Sur la non-contradiction de l'Arithmétique.

Herbrand (Paris) [1]

Jacques Herbrand, geboren am 12. Februar 1908 in Paris, verunglückte tödlich bei einer Bergbesteigung in den Alpen am 27. Juli 1931. Am gleichen Tage ging das Manuskript der hier veröffentlichten Arbeit bei der Redaktion ein.

Die letzten 6 Monate seines Lebens verbrachte er an deutschen Universitäten, in enger Berührung und lebhaftem Gedankenaustausch mit einer Reihe deutscher Mathematiker. Tief hat sich ihnen allen seine edle mit reichen wissenschaftlichen Gaben ausgestattete Persönlichkeit eingeprägt. Ein ungewöhnlich begabter Geist ist mit ihm in der Blüte seiner Jugend dahingegangen. Die schönen und wichtigen Resultate, die er auf dem Gebiete der Zahlentheorie und der mathematischen Logik gefunden, und die fruchtbaren Ideen, die er in mathematischen Gesprächen geäußert hat, berechtigten zu den größ ten Hoffnungen. Die mathematische Wissenschaft hat durch seinen frühzeitigen Tod einen schweren, unersetzlichen Verlust erfahren. Hasse. [2]

Dans deux précédents mémoires [3], nous avons énoncé et démontré un théorème général permettant de résoudre un grand nombre de questions de Métamathématique, et en avons donné des applications. Nous voulons dans ce travail l'appliquer au problème de la non-contradiction de l'arithmétique plus complètement que nous ne l'avions fait dans D I. Le résultat fondamental est énoncé au début du paragraphe 3.

1. Enoncé d'un théorème général.

Rappelons d'abord l'énoncé du théorème en question.

---

1. Journal für Mathematik. Bd. 166. Heft 1.
Transcription : Denise Vella-Chemla, avril 2025.

2. Jacques Herbrand, né le 12 février 1908 à Paris, est décédé dans un accident mortel lors de l'ascension d'une montagne des Alpes le 27 juillet 1931. Le manuscrit de l'ouvrage publié ici est parvenu aux éditeurs le même jour.

Il a passé les 6 derniers mois de sa vie dans des universités allemandes, en contact étroit et en échange animé d'idées avec un certain nombre de mathématiciens allemands. Sa noble personnalité, dotée de riches dons scientifiques, a laissé une profonde impression sur chacun d'eux. Un esprit exceptionnellement doué s'est éteint avec lui dans la fleur de l'âge. Les résultats magnifiques et importants qu'il a trouvés dans le domaine de la théorie des nombres et de la logique mathématique, ainsi que les idées fructueuses qu'il a exprimées dans les discussions mathématiques, ont donné lieu aux plus grands espoirs. La science mathématique a subi une perte grave et irremplaçable à cause de sa mort prématurée. Hasse.

3. Recherches sur la théorie de la démonstration, Thèse de l'Univ. de Paris, ou Travaux de la Soc. des Sc. et L. de Varsovie (Prace Towazystwa Naukowego) 1930, n° 33. Sur le problème fondamental de la Logique Mathématique, Comptes Rendus de la Soc. des Sc. et L. de Varsovie 1931. Ces mémoires seront désignés dans la suite par D I et D II. Nous profiterons de cette occasion pour faire les deux remarques suivantes à leur sujet :
a) Le théorème du Ch. 3, 3.3 de D I n'est exact que si Ax ne contient pas de variables restreintes (ce n'est qu'à cette condition que la réduite de $(x)Ax$ est vraie).
b) Dans D II, au bas de la page 32, nous indiquons que l'on peut "égaler" les éléments d'un champ. Cela demande un éclaircissement, car la valeur des fonctions d'indice n'est pas bien déterminée dans le nouveau champ. Parmi tous les éléments α_i égaux à l'un d'entre eux, nous en choisissons un, β ; les β formeront le nouveau champ ; dans ce champ, la valeur d'une fonction (descriptive élémentaire, ou d'indice) $f\beta.\beta_2\dots\beta_n$ sera celui des β qui est égal à la valeur de $f\beta.\beta_2\dots\beta_n$ dans l'ancien champ ; on voit alors que toute proposition vraie dans l'ancien champ, le reste dans le nouveau.

