Un nouveau système de définitions pour la géométrie euclidienne

Alessandro Padoa à Rome

1. Études précédentes.

La signification de quelques-uns des symboles qu'on rencontre en Géométrie doit être présupposée, même si l'on présuppose celle des symboles qui appartiennent à la Logique pure [1].

Comme il y a de l'arbitraire dans le choix des symboles non définis, il faut énoncer le système choisi [2].

Nous citerons seulement trois géomètres qui se sont préoccupés de cette question et qui ont réduit successivement le nombre des symboles non définis, au moyen desquels (et au moyen des symboles qui appartiennent à la logique pure) on peut définir tous les autres symboles [3].

D'abord, M. Pasch, qui en 1882 [4] a réussi à définir tous les autres symboles, au moyen des quatre suivants :

1. point,
2. segment (de droite) [5],

Transcription en LaTeX Denise Vella-Chemla, août 2025.

[1] Presque toujours on identifie une chose avec son nom (on dit, par exemple : Paris est une ville, et non Paris est le nom d'une ville), une idée avec le symbole (mot ou phrase, signe ou suite de signes) qui la représente, un fait avec la proposition qui l'énonce voilà pourquoi on peut se borner à parler de symboles et de propositions.
Puisque, en Géométrie, définir un symbole signifie l'exprimer par d'autres déjà considérés et démontrer une proposition signifie la déduire d'autres déjà énoncées, l'impossibilité de définir tous les symboles et de démontrer toutes les propositions est une conséquence immédiate de la signification donnée aux mots définir et démontrer.
En ajoutant qu'il serait impossible de définir les symboles dont on fait usage en géométrie, au moyen de ceux qui appartiennent à la logique pure, nous avons affirmé que la Géométrie est une théorie déductive particulière, et non une branche de la Logique pure ce que d'ailleurs tout le monde accepte sans discussion, bien que cette affirmation ne puisse pas être justifiée et n'ait pas même une signification précise, si l'on n'établit préalablement les bornes de la Logique pure [ce que nous avons tâché de faire dans une autre étude Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une Introduction logique à une théorie déductive quelconque (Bibliothèque du Congrès international de Philosophie, Paris, Armand COLIN, 1900, p. 309-365)].

[2] La liberté relative du choix dont nous parlons est démontrée suffisamment par cette même étude.

[3] Il n'est pas inutile de remarquer qu'on peut répéter, à propos des propositions et des démonstrations, tout ce que nous venons d'avancer au sujet des symboles et des définitions. [En effet Parmi les propositions (définitions exceptées) qu'on rencontre en Géométrie, il y en a nécessairement qui ne sont pas démontrées, même en présupposant celles qui appartiennent à la logique pure (axiomes). Comme il y a de l'arbitraire dans leur choix, il faut énoncer le système choisi des propositions non démontrées (postulats), au moyen desquelles (et au moyen des axiomes et des définitions) on peut démontrer toutes les autres propositions.] Malgré cette frappante analogie entre leur rôle, la préoccupation du choix des postulats est très ancienne, tandis que la préoccupation du choix des symboles non définis est tout à fait moderne. Sans en donner une démonstration historique, qui nous semble superflue, nous en donnons une philologique, moins banale qu'elle peut paraître. Pour remplacer la phrase proposition non démontrée, il y a le mot postulat, mais on n'a pas encore inventé un mot pour remplacer la phrase symbole non défini, car cette phrase a été employée si peu jusqu'à présent, qu'on n'a pas trouvé nécessaire de l'abréger.

[4] *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Teubner, Leipzig.

[5] On doit donner au mot segment sa signification élémentaire et non sa signification projective ; par conséquent,

3. plan [6],
4. est superposable à.

Ensuite, M. Peano, qui en 1889 [7] a réussi à définir plan, au moyen de point et segment, et qui en 1894 [8] remplaça dans le système des symboles non définis “est superposable à” par “mouvement” [9] en réduisant ce système aux symboles :

1. point,
2. segment,
3. mouvement.

Enfin, M. Pieri, qui en 1899 [10] a réussi à définir “segment” au moyen de “point” et “mouvement”.

Par conséquent, tous les symboles qu'on rencontre dans la Géométrie euclidienne peuvent être définis à l'aide de deux seuls d'entre eux, savoir

1. point,
2. mouvement [11].

---

deux points sont toujours les extrêmes d'un seul segment.
Si a et b sont des points distincts, au lieu de la figure continue “segment ab”, on peut considérer d'abord (comme symbole non défini) la relation entre trois points “x est un point placé entre a et b, grâce à laquelle on peut donner cette définition : “segment ab” signifie “figure à laquelle appartiennent a, b et tous les points x qui sont placés entre a et b”.

[6] Même seulement “partie finie d'un plan”.

[7] *I principii di geometria, logicamente esposti.* Bocca, Torino.

[8] *Sui fondamenti della geometria* (*Revue de Mathématiques*, Turin).

