Sur les fonctions entières d'ordre entier.
P. Boutroux à Paris.

1. On sait aujourd'hui qu'il existe une relation étroite entre deux éléments essentiels d'une fonction entière : la densité de ses zéros et la croissance de son module lorsque le module de la variable augmente indéfiniment. Cette relation a pu être déterminée avec une très grande précision pour toutes les fonctions entières dont l'ordre n'est pas entier. Soit, en d'autres termes, ρ le plus petit nombre positif tel que les séries $\sum a_i^{-\rho-s}$, $\sum a_i^{-\rho+s}$, étendues aux divers zéros de la fonction, soient, la première convergente, la seconde divergente, quelque petit que soit s. La relation que l'on a obtenue est valable lorsque ρ n'est pas entier. En revanche, elle peut cesser de l'être si le nombre ρ est entier.

Le cas des fonctions d'ordre entier apparaît ainsi, au premier abord, comme beaucoup plus compliqué que le cas général. Il se trouve cependant que ces fonctions jouissent de propriétés remarquables spéciales qui souvent, au contraire, les rendront plus simples que les autres. C'est ce que je voudrais montrer par un exemple, à propos de deux notes récentes publiées par MM. Hardy et Wiman [1].

2. Je rappellerai d'abord quelques résultats antérieurs.

Considérons le produit de facteurs primaires à croissance regulière

$$G(z) = \prod \left(1 - \frac{s}{a_i}\right) e^{\frac{s}{a_i} + \ldots + \frac{s^p}{p a_i^p}},$$

et supposons d'abord, pour fixer les idées, que l'ordre [2] du module $|a_n|$ du zéro de rang n soit

$$(n \log n)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \text{ entier, genre du produit}).$$

Si la règle applicable aux produits d'ordre non entier était valable pour $G(z)$, le module maximum (pour $|z| = r$), $\mathtt{M}(r)$, de $G(z)$ serait de l'orde de

$$M(r) = e^{r^p (\log r)^{-1}}.$$

Mais cette règle est en général inapplicable. Déterminons le nombre n par la condition $|a_n| = \eta r$ (η nombre positif donné) : j'ai établi [3] qu'il y avait lieu de distinguer deux cas :

1°. Si la somme $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ est, pour des valeurs de n indéfinement croissantes, supérieure en module à une quantité A, alors, pour ces valeurs, $\mathtt{M}(r)$ est de l'ordre de c^{Ar^p}, et par suite d'ordre supérieur à $M(r)$.

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, août 2025.

[1] Hardy : On the roots of the equation $\dfrac{1}{\Gamma(x+1)} = c$ (Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, Vol. II, part. I.) – Wiman : Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières. (Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik, 1904 Band I.)

[2] J'adopte ici la terminologie abrégée qu'a employée M. Wiman. Voir la note citée pp. 328-329.

[3] J'ai exposé ces divers résultats dans un mémoire *Sur quelques propriétés des fonctions entières.* (Acta Mathematica, tome 28).

2°. Si la série $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ (les zéros étant rangés par ordre de modules croissants) est semi-convergente et a pour somme zéro, la règle générale est satisfaite, et $\mathtt{M}(r)$ est de l'ordre de $M(r)$.

Ainsi, l'ordre de grandeur de la fonction $G(z)$ dépend essentiellement de la distribution et, en particulier, des arguments de ses zéros. Il est clair qu'une disposition des zéros rendant la série $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ semi-convergente et égale à 0 sera une disposition très spéciale. Supposons la croissance des modules des zéros régulière, et soit par exemple $p = 1$. Il faudra, pour que la condition voulue soit remplie, que les zéros soient approximativement égaux et de signes contraires, – circonstance évidemment exceptionnelle.

Nous obtenons des résultats analogues, si nous considérons une fonction $G(z)$, pour laquelle l'ordre de $|a_n|$ soit de la forme [4]

$$\mu(n) = [n(\log\, n)^{\alpha}]^{\frac{1}{p}}.$$

Si tous les a_n se trouvent, par exemple, dans un même angle, le module maximum $\mathtt{M}(r)$ est de l'ordre de

$$e^{r^p(\log\, r)^{1-\alpha}}.$$

Si au contraire ils sont tels que la série $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ soit nulle, $\mathtt{M}(r)$ a pour ordre

$$M_1(r) = e^{r^m(\log\, r)^{-\alpha}}.$$

D'une manière générale, pour que l'ordre de $\mathtt{M}(r)$ soit $M_1(r)$, il faut que la valeur de $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ ne dépende que d'un ensemble partiel de zéros $b_{n'}$ croissant, en module, comme

$$[n'(\log\, n')^{\alpha-1}]^{\frac{1}{p}},$$

et que la série $\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ étendue aux zéros restants soit semi-convergente.

L'ensemble partiel laissé de côté $b_1, b_2, \ldots b_{n'}$, est d'ailleurs manifestement négligeable par rapport à l'ensemble total des zéros a_i.

Les fonctions que je viens de citer sont des fonctions pour lesquelles l'ordre est égal au genre. On fait, d'une manière toute semblable, l'étude du cas où $\rho = p + 1$.

3. Le nouveau résultat que j'ai en vue est relatif à la distribution des zéros de la somme $G(z) + g(z), g(z)$ étant une fonction entière quelconque dont l'ordre est moindre que l'ordre de $G(z)$.

[4] On traiterait tout aussi complètement le cas où $\mu(n)$ est de la forme $[n(\log n)a_1(\log\,\log n)a_2\ldots]^{\frac{1}{p}}$.