a) Nous employons les signes de Russell légèrement modifiés : $\vee$, $\sim$, $\times$ (et), $\rightarrow$ (pour l'implication), $\equiv$, (Ex) (au lieu de l'E renversé de Russell), (x) [4]) ; ainsi que les règles de raisonnement de Russell que nous avons d'ailleurs légèrement transformées. En particulier nous n'employons pas dans les propositions la fonction logique ε de Hilbert, et au lieu de l'axiome transfini de Hilbert, nous employons les axiomes et règles de Russell qui lui sont équivalents. Nous complétons le formalisme de Russell en admettant l'emploi des fonctions (au sens ordinaire du mot) ; les fonctions de 0 variable sont les constantes. Pour plus de détails, voir D I, Ch. 1 et 3.

Dans une théorie déterminée, nous avons certaines propositions et certaines fonctions élémentaires, et toutes les propositions que l'on y considère sont des combinaisons de signes logiques, avec des propositions et des fonctions élémentaires. On a de plus certaines propositions appelées *hypothèses*, et les propositions vraies dans la théorie, sont celles que l'on peut obtenir à partir des hypothèses par application des règles du raisonnement.

Si une proposition peut être démontrée par application de ces règles, sans utiliser d'hypothèse, nous dirons que c'est une identité. Si une proposition P est vraie dans une théorie déterminée, il y a certaines hypothèses $H_1, H_2, \ldots, H_n$. telles que $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \rightarrow P$ soit une identité ; et réciproquement (D I, Ch. 3, 2.4), s'il en est ainsi, P est vrai dans la théorie considérée.

La partie d'une proposition sur laquelle s'étend un signe logique, est dite l'*étendue* de ce signe. Ainsi dans $(x) \sim Axy. \vee .(Ey) \sim By$ l'étendue de (x) est $\sim Axy$, celle de (Ey) est $\sim By$, celle du premier $\sim$ est Axy, celle du second $\sim$ est By. Au lieu de l'étendue de (x) ou (Ey), nous dirons aussi l'étendue de x ou y.

Les variables figurant dans les signes de forme (x) et (Ex) seront dites *apparentes*, les autres *réelles*.

Une variable apparente x figurant dans un signe (Ex) situé dans l'étendue d'un nombre pair de signes, ou figurant dans un signe (x) situé dans l'étendue d'un nombre impair de signes $\sim$ est dite *restreinte*. Dans les cas contraires, elle est dite générale. Ainsi dans $\sim (x)Axx. \vee .(E) \sim\sim (z)Ayz$, x et y sont restreintes, z est générale.

b) Quand une proposition n'a ni variables apparentes ni fonctions, il y a un critère simple pour décider si c'est une identité ou non.

Considérons en effet les propositions élémentaires de cette proposition (elles peuvent contenir des variables ou non ; nous considérons évidemment comme identiques celles qui contiennent les mêmes variables dans le même ordre). Attribuons à chacune d'entre elles une *valeur logique*, c'est-à-dire faisons correspondre à chacune un des signes V ou F, et convenons que l'on attribue à toutes les propositions sans variables apparentes formées avec ces propositions, une valeur logique suivant les règles suivantes (voir note 2).

α) Si à P correspond F (ou V), à $\sim P$ correspondra V (ou F).

4. Nous rappelons que les signes $\times, \rightarrow, \equiv$ peuvent être définis au moyen des signes $\vee$ et $\sim$, seuls considérés comme primitifs. Rappelons leur signification : $\vee, \sim, \times, \rightarrow, \equiv, (Ex), (x)$, signifient respectivement : ou, non, et, implique, est équivalent à, il existe un x tel que, pour tous les x.

β) À $P \vee Q$ ne correspond F que si à P et Q correspond F.