[9] Au lieu de considérer l'infinité des positions successives d'une figure en mouvement, il ne faut considérer que sa première et sa dernière position.
Si a est un point (ou une figure) et si m est un mouvement, on représente par ma ce que devient le point (ou la figure) a après le mouvement m. En d'autres termes, il faut considérer chaque mouvement comme un signe particulier de fonction qui transforme les points en points.
Le lien logique entre le quatrième symbole non défini de M. Pasch et le troisième de M. Peano devient alors évident on peut les définir l'un par l'autre, à l'aide du premier seulement.
En effet, la signification du symbole “est superposable à” étant présupposée : “m est un mouvement signifie m est un signe de fonction qui transforme chaque figure en une figure qui est superposable à la figure donnée” ; et réciproquement, la signification du symbole mouvement étant présupposée : si a et b sont des figures, alors “a est superposable à b” signifie : “il existe au moins un mouvement m tel que ma coïncide avec b”.

[10] *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo (Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino).*

[11] Il paraît que tout ce que je viens de rappeler est très peu connu, car dans plusieurs ouvrages qui ont pour but l'analyse des principes de la Géométrie, on rencontre un nombre bien plus grand de symboles non définis. Voir, par exemple :
Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, 1898,
Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1900,
Enriques, *Questioni riguardanti la geometria elementare*, 1900.
Ce qui, évidemment, n'empêche pas que ces ouvrages puissent être intéressants à d'autres points de vue.

2. Question.

Maintenant, on peut se poser cette question : Pour simple que soit le système de symboles non définis choisi par M. Pieri, est-ce qu'on ne pourrait en trouver un plus simple encore ?

Il faut d'abord préciser cette question, en ôtant à la simplicité dont il s'agit son caractère de relativité et de subjectivité.

Chaque mouvement, selon MM. Peano et Pieri, est une fonction qui transforme d'une certaine manière les points en points. Or, puisque :

1º le nombre des points distincts est infini ; 2º il y a au moins un mouvement qui transforme un point donné en un autre point donné ; 3º deux mouvements qui transforment différemment le même point sont distincts ; on en déduit que le nombre des mouvements distincts est infini ; et, par conséquent, "mouvement" est la classe à laquelle appartient un nombre infini de fonctions déterminées (mouvements), et chacune de ces fonctions est une relation déterminée entre un nombre infini d'objets (points).

Maintenant, nous précisons notre question : après avoir choisi comme primitif le symbole "point", est-ce qu'il ne suffirait pas de choisir comme second symbole primitif une relation particulière entre un nombre fini de points ?

Nous nous proposons de justifier la réponse affirmative que nous croyons pouvoir donner à cette question.

3. Introduction.

Nos seuls symboles non définis sont

1. point,
2. est superposable à,

avec cette restriction, pour le second, que nous ne le définissons pas dans le seul cas où il est employé entre des couples de points [12].

Après l'ouvrage cité de M. Pieri (nº 1), notre affirmation (nº 2) sera justifiée lorsque nous aurons défini le mouvement, au moyen de nos symboles non définis, ce que nous allons faire dans le nº 4,

[12] Je dois avertir qu'à l'insu l'un de l'autre, M. Pieri et moi, nous avons eu en même temps la même idée. En effet, M. Pieri, dans son étude *Sur la Géométrie envisagée comme un système purement logique* (qui est un abrégé de l'autre déjà citée et qui fut communiquée au Congrès international de Philosophie, par M. Couturat, le 3 août 1900, lorsque ma communication actuelle était déjà préparée et annoncée), énonce la possibilité de définir tous les autres symboles géométriques au moyen des deux que j'ai choisis comme non définis, tout en ajoutant que la complication excessive à laquelle lui semble donner origine le développement de ce système lui donne le désir d'entreprendre de nouvelles études à ce sujet, avant d'en énoncer les premiers résultats.

en laissant de côté toute préoccupation didactique [13].

Comme aujourd'hui nous ne voulons pas nous occuper des postulats, nous supposons en avoir construit un système dans lequel soient énoncées quelques propriétés de nos symboles non définis, suffisantes pour en déduire toutes les autres propriétés de ces symboles et des autres qui, par leur moyen, seront définis [14].

Pour abréger nous écrirons :

Def	au lieu de	définition,
figure		ensemble de points,
$\equiv$		est superposable à,
(a, b)		couple formé par les objets a et b.

4. Définition de mouvement.

Def 1. Si a et b sont des points distincts [15], "droite ab" signifie : "figure à laquelle appartient chaque point x, tel qu'il n'existe aucun point y, distinct de x, qui vérifie simultanément les conditions

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{et} \quad (b, y) \equiv (b, x). \quad \text{"}$$

Def II. Quels que soient les points a et b, "centre de (a, b)" signifie "point x tel que $(a, x) \equiv (x, b)$, et qu'il n'existe aucun point y, distinct de x, qui vérifie simultanément les conditions

$$(a, y) \equiv (a, x) \quad \text{et} \quad (b, y) \equiv (b, x) \quad \text{"}$$ [16].