M. Wiman a démontré le théorème suivant : si l'on ajoute à la fonction $G(z)$ une fonction quelconque $g(z)$ d'ordre inférieur, toutes les fonctions $G(z)+g(z)$ obéissent à la loi qui régit les fonctions d'ordre non entier. – Reprenons, par exemple, notre première fonction pour laquelle $|a_n|$ croît comme $(n\log n)^{\frac{1}{p}}$. Le module maximum de cette fonction $G(z)$ croît comme e^{Ar^p}. L'ordre du $n^{\text{ième}}$ zéro, a'_n, de $G(z)+g(z)$ sera donc $n^{\frac{1}{p}}$.

En rapprochant ce théorème des résultats que j'ai rappelés, on arrive à la conclusion suivante :

Quelle que soit la fonction $g(z)$, la distribution des zéros, a'_n, de $G+g$ est telle que la série $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{a_i'^p}$ soit semi-convergente et égale à zéro.

Dans le cas plus général où l'ordre de $|a_n|$ est $\mu(n)$, on peut encore affirmer que la série $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{a'_i p}$, étendue aux zéros de $G+g$ (à l'exclusion peut-être d'un ensemble partiel de zéros négligeable par rapport à l'ensemble total) est semi-convergente.

Ce résultat peut, à première vue, paraître paradoxal. La distribution des zéros de $G(z)$ est arbitraire, aussi bien que celle des zéros de $g(z)$: et cependant la distribution des zéros de $G+g$ obéit à une loi invariable. C'est là, il est aisé de s'en rendre compte, une circonstance qui ne se présente pas dans la théorie des fonctions d'ordre non entier.

Mais la remarque suivante suffit à expliquer cette bizarrerie. Bornons-nous au produit $G(z)$ d'ordre $(n\log n)^{\frac{1}{p}}$, pour lequel la somme $\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{a_i^p}$ croît en module plus vite qu'une fonction $A(r)$. On vérifie alors que dans p angles égaux issus de l'origine, le module de $G(z)$ reste toujours comparable à e^{Ar^p} (plus précisément le rapport $\dfrac{\log|G|}{Ar^p}$ reste compris entre deux nombres finis). Dans les p angles intermédiaires, $|G(z)|$ est nécessairement de l'ordre de grandeur de e^{-Ar^p}. En effet, le module maximum de la fonction $G(z)\cdot G(-z)$ doit, d'après le théorème qui régit les fonctions d'ordre non entier rester inférieur à une expression de la forme $e^{Ar^p(\log r)^{-1}}$. Ainsi le produit $G(z)$ se comporte exactement comme l'exponentielle e^{Ar^p}. C'est là le caractère très particulier qui est propre aux fonctions d'ordre et de genre p satisfaisant au théorème de M. Wiman. Un facteur primaire se compose d'un facteur simple et d'une partie exponentielle : or, dans les cas ordinaires, l'influence du facteur simple est prépondérante ; dans les cas considérés ici, *c'est au contraire l'influence de la partie exponentielle qui l'emporte.*

4. Cette remarque explique pourquoi les fonctions d'ordre entier ont une allure beaucoup plus simple et régulière que les fonctions d'ordre non entier. Ainsi M. Hardy a démontré que, sauf pour la valeur $c=0$, les racines $a_n(c)$ de l'équation $\dfrac{1}{\Gamma(x+1)}=c$ convergent vers l'axe imaginaire. De plus l'on a, pour deux valeurs différentes quelconques de c

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n(c')}{a_n(c'')}=1.$$

On pourrait se demander si cette dernière propriété, tout au moins, n'est pas une propriété générale des fonctions entières. Mais on reconnaîtra vite qu'elle est dûe, en réalité, aux circonstances particulières que je viens de signaler.

5. Comme exemple de fonctions entières d'ordre $\rho = p + 1$, je renverrai à celles que j'ai considérées au § 31 de mon mémoire sur les fonctions entières. Je m'étais placé dans le cas particulier où $p = 0$ et où tous les zéros sont réels et positifs, ces zéros satisfaisant à partir d'une certaine valeur de i à la double inégalité

$$i(\log\, i)^{1+\alpha-\gamma} < a_i \leq i(\log\, i)^{1+\alpha}. \quad (\alpha > 0, \gamma \text{ arbitrairement petit})$$

Considérons un angle A arbitrairement petit ayant pour bissectrice l'axe des y. À partir d'une certaine valeur de r, le module de $f(z)$ sera comparable

- à gauche de l'angle A à $e^{-r(\log\, r)^{-1-\alpha}}$,
- à droite de l'angle A à $e^{r(\log\, r)^{-1-\alpha}}$.

Les racines d'une équation de la forme $f(z) = c$ convergeront donc, ici encore, vers l'axe imaginaire. En particulier, si c est réel, les racines a'_i d'une telle équation seront deux à deux imaginaires conjuguées. On vérifie alors immédiatement que la série $\sum \frac{1}{a_i}$ est semi-convergente et a pour somme zéro. Nous obtenons ainsi les mêmes résultats que dans les cas où $\rho = p$.

Remarquons, pour terminer, que les renseignements obtenus sur la distribution des zéros résolvent immédiatement la question du genre. Ainsi, lorsque $\alpha < 1$, la fonction $f(z)$ est de genre zéro. La fonction $f(z) - c$ est au contraire du genre 1, quelle que soit la constante c.