On démontre alors (D I, Ch. 1, 5.21) que, pour que P soit une identité, il faut et il suffit que P ait la valeur logique V quelles que soient les valeurs logiques données aux propositions élémentaires. Il faut donc 2^n essais pour décider de la vérité de P, si P contient n propositions élémentaires différentes.

c) Considérons une proposition quelconque P (nous supposons que toutes les variables sont désignées par des lettres différentes). Nous appliquerons les considérations qui vont suivre à la proposition $(x)(Ey).Axy$ prise comme exemple (A est une proposition sans autres variables que x et y, formée avec des propositions et des fonctions élémentaires).

Nous considérerons des fonctions, qui seront d'abord les fonctions élémentaires figurant dans P, puis des fonctions nouvelles obtenues comme suit (il est bien entendu que nous entendons par fonction un pur signe logique, et que nous ne nous occupons pas, du moins pour le moment, de leurs "valeurs") : nous ferons correspondre à toute variable restreinte de P une fonction dont les arguments sont les variables générales dont l'étendue comprend le symbole (x) ou (Ex) où figure x, et les variables réelles de P ; s'il n'y a pas de telles variables restreintes ou réelles, la fonction a 0 argument (une constante). Par exemple pour $(x)(Ey).Axy$, nous aurons la fonction φx correspondant à y.

Considérons maintenant toutes les propositions élémentaires différentes de P (nous considérons cette fois-ci comme identiques deux propositions élémentaires qui ne diffèrent que par leurs variables), soient $A_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$; et toutes les fonctions différentes (fonctions élémentaires, ou celles que nous venons d'introduire ; même convention), soient $f_i x_1 x_2 \ldots x_{m_i}$. Par exemple si Axy a la forme $Bxx \times Byy. \vee . \sim Bxy$, nous aurons la seule proposition élémentaire Bxy et la seule fonction φx.

Considérons maintenant des ensembles finis de lettres que nous appellerons des champs : $a_0, a_1, \ldots, a_n$; supposons que l'on attribue à chaque $f_i a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{n_i}}$ une "valeur", c'est-à-dire que l'on fasse correspondre à cet ensemble de signes, un des a_i. Supposons cela réalisé pour certains des $f_i a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{n_i}}$ (pas forcément pour tous).

Avec toutes nos fonctions élémentaires, nous pouvons en fabriquer d'autres par "substitution" ; par exemple avec les fonctions $f_1 x$, $f_2 x$, $f_3 xy$ on peut fabriquer $f_3(f_2 x f_1 y)$ et ainsi de suite. Ce qu'il faut entendre par la valeur d'une telle fonction va de soi. Désignons par $F_i x_1 x_2 \ldots x_{p_i}$ une quelconque de ces fonctions (anciennes ou nouvelles).

Nous attribuons à chaque fonction une "hauteur" de la manière suivante : les fonctions élémentaires ont une hauteur égale à 1. Si $F_{u_1}, F_{u_2}, \ldots, F_{u_{m_i}}$ ont une hauteur maximum égale à h (les variables sont sous-entendues), alors la hauteur de $f_i(F_{u_1} F_{u_2} \ldots F_{u_{m_i}})$ est $h + 1$.

Si l'on a dans le champ la valeur d'un nombre de $f_i a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{m_i}}$ suffisant pour pouvoir calculer la valeur de tous les $F_i a_0 a_0 \ldots a_0$ de hauteur au plus égale à h, et si h est le nombre maximum ayant cette propriété, le champ est dit d'ordre h, et a_0 est l'*élément initial* (cet élément n'est pas toujours univoquement déterminé).

Dans notre exemple, posons $\varphi_1 x = \varphi x$, $\varphi_2 x = \varphi\varphi x$, $\ldots$, $\varphi_{n+1} x = \varphi\varphi_n x$, $\ldots$; alors les fonctions de hauteur au plus égale à h sont $\varphi_1 x, \varphi_2 x, \ldots, \varphi_h x$. Un champ d'ordre h sera constitué par les lettres $a_0, a_1, a_2, ..., a_h$ si l'on donne pour valeur à φa_i la valeur a_{i+1} (il nous arrivera souvent d'écrire pour exprimer cela $\varphi a_i = a_{i+1}$). On voit que φa_h n'a pas de valeur dans le champ.