[13] Il est presque inutile de remarquer que, si l'on énonçait tout de suite cette définition : "mouvement signifie "la classe à laquelle appartient toute fonction m telle que 1° si x est un point, mx est aussi un point ; 2° quels que soient les points x et y, le couple (mx, my) est superposable au couple (x, y)", on pourrait en déduire que "la symétrie par rapport à un plan arbitraire est un mouvement" ; et alors le mot mouvement n'aurait plus sa signification ordinaire [tandis qu'il l'a conservée dans l'ouvrage cité de M. Pieri, aussi bien que dans l'autre de M. Peano (n°1)].

[14] Il est donc bien entendu que, si aujourd'hui nous nous occupons seulement des symboles non définis et des définitions, ce n'est pas que nous croyons pouvoir nous passer de postulats.
Mais la désinvolture avec laquelle nous supposons avoir construit un système de postulats, sans nous donner la peine de le construire, effectivement, peut sembler bien commode et peut-être excessive. Nous espérons qu'une remarque, bien simple d'ailleurs, sera suffisante pour nous justifier.
Si (après avoir choisi un système de symboles non définis et un système de postulats) on veut changer le système de symboles non définis, il n'est pas nécessaire de changer le système de postulats (tout au plus, on pourrait les transcrire, en remplaçant les anciens symboles non définis par leur signification exprimée au moyen des nouveaux ; mais il paraît que cela même ne soit pas absolument nécessaire, car il n'y a peut-être pas un seul livre de Géométrie dont les postulats soient énoncés sans faire usage explicite de quelques symboles définis).
Donc, pourvu que quelqu'un ait construit un système acceptable de postulats pour la Géométrie euclidienne, on pourra se servir de ce système, sans se préoccuper de la diversité des systèmes de symboles non définis.

[15] "x et y sont des points coïncidants" signifie "x est un point et y est le même point" ; "x et y sont des points distincts" signifie : "x est un point et y est un autre point". Par conséquent, quoique les mots "coïncidants" et "distincts" soient employés presque exclusivement en Géométrie, les idées qu'ils représentent appartiennent à la Logique pure aussi bien que celles représentées par les termes "le même" et "un autre".

[16] On pourrait remplacer la *Def II* par les suivantes :
Def II'. Quel que soit le point a "centre de (a, a)" signifie a ;
Def II". Si a et b sont des points distincts "centre de (a, b)" signifie : "point x, de la droite ab (*Def I*), tel que $(a, x) \equiv (x, b)$".

Def III. "t est une translation" signifie : "quel que soit le point x, tx est aussi un point ; et quels que soient les points x et y, le centre de (x, ty) (*Def II*) est aussi le centre de (tx, y)".

Def IV. Si a et b sont des points distincts, "r est une rotation autour de $(a,\ b)$" signifie :

"1° Quel que soit le point x, rx est aussi un point ;

2° Quels que soient les points x et y, $(rx, ry) \equiv (x, y)$;

3° ra et rb coïncident respectivement avec a et b ;

4° Si un point x, qui n'appartient pas à la droite ab (*Def I*) coïncide avec rx, tout point y coïncide avec ry" [17]".

Def V. Si a est un point, "r est une rotation autour de a" signifie : "on peut déterminer des points b et c distincts de a, une rotation r' autour de (a, b) (*Def IV*) et une rotation r'' autour de (a, c), de manière que, si x est un point quelconque, rx coïncide avec $r''(r'x)$" [18].

Def VI. "m est un mouvement" signifie : "on peut déterminer une translation t (*Def III*), un point a et une rotation r autour de a (*Def V*), de manière que, si x est un point quelconque, mx coïncide avec $r(tx)$" [19]

Les postulats (n°3) doivent énoncer, ou permettre de déduire, l'existence et l'unicité du point considéré dans la *Def II* et doivent permettre aussi de déduire la *Def II'* de la *Def II*.

[17] Voyons si un r qui satisfait aux conditions énoncées dans cette *Def* pourrait ne pas être une rotation autour de (a, b), selon l'acception ordinaire de cette phrase. Après les conditions 1°, 2°, 3°, on pourrait encore supposer que r soit une symétrie par rapport à un plan déterminé, par exemple σ, auquel appartiendraient les points a et b ; mais alors, si x était un point appartenant au plan σ et non à la droite ab, et si y était un point n'appartenant pas au plan σ, x coïnciderait avec rx, tandis que y serait distinct de ry, ce qui serait en contradiction avec la condition 4°. Par suite, moyennant la *Def IV*, la phrase définie "r est une rotation autour de (a, b)" acquiert exactement sa signification ordinaire.

