, point, droite,... ne peut point précéder la connaissance de certaines propriétés fondamentales de ces éléments, et par suite, la *Géométrie du mouvement* doit reconnaître son fondement sur la *Géométrie de position*, tandis qu'elle doit admettre des propriétés primitives par l'idée de mouvement, pas encore contenues dans la *Géométrie de position*. La *Géométrie métrique*, au contraire, reste complètement déterminée par la *Géométrie de position* et *de mouvement*. En effet, en disant par ex. que la "longueur du segment a" est un élément géométrique abstrait commun à tous les segments qui sont superposables au segment a, nous considérons des fonctions des figures géométriques (segments, polygones, polyèdres,...) qui sont bien déterminées par les idées de *position* et de *mouvement*.

Géométrie de position. Quant à la Géométrie de position les parallèles exceptées - à l'état présent de la science, il n'y a plus rien à faire, des transformations logiques exceptées. Le système de postulats de M. Pasch, ou celui de M. Peano, donnent toute la Géométrie de position, y compris le théorème de Desargues sur les triangles homologiques, et ces postulats expriment les propriétés les plus simples que le topographe vérifie au moyen des jalons ou que le maçon vérifie au moyen du fil à plomb. Pour obtenir la théorie des parallèles, il faut joindre aux postulats précédents celui

Transcription en : Denise Vella-Chemla, août 2025.

1. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Peano, *Principi di Geometria logicamente esposti*. 1889. *Sui fondamenti della Geometria (Rivista di matematica*. 1894).

de la continuité, due à M. Dedekind et qu'on peut exprimer en disant que "Un ensemble convexe de points, contenu sur un segment, est lui-même un segment". Cela fait, on obtient la Géométrie d'Euclide et celle de Lobatchewsky, mais non la Géométrie de Riemann, car, par ex. si le point a est situé entre le point b et le point c, b n'est pas situé entre a et c.

La définition de demi-droites parallèles donnée [2], on démontre que deux demi-droites parallèles sont complanaires ; qu'un point externe à la demi-droite a est l'origine d'une seule demi-droite parallèle à a ; que la relation exprimée par le mot parallèle est réflexive, symétrique et transitive... Il en résulte aussi que : par un point extérieur à une droite, on peut mener une ou deux droites parallèles à la droite même, et qu'un de ces deux cas doit toujours se vérifier. Pour obtenir la Géométrie d'Euclide, il faut poser le postulat suivant : "quelle que soit la droite a, il existe un point b extérieur à la droite a par lequel passe une seule parallèle à la droite a ; car on déduit aisément qu'une seule parallèle à la droite a passe aussi par un point quelconque. Analoguement pour la Géométrie de Lobatschewsky, pour laquelle il faut encore admettre que : par une droite parallèle à un plan a passe un seul plan parallèle au plan a", et que "il existe une droite parallèle à deux demi-droites, non contenues sur la même droite et qui ont leur origine commune" ; car si le mot point signifie "point interne à un polyèdre convexe" , les postulats de la Géométrie de position sont vérifiés, mais les deux propositions que nous venons de citer ne sont pas, en général, vérifiées.

Géométrie du mouvement. Dans l'axiome VIIIe du Ier livre, Euclide introduit explicitement l'idée du mouvement en disant "Les grandeurs qu'on peut faire coïncider l'une sur l'autre sont égales" ; mais on peut retenir cette idée sous-entendue aussi dans les premiers axiomes qui sont relatifs à l'égalité des grandeurs. Toutefois l'idée de mouvement n'est point précisée par des postulats et elle est toujours exprimée au moyen de la superposabilité de deux figures. M. Pasch donne un système de postulats qui établit la signification de la relation "La figure a est superposable à la figure b", et la méthode d'Euclide vient d'acquérir une forme scientifique riguoureuse et, en même temps, propre à l'enseignement secondaire. M. Peano, "Sui fondamenti della Geometria" réduit l'idée de mouvement à celle de correspondance entre points et points. Le système de postulats qu'il propose conduit à démontrer que le segment et l'angle sont réversibles, que le postulat d'Archimède est vérifié par les segments et donne encore toute la théorie des perpendiculaires. Mais il ne donne pas la propriété qu'on exprime habituellement, sous forme non précisée, en disant que "le mouvement des figures géométriques a lieu sans déformation". Cette proposition qui exprime, en substance, que : "si un mouvement transforme deux points distincts d'une droite, ou trois points non colinéaires d'un plan, ou quatre points non coplanaires, en eux-mêmes, transforme aussi, en eux-mêmes, chaque point de la droite, ou du plan, ou de l'espace" est une conséquence immédiate du système de postulats que je propose pour le mouvement, et que j'ai obtenu avec la suivante transformation des postulats 6 et 7 du système, de M. Peano, précédemment cité. (6) Si le point a ne coïncide pas avec les points b et c, alors il existe, au moins, un mouvement qui transforme la demi-droite ab en la demi-droite ac ; et les correspondants en deux de ces mouvements d'un même point de la demi-droite ab coïncident. (7) Si les points a, b, c et les points a, b, d ne sont pas colinéaires, alors il existe, au moins, un mouvement qui transforme le demi-plan a, b, c, en le demi-plan a, b, d ; et les correspondants en deux de ces mouvements d'un même point du demi-plan a, b, c, coïncident. (8) Si a, b, c sont des points non colinéaires et si un mouvement transforme a en a, b en b et c en c, alors le correspondant d'un point p non coplanaire à a, b, c, ne peut pas être

2. Peano, Principi di Geometria logicamente esposti. 1889.

en partie opposé de p par rapport au plan abc. Si nous faisons usage des postulats (1)-(7), on a qu'un tétraèdre peut être superposable à son symétrique : cela n'advient point en admettant aussi le postulat (8). On complète le système (1)-(7) en admettant que : "existent deux mouvements qui transforment en eux-mêmes trois points non colinéaires". Les postulats (7), (8) peuvent être remplacés par le seul postulat (7) de M. Peano.

Géométrie métrique. Si aux termes *longueur, aire, volume*, nous donnons la signification que nous avons déjà expliquée, on voit aisément que la géométrie métrique se réduit à un petit ensemble de propositions fondamentales par lesquelles on peut déduire que chaque classe de grandeur géométrique peut être mise en correspondance univoque et réciproque avec les nombres réels et positifs. Ce qui revient à traduire le Ve livre d'Euclide en substituant aux mots ἄριθμος et λόγος les expressions, qui nous sont habituelles aujourd'hui, *nombre entier, nombre réel.*

Je démontre, dans ma Théorie des Grandeurs [3], qu'on peut réduire à 8 propositions celles qui doivent être vérifiées par une classe de grandeurs, afin de pouvoir affirmer que la classe que nous considérons peut être mise en correspondance univoque et réciproque avec les nombres réels. Pour les longueurs, on démontre aisément ces propriétés ; et celle qui exprime qu'une grandeur n'est pas la somme d'elle-même avec une grandeur, est une conséquence immédiate de la rigidité du segment dans le mouvement. Qu'une aire (ou un volume) ne peut jamais être la somme d'elle-même avec une aire (ou un volume) est admis comme postulat dans les traités ordinaires. M. L. Gérard (à Lyon) a récemment démontré [4] ces deux propositions en les réduisant à la proposition correspondante pour les longueurs, et par conséquent la question même de l'équivalence reste complètement résolue.

3. Formulaire de Mathématiques t. I. IV.
4. Bulletin de Mathém, spéciales t. I. Bulletin de Mathém. élémentaires t. I et t. II. Bulletin de la Société mathématique de France t. XXIII.