Faisons maintenant correspondre à tout $A_i a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{n_i}}$ une valeur logique.

Considérons P, et supprimons-y tous les signes de forme (x) et (Ex), puis remplaçons toutes les variables restreintes par la fonction correspondante. Il vient une certaine proposition sans variables apparentes (par exemple $Ax\varphi x$).

Remplaçons les variables par des a_i d'une manière quelconque, et dans l'expression obtenue remplaçons les fonctions de forme $F_i a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{n_i}}$ par leur valeur (ce n'est pas possible pour tout choix des a_i ; dans notre cas on obtiendra $Aa_i a_{i+1}$, et l'opération est impossible quand on remplace x par a_h).

Les $A_i a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{n_i}}$ ayant une valeur logique, il en est de même de la proposition obtenue. Si cette valeur logique est toujours V, de quelque manière que l'on remplace les variables par des a_i, P est dite vraie dans le champ d'ordre h considéré (on voit que ce champ est caractérisé par les valeurs des fonctions, et les valeurs logiques des $A_i a_{\alpha_1} A_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_{n_i}}$.

On a alors le théorème fondamental suivant :

α) *Si P est une identité, on peut trouver, connaissant la démonstration de P, un nombre h, tel que $\sim P$ ne puisse être vrai dans un champ d'ordre h.*

β) *Si P n'est pas une identité, on peut construire, quelque soit h, un champ d'ordre h où $\sim P$ est vrai.*

La démonstration et l'énoncé de ce théorème sont intuitionnistes [5].

d) Quand on peut construire pour tout h un champ d'ordre h où P est vrai, nous dirons qu'il y a un *champ infini* où P est vrai. Nous dirons que P est *faux* dans un champ infini, si $\sim P$ y est vrai. (Cette expression de champ infini n'est qu'une abréviation ; pour avoir le sens intuitionniste des énoncés, il faut revenir aux énoncés précis α et β). On peut alors dire :

Pour que P ne soit pas une identité, il faut et il suffit qu'il y ait un champ infini où P soit faux.

5. Nous entendons par raisonnement intuitionniste, un raisonnement qui satisfait aux conditions suivantes : on n'y considère jamais qu'un nombre fini déterminé d'objets et de fonctions ; celles-ci sont bien définies, leur définition permettant de calculer leur valeur d'une manière univoque ; on n'affirme jamais l'existence d'un objet sans donner le moyen de le construire ; on n'y considère jamais l'ensemble de tous les objets x d'une collection infinie ; et quand on dit qu'un raisonnement (ou un théorème) est vrai pour tous ces x, cela signifie que pour chaque x pris en particulier, il est possible de répéter le raisonnement général en question qui ne doit être considéré que comme le prototype de ces raisonnements particuliers.

Sous cette forme, le théorème est une précision du théorème connu de Löwenheim-Skolem [6] : quand il y a, en effet, en notre sens, un champ infini où P est vrai, on en déduit aisément, par des procédés non-intuitionnistes, un ensemble dénombrable où P est vrai pour des valeurs déterminées des fonctions, donc une réalisation de P ; et réciproquement. Mais :

α) notre énoncé est complètement intuitionniste : on a même le moyen quand on a démontré P, de trouver un nombre h tel que, dans le champ "partiel" d'ordre h, c'est-à-dire au h^{ieme} pas de la construction du champ infini, il soit impossible de rendre P faux.

β) nous ne nous restreignons pas à une forme canonique des propositions, comme Löwenheim, et plus encore, Skolem.

γ) Löwenheim et Skolem supposent implicitement que, quand on a une réalisation de $\sim P$, P ne peut être démontré. Mais c'est là supposer implicitement la non-contradiction des Mathématiques (tout au moins de l'Arithmétique). Notre théorème va nous permettre au contraire d'étudier la non-contracdiction de l'Arithmétique.

e) Considérons maintenant une théorie avec des hypothèses déterminées.

Si l'on peut déterminer un champ infini tel que toutes les hypothèses de la théorie y soient vraies, la théorie n'est pas contradictoire.