[18] Soit r une rotation autour de a, selon l'acception ordinaire de cette phrase ; alors ra coïncide avec a.
S'il y a un point y distinct de a qui coïncide avec ry, on aura rempli les conditions énoncées dans la *Def V*, en identifiant b avec y, r' avec r, c avec un point quelconque et r'' avec une transformation identique (dans notre cas, rotation nulle ou, ce qui est la même chose à notre point de vue, tour complet).
Si aucun point y distinct de a ne coïncide avec ry, on pourra remplir aisément les conditions énoncées dans la *Def V*, en choisissant b et r' de manière que pour un certain point y, quelconque mais distinct de a, $r'y$ coïncide avec ry [par exemple, soit b le centre de (y, ry) et soit r' un demi tour], en identifiant c avec ry et en choisissant r'' de manière que pour un certain point z, quelconque mais n'appartenant pas à la droite ay, $r''(r'z)$ coïncide avec rz [ce qui est bien possible car puisque

$$(a, r'z) \equiv (a, z) \equiv (a, rz) \quad \text{et} \quad (r'y, r'z) \equiv (y, z) \equiv (ry, rz),$$

l'on a

$$(a, r'z) \equiv (a, rz) \quad \text{et} \quad (c, r'z) \equiv (c, rz)].$$

Après quoi, puisque a, y, z n'appartiennent pas à une même droite et puisque ra, ry, rz coïncident respectivement avec $r''(r'a), r''(r'y), r''(r'z)$, si x est un point quelconque, rx coïncide aussi avec $r''(r'x)$.

[19] Soit m un mouvement, selon l'acception ordinaire de ce mot.
S'il y a un point y, qui coïncide avec my, on aura rempli les conditions énoncées dans la *Def VI*, en identifiant t avec une transformation identique (translation nulle), a avec y, r avec m.
Si aucun point y ne coïncide avec my, on pourra remplir aisément les conditions énoncées dans la *Def VI*, en choisissant t de manière que, pour un certain point quelconque y, ty coïncide avec my, en identifiant a avec my et en choisissant r de manière que, si u est un certain point quelconque distinct de y et v est un certain point quelconque n'appartenant pas à la droite yu, $r(tu)$ et $r(tv)$ coïncident respectivement avec mu et mv.

5. Essai d'autres définitions.

Maintenant que nous avons accompli notre tâche (n° 4) en laissant de côté toute préoccupation didactique (n° 3), nous désirons faire remarquer la possibilité d'employer notre système de symboles non définis (n° 3), même dans l'enseignement élémentaire.

Naturellement il faudra modifier un peu la définition de mouvement [20] ; d'abord, on pourra définir d'autres symboles et en développer la théorie au moyen de postulats (n° 3).

Nous donnerons ici un petit essai de ces définitions.

Def I. (La *Def I* du n° 4.)

Def II. (La *Def II* énoncée dans la note à la *Def II* du n° 4.)

Dans toutes les *Def* suivantes, il est sous-entendu que a et b sont des points distincts.

Def III. "surface sphérique qui a pour centre a et qui passe par b" signifie : "figure à laquelle appartient tout point x tel que

$$(a, x) \equiv (a, b) \quad ".$$

Def IV. "surface sphérique qui a pour pôles a et b" signifie "surface sphérique qui a pour centre le centre de (a, b) (*Def II*) et qui passe par b (*Def III*)".

Def V. Si c et d sont des points distincts de la droite ab (*Def IV*), "(c, d) n'entrelace pas (a, b)" [21] signifie : "la surface sphérique qui a pour pôles a et b (*Def IV*) n'a aucun point commun avec la surface sphérique qui a pour pôles c et d".

Def VI. "c est un point placé entre a et b" signifie : "Si x est le centre de (a, b) (*Def II*), c coïncide avec x ou est un point de la droite ab (*Def I*) tel que (c, x) n'entrelace pas (a, b) (*Def V*)".

Def VII. "segment ab" signifie "figure à laquelle appartiennent a, b et tout point placé entre a et b (*Def VI*)".

Def VIII. "prolongement de ab [22]" signifie "figure à laquelle appartient tout point x tel que b soit placé entre a et x (*Def VI*)".

Def IX. "rayon ab" [23] signifie "figure à laquelle appartient tout point du segment ab (*Def VII*) et

[20] Et l'on pourra même se passer complètement de ce symbole, en définissant la relation "est superposable à" entre des figures quelconques.

[21] Pour éviter toute ambiguïté, nous avons remplacé par "n'entrelace pas" la phrase, habituelle en Géométrie projective, "ne sépare pas" ; car, si par exemple les points considérés se suivent dans l'ordre a, c, d, b, il nous semble que l'énoncé "(c, d) n'entrelace pas (a, b)" soit plus proche du langage ordinaire que l'autre "(c, d) ne sépare pas (a, b)".

[22] Nous abrégeons ainsi la phrase trop longue "prolongement du segment ab du côté de b".

[23] Nous abrégeons sinsi la phrase trop longue "rayon qui sort de a et qui passe par b".

du prolongement de ab (*Def VIII*) [24].

Def X. Si c et d sont des points distincts de la droite ab (*Def I*), "d suit c comme b suit a" signifie "le prolongement de ab (*Def VIII*) contient le prolongement de cd, ou celui-ci contient celui-là".

Def XI. "symétrique de a par rapport à b" signifie : "point x tel que b est le centre de (a, x) (*Def II*)".

*

*   *

Dans toutes les *Def* suivantes, il est sous-entendu que c est un point n'appartenant pas à la droite ab (*Def I*).

Def XII. "(a, b) est perpendiculaire à (b, c)" signifie : "b est un point de la surface sphérique qui a pour pôles a et c (*Def IV*)".

Def XIII. Si d est un point distinct de c, "(c, d) est parallèle à (a, b)" signifie : "le symétrique de a par rapport au centre de (b, c) (*Def II, XI*) est un point de la droite cd (*Def I*)".

Def XIV. "x est un point intérieur au triangle abc" signifie : "x est un point distinct de a et il y a un point du prolongement de ax (*Def VIII*) qui est placé entre b et c (*Def VI*)".

Def XV. "x est un point intérieur à l'angle $\widehat{abc}$" [25] signifie : "x est un point distinct de b et il y a un point du rayon bx (*Def IX*) qui est placé entre a et c (*Def VI*)".

Def XVI. "plan abc signifie : "figure à laquelle appartient tout point x tel qu'il n'existe aucun point y, distinct de x, qui vérifie simultanément les conditions $\begin{array}{ll} (a, y) & \equiv (a, x), \\ (b, y) & \equiv (b, x), \\ (c, y) & \equiv (c, x) \end{array}$ ".

*

*   *

L'essai de *Def* que nous venons de donner nous semble suffisant à prouver la possibilité d'adopter notre méthode, même dans l'enseignement élémentaire.

On remarquera l'analogie parfaite qui existe entre les *Def I* et *XVI* des deux figures fondamentales droite et plan, et la possibilité de définir le plan immédiatement après la droite [26] ou de différer la *Def* du plan, ainsi que nous avons fait, pour définir auparavant les relations de perpendicularité et de parallélisme entre couples de points (ou droites), qui n'en dépendent pas nécessairement.

[24] Ou, en se rapportant directement à la *Def VI*, "figure à laquelle appartient chaque point x tel qu'il existe au moins un point y tel que b et x soient placés entre a et y (*Def VI*)".

[25] Nous considérons ici les angles convexes seulement.

[26] La *Def XVI* ne présuppose, en effet, aucune des *Def* qui suivent la *Def I*.

Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre

Alessandro Padoa à Rome

I. Avant-propos.

Dans l'*Introduction logique à une théorie déductive quelconque* qui précède notre *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers* [27], nous avons analysé la structure formelle d'une théorie déductive quelconque, pour établir les principales conditions de sa perfection logique et les règles pratiques pour reconnaître si ces conditions se trouvent vérifiées dans une théorie donnée.

Maintenant, nous ne faisons que rappeler ces conditions et énoncer ces règles, dont l'étude appartient à la logique générale, pour en faire unc application mathématique à l'analyse des principes de l'Algèbre.

D'abord il faut déclarer quels sont les symboles dont on fait usage dans la théorie sans les définir (symboles non définis) et énoncer les propositions (définitions exceptées) qu'on accepte dans la théorie sans les démontrer (postulats) [28].

Les postulats doivent être compatibles ; c'est-à-dire qu'ils ne doivent pas se contredire.

Pour démontrer la compatibilité d'un système de postulats, il faut trouver une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats [29].

Le système des postulats doit être irréductible ; en d'autres termes, les postulats doivent être absolument indépendants ; c'est-à-dire il faut qu'aucun des postulats ne puisse être déduit des autres ; ou bien encore : il faut qu'en remplaçant séparément chaque postulat par sa négation, on obtienne un système de propositions compatibles.

Pour démontrer l'irréductibilité d'un système de postulats, il faut trouver, pour chacun d'eux, une interprétation des symboles non définis, qui ne vérifie pas le postulat considéré, mais qui vérifie simultanément tous les autres.

Le système des symboles non définis doit être irréductible par rapport au système des postulats ; en d'autres termes, il faut que des postulats on ne puisse déduire aucune proposition qui soit une définition possible d'un des symboles non définis au moyen des autres [30].

Pour démontrer l'irréductibilité d'un système de symboles non définis par rapport à un système de postulats, il faut trouver une interprétation des symboles non définis, qui vérifie simultanément tous les postulats, et qui continue à les vérifier lorsqu'on change convenablement la signification

[27] Communiqué au Congrès international de Philosophie (Paris, 3^{e} série, t. VIII ; 1900).

[28] Par une convention, fort commune d'ailleurs, nous identifions chaque idée avec le symbole qui la représente et chaque fait avec la proposition qui l'énonce.