Car si la théorie était contradictoire, il y aurait n hypothèses $H_1, H_2, ..., H_n$, telles que $\sim .H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, soit une identité (voir D I, Ch 5, 6.5). Mais, $H_1, H_2, ..., H_n$ étant vrais dans le champ infini, $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ y serait aussi vrai (c'est aisé à voir), donc $\sim .H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$ serait faux, ce qui est impossible, si c'est une identité.

Les théorèmes qui précédent ont un grand nombre d'applications (voir D I, et surtout D II). Ils permettent par exemple :

1) de résoudre beaucoup de cas particuliers de l'Entscheidungsproblem.
2) de démontrer rigoureusement (intuitionnistiquement, ce qui n'était pas le cas pour Löwenheim), que l'on peut toujours ramener l'Entscheidungsproblem au cas où il y a seulement *trois propositions élémentaires à deux variables*, ou *une à trois variables.*

Nous allons l'appliquer à la non-contradiction de l'Arithmétique. (Voir déjà D I, Ch. 5, 6.8.)

2. Les axiomes de l'Arithmétique.

La théorie que nous allons étudier et qui est la traduction formelle de l'Arithmétique classique, n'a qu'une seule proposition élémentaire, à deux variables, $x = y$; elle a une constante, 0, une fonction d'une variable, $x + 1$, et d'autres fonctions que nous indiquerons plus loin.

6. Voir Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann. 76 (1915) ; et Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen Vidersk. Skriften, Math. Naturw. Klasse, Nr. 4, Kristiania 1920.

Les hypothèses sont les suivantes :

$$\textbf{Groupe A}. \begin{cases} x = x \\ x = y. \rightarrow y = x \\ x = y \times y = z. \rightarrow .x = z \\ x = y. \equiv .x + 1 = y + 1 \\ \sim .x + 1 = 0 \end{cases}$$

Puis toutes les hypothèses obtenues en remplaçant, dans la proposition suivante, Φx par une proposition quelconque contenant la variable x :

$$\textbf{Groupe B} \text{ (Induction totale) : } \quad \Phi 0 \times : (x)\Phi x \rightarrow \Phi x + 1 :\rightarrow .(x)\Phi x..$$

On pourra aussi introduire un nombre quelconque de fonctions $f_i x_1 x_2 x_{n_i}$ avec des hypothèses telles que :

a) *Elles ne contiennent pas de variables apparentes.*

b) *Considérées intuitionnistiquement* [7], *elles permettent de faire effectivement le calcul de $f_i x_1 x_2 \ldots x_{n_i}$, pour tout système particulier de nombres ; et que l'on puisse démontrer intuitionnistiquement que l'on obtient un résultat bien déterminé.* (**Groupe C**.)

Comme exemple particulier, supposons que l'on ait déjà introduit un certain nombre de telles fonctions ; on pourra alors en introduire une autre fx, avec les nouvelles hypothèses :

$$\begin{aligned} &f0 = \alpha \\ &f(x+1) = \beta(fx) \end{aligned}$$

α et βy étant des fonctions formées avec les fonctions déja introduites. C'est le schéma ordinaire de la définition par récurrence.

Mais nous pouvons introduire des schémas de définition bien plus compliqués ; par exemple des récurrences multiples portant sur plusieurs variables ; nous pouvons ainsi introduire la fonction de Hilbert [8] avec les hypothèses :

$$\begin{aligned} \varphi(n+1, a, b) \quad &= \varphi(n, a, \varphi(n+1, a, b-1)) \\ \varphi(n, a, 1) \quad &= a \\ \varphi(0, a, b) \quad &= a + b \end{aligned}$$

Introduisons enfin, d'après Hilbert [9], un quatrième groupe d'hypothèses, qui n'appartient pas à l'Arithmétique classique.

Ax étant une proposition sans variables apparentes, si, quand on la considère intuitionnistiquement 5), on peut démontrer par des procédés intuitionnistes qu'elle est vraie pour tout x, nous ajouterons

7. Cette expression signifie : traduites en language ordinaire, considérées comme une propriété des entiers, et non comme un pur symbole.

8. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. 95 (1926).