[29] Chacune de ces interprétations vérifie nécessairement toutes les propositions de la théorie considérée.

[30] Ici nous considérons les seules définitions nominales (et non les définitions par induction, par abstraction, etc.).

d'un seul des symboles non définis, et cela pour chacun d'eux.

II. Nos symboles non définis et nos postulats.

Nos symboles non définis (I) sont au nombre de trois :
1. **entier**,
2. le successif de (abrégé par **suc**),
3. le symétrique de (abrégé par **sym**).

Nos postulats (I) sont au nombre de sept :

Si a est un **entier** quelconque :

1. $\mathbf{suc}\, a$ est un **entier**,
2. $\mathbf{sym}\, a$ est un **entier**,
3. $\mathbf{sym}\,(\mathbf{sym}\, a) = a$ [31],
4. $\mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,[\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, a)]\} = a$.
5. Il y a un **entier** [32] x, tel que $\mathbf{sym}\, x = x$.
6. Il n'y a pas d'**entiers** x et y, différents entre eux, tels que $\mathbf{sym}\, x = x$ et $\mathbf{sym}\, y = y$.
7. Si une classe u vérifie les conditions

   α) il y a un **entier** [33] qui appartient à la classe u,

   β) toutes les fois qu'un **entier** x appartient à la classe u, $\mathbf{suc}\, x$ appartient aussi à la classe u,

   γ) toutes les fois que x est un **entier** tel que $\mathbf{suc}\, x$ appartienne à la classe u, x appartient aussi à la classe u,

   alors tout **entier** appartient à la classe u.

III. Compatibilité de nos postulats.

Nos postulats (II) sont compatibles (I).

En effet (I), voici une interprétation de nos symboles non définis (II) qui vérifie simultanément tous nos postulats :

[31]Le symbole (qu'on peut lire "est égal à" ou bien "est la même chose que") appartient à la logique générale, ainsi que les symboles "classe", "est un", etc.
[32]Sans exclure qu'il y en ait plusieurs.
[33]Sans exclure qu'il y en ait plusieurs.

entier signifie [34] nombre entier relatif [35],

et, si x est **entier** quelconque,

$\mathbf{suc}\, x$ signifie $1 + x$,

$\mathbf{sym}\, x$ signifie $-x$ [36].

IV. Irréductibilité de notre systéme de postulats.

Notre système de postulats (II) est irréductible (I).

En effet (I), voici, pour chacun des postulats, une interprétation de nos symboles non définis (II), qui ne vérifie pas le postulat considéré, mais qui vérifie simultanément tous les autres.

Dans ces interprétations, a, b, c, d, e représentent des objets quelconques, mais tous différents entre eux.

1. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 1.

entier signifie classe dont le seul individu est a ;

$\mathbf{suc}\, a = b, \mathbf{suc}\, b = a$;

$\mathbf{sym}\, a = a, \mathbf{sym}\, b = b$ [37].

---

[34] Dans cette étude, après le mot “signifie”, il faut toujours sous-entendre les mots “ce que signifie d'ordinaire”.

[35] C'est-à-dire nombre entier, positif ou négatif, 0 compris.

[36] On constate immédiatement que l'interprétation énoncée vérifie les postulats 1, 2, 3, elle vérifie aussi le postulat 4, parce que

$$-\{1 + [(1 + a)]\} = a.$$

Puisque 0 est un **entier** et $\mathbf{sym}\, 0 = 0$, le postulat 5 est aussi vérifié.
Puisque 0 est le seul **entier** x, tel que $\mathbf{sym}\, x = x$, le postulat 6 est aussi vérifié.
Le postulat 7 est aussi vérifié en effet, soit a un **entier** qui appartient à la classe u (cette supposition est légitime d'après la condition α), alors, à cause de la condition β, tout **entier** plus grand que a appartient aussi à la classe u ; et, à la condition γ, tout **entier** plus petit que a appartient aussi à la classe u ; par suite, tout **entier** appartient à la classe u.

[37] L'interprétation 1 ne vérifie pas le postulat 1 (parce que, par hypothèse, a et b sont différents), mais on constate immédiatement qu'elle vérifie les postulats 2, 3, 5.
Elle vérifie aussi le postulat 4, parce que

$$\mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,[\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, a)]\} = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym}\, b)] = \mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, b) = \mathbf{sym}\, a = a,$$

le postulat 6 (parce qu'il n'y a qu'un **entier**) et le postulat 7 (en effet, puisqu'il n'y a qu'un **entier**, de la seule condition α de son hypothèse on déduit immédiatement sa thèse).

2. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 2.

entier signifie nombre entier positif, 0 compris.

Et, si x est un **entier** relatif [38],

$\mathbf{suc}\, x$ signifie $1 + x$,

$\mathbf{sym}\, x$ signifie $-x$ [39].

3. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 3.

entier signifie ensemble des objets a, b, c, d,

$\mathbf{suc}\, a = b, \mathbf{suc}\, b = c, \mathbf{suc}\, c = d, \mathbf{suc}\, d = a$,

$\mathbf{sym}\, a = a, \mathbf{sym}\, b = d, \mathbf{sym}\, c = b, \mathbf{sym}\, d = c$ [40],

4. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 4

entier signifie ensemble des objets a, b, c, d, e,

$\mathbf{suc}\, a = b, \mathbf{suc}\, b = c, \mathbf{suc}\, c = d, \mathbf{suc}\, d = e, \mathbf{suc}\, e = a$,

$\mathbf{sym}\, a = a, \mathbf{sym}\, b = d, \mathbf{sym}\, c = e, \mathbf{sym}\, d = b, \mathbf{sym}\, e = c$ [41].

---

[38] Voir la note (3) au § III.

[39] L'interprétation 2 ne vérifie pas le postulat 2 (car, par exemple, 1 est un **entier**, mais **sym** 1 n'est pas un **entier**), tandis qu'elle vérifie tous les autres [voir la note ci-après au § III].

[40] L'interprétation 3 ne vérifie pas le postulat 3 [car, par exemple,

$$\mathbf{sym}\,(\mathbf{sym}\, b) = \mathbf{sym}\, d = c,]$$

mais on constate immédiatement qu'elle vérifie les postulats 1, 2, 5. Elle vérifie aussi le postulat 6 (parce que, par hypothèse, b, c, d sont tous différents entre eux), le postulat 4 (parce que

$$\begin{array}{lclclclclcl}
\mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,[\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & a &)] = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym} & b &)] = \mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & d &)\mathbf{sym} & a & = & a, \\
\dots & b & \dots & c & \dots & b & \dots & c & \dots & b, \\
\dots & c & \dots & d & \dots & c & \dots & d & \dots & c, \\
\dots & d & \dots & a & \dots & a & \dots & b & \dots & d)
\end{array}$$

et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

[41] L'interprétation 4 ne vérifie pas le postulat 4 (car, par exemple,

$$\mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,[\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, a)]\} = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym}\, b)] = \mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, d) = \mathbf{sym}\, e = c),$$

mais on constate immédiatement qu'elle vérifie les postulats 1, 2, 5. Elle vérifie aussi le postulat 3 [parce que

$$\begin{array}{lclclcl}
\mathbf{sym}\,(\mathbf{sym} & a &) = \mathbf{sym} & a & = & a, \\
\dots & b & \dots & d & \dots & b, \\
\dots & c & \dots & e & \dots & c, \\
\dots & d & \dots & b & \dots & d, \\
\dots & e & \dots & c & \dots & e].
\end{array}$$

5. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 5.

entier signifie ensemble des objets a et b,

$\mathbf{suc}\, a = b, \mathbf{suc}\, b = a,$

$\mathbf{sym}\, a = b, \mathbf{sym}\, b = a$ [42].

6. Interprétation qui ne vérifie pas le seul postulat 6.

entier signifie ensemble des objets a et b,

$\mathbf{suc}\, a = b, \mathbf{suc}\, b = a =,$

$\mathbf{sym}\, a = a, \mathbf{sym}\, b = b$ [43].

7. Interprétation qui ne vérifie pas le postulat 7.

entier signifie ensemble des objets $a, b, c,$

$\mathbf{suc}\, a = a, \mathbf{suc}\, b = c, \mathbf{suc}\, c = b,$

$\mathbf{sym}\, a = a, \mathbf{sym}\, b = c, \mathbf{sym}\, c = b.$ [44]

---

le postulat 6 (parce que, par hypothèse, b, c, d, e sont tous différents entre eux) et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

[42]L'interprétation 5 ne vérifie pas le postulat 5 (parce que, par hypothèse, a et b sont différents), mais on constate immédiatement qu'elle vérifie les postulats 1, 2, 6.
Elle vérifie aussi le postulat 3 [parce que

$$\mathbf{sym}\,(\mathbf{sym}\, a) = \mathbf{sym}\, b = a, \qquad \mathbf{sym}\,(\mathbf{sym}\, b) = \mathbf{sym}\, a = b],$$

le postulat 4 (parce que

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,[\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & a &)]\} = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym} & b &)] = \mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & a &) = \mathbf{sym} & b & = & a, \\ \ldots & b & \ldots & a & \ldots & b & \ldots & a & \ldots & b) \end{array}$$

et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

[43]L'interprétation 6 ne vérifie pas le postulat 6 (parce que, par hypothèse, a et b sont différents), mais on constate immédiatement qu'elle vérifie les postulats 1, 2, 3, 5.
Elle vérifie aussi le postulat 4 (parce que

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & a &)]\} = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym} & b &)]\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & b &) = \mathbf{sym} & a & = & a \\ , & & & & & & & & & \\ \ldots & b & \ldots & a & \ldots & a & \ldots & b & \ldots & b) \end{array}$$

et le postulat 7 (parce que des seules conditions α et β de son hypothèse on déduit sa thèse).

[44]L'interprétation 7 ne vérifie pas le postulat 7 (car si, par exemple, a est le seul **entier** qui appartient à la classe u, cette classe vérifie les trois conditions de l'hypothèse du postulat 7, mais elle n'en vérifie pas la thèse, parce que, par hypothèse, a, b, c sont tous différents entre eux) ; mais on constate immédiatement qu'elle vérifie les postulats

V. Irréductibilité de notre système de symboles non définis par rapport à notre système de postulats

Notre système de symboles non définis (II) est irréductible (I) par rapport à notre système de postulats (II). En voici la démonstration (1) :

(Dans les interprétations suivantes, a, b, c, d, e, f représentent des objets quelconques, mais tous différents entre eux.)

Si

$$\mathbf{suc}\, a = b, \mathbf{suc}\, b = c, \mathbf{suc}\, c = a, \mathbf{suc}\, d = e, \mathbf{suc}\, e = f, \mathbf{suc}\, f = d,$$

$$\mathbf{sym}\, a = a, \mathbf{sym}\, b = c, \mathbf{sym}\, c = b, \mathbf{sym}\, d = d, \mathbf{sym}\, e = f, \mathbf{sym}\, f = e,$$

tous les postulats sont vérifiés, soit que

entier signifie ensemble des objets $a, b, c,$

soit que

entier signifie ensemble des objets d, e, f [45].

En considérant la première seulement des significations énoncées d'**entier**, nous savons donc que, si

entier signifie ensemble des objets $a, b, c,$

suc a=b, **suc** b = c, **suc** c=a,

sym a=a, **sym** b=c, **sym** c= b,

1, 2, 5, 6.
Elle vérifie aussi le postulat 3, parce que

$$\begin{array}{lclclcl} \mathbf{sym}\,(\mathbf{sym} & a &) = \mathbf{sym} & a & = & a, \\ \quad\ldots & b & \quad\ldots & c & \ldots & b, \\ \quad\ldots & c & \quad\ldots & b & \ldots & c, \end{array}$$

et le postulat 4 (parce que

$$\begin{array}{lclclclclcl} \mathbf{sym}\,\{\mathbf{suc}\,\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & a &)]\} = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym} & a &)] = \mathbf{sym}\,(\mathbf{suc} & a &) = \mathbf{sym} & a & = & a, \\ \quad\ldots & b & \quad\ldots & c & \quad\ldots & b & \quad\ldots & c & \ldots & b, \\ \quad\ldots & c & \quad\ldots & b & \quad\ldots & c & \quad\ldots & b & \ldots & c). \end{array}$$

[45]En donnant à "**entier**" la première des significations énoncées, on constate immédiatement que les postulats 1, 2, 5, 6 sont vérifiés ; pour le postulat 3, voir la note à l'interprétation 7 (IV) ; pour le postulat 4, on constate que

$$\mathbf{sym}\,\mathbf{suc}\,[\mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, a)] = \mathbf{sym}\,[\mathbf{suc}\,(\mathbf{sym}\, b)] = \mathbf{sym}\,(\mathbf{suc}\, e) = \mathbf{sym}\, a = a,$$

et pour le postulat 7 on constate que, des seules conditions α et β de son hypothèse, on déduit sa thèse.
Si l'on remplace réciproquement a avec d, b avec e, e avec f, la signification de **suc** ne change pas et celle de **sym** non plus, tandis que les deux significations d'"**entier**" se remplacent réciproquement. Par suite, en donnant à "**entier**" la seconde des significations énoncées, tous les postulats sont aussi vérifiés.

tous les postulats sont vérifiés.

Mais ils continuent à être vérifiés si, en conservant ces interprétations d'**entier** et de **sym**,

$$\mathbf{suc}\, a = c, \mathbf{suc}\, b = a, \mathbf{suc}\, c = b$$ [46],

et aussi si, en conservant les interprétations précédentes d'**entier** et de **suc**,

$$\mathbf{sym}\, a = b, \mathbf{sym}\, b = a, \mathbf{sym}\, e = c$$ [47]

Ainsi nous avons démontré que notre système de symboles non définis et notre système de postulats satisfont à toutes les conditions logiques que nous avons énoncées dans le § 1 [48].

[46] En effet, nous n'avons fait qu'échanger b et c.

[47] En effet, nous n'avons fait qu'échanger a et c, b et a, c et b.

[48] Pour les définitions des autres symboles de cette théorie (moyennant nos symboles non définis) et les démonstrations des autres propositions de cette théorie (moyennant nos postulats), voir l'*Essai* que nous avons cité au commencement (Bibl, du Congrès int. de Phil., t. III. p. 309-365 ; Armand Colin, Paris, 1got), ou sa traduction idéographique [Numeri interi relativi (Revue de Math., t. VIII, n" 2, p. 73-81 ; Bocca frères, Turin, 1901)].