9. Hilbert, Die Grundlagen der elementaren Zahlenlehre, Math. Ann. 104 (1931), p. 491.

(x) Ax aux hypothèses. (**Groupe D**.)

3. Le problème de la non-contradiction.

Le résultat fondamental est le suivant :

Les hypothèses A, B, C, D donnent lieu à une théorie non-contradictoire, si l'on suppose que dans les hypothèses B, x ne contienne pas de variables apparentes.

La démonstration est des plus simples.

Pour chaque Φx sans variables apparentes, nous introduisons une nouvelle fonction $\varepsilon x\ y_1 y_2 \dots y_n$, les y_i étant les variables de Φx différentes de x. Nous écrirons εx, en sous-entendant ces dernières. Nous introduisons les hypothèses suivantes :

$$\textbf{Groupe E}\begin{cases} 1)\ \ \varepsilon 0 = 0 \\ 2)\ \ \Phi 0. \sim \Phi x + 1.\ \varepsilon x = 0. \to .\varepsilon(x+1) = x+1 \\ 3)\ \ \sim [\Phi 0. \sim \Phi x + 1.\ \varepsilon x = 0]. \to .\varepsilon(x+1) = \varepsilon x \\ 4)\ \ \varepsilon x = y+1. \to .\varepsilon(y+1) = y + 1 \times \varepsilon y = 0 \end{cases}$$

Traduites en language ordinaire, elles signifient que, si a est le plus petit nombre pour lequel Φa est faux, $\varepsilon x = 0$ pour $x < a$, et $\varepsilon x = a$ pour $x \geq a$. Si le nombre a n'existe pas, $\varepsilon x = 0$ pour tout x.

On démontre alors que :

a) *Les hypothèses B sont une conséquence de ces nouvelles hypothèses.*

Il suffit, pour le voir, de formaliser le raisonnement suivant :

Supposons vrais $\Phi 0$ et $(x).\Phi x \to \Phi x + 1$; et supposons qu'il y ait un x tel que $\sim \Phi x + 1$ soit vrai ; il résulte alors de E 2 et 3 que :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon(x+1) = x+1 & \text{si } \varepsilon x = 0, \\ \varepsilon(x+1) = \varepsilon x & \text{si } x \neq 0. \end{array}$$

Posons donc $\varepsilon(x+1) = y+1$. D'après E 4, on aura :

$$\begin{array}{ll} \varepsilon(y+1) & = y+1 \\ \varepsilon y & = 0. \end{array}$$

D'après E 2 et 3, cela entraîne que $\sim \Phi y + 1$ est vrai (puisque $\Phi 0$ est supposé vrai). On a $y \neq 0$, car sans cela $\Phi 0$ et $\sim \Phi 0 + 1$ seraient vrais, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Donc on peut poser $y = z+1$. D'après cette hypothèse, $\sim \Phi z + 1$ et $\Phi 0$ seront vrais. E 2 joint au fait que $\varepsilon(z+1) \neq z+1$, entraîne $\varepsilon z \neq 0$; et E 3 entraîne alors que $\varepsilon z = \varepsilon(z+1)$ d'où une contradiction.

b) *Les nouvelles hypothèses sont de la forme C si Φx ne contient pas de variables apparentes.*

Car dans ce cas on peut reconnaître effectivement si Φx est vrai ou non, et les hypothèses E permettent de calculer effectivement les εx d'une manière univoque et non-contradictoire.

Il suffit donc de démontrer la non-contradiction des hypothèses A, C et D. Mais cela est immédiat sur la base du théorème général. On peut en effet par des procédés intuitionnistes fabriquer un champ d'ordre h composé d'entiers ordinaires, où les hypothèses soient vraies : ce champ est formé des valeurs (au sens intuitif du mot) des fonctions de hauteur au plus égale à h fabriquées avec les fonctions élémentaires, qui se réduisent ici à la fonction $x + 1$ et aux fonctions introduites avec les hypothèses C ; 0 est élément initial. D'après ce qui a été dit, on peut alors démontrer par des procédés intuitionnistes que toutes les hypothèses sont vraies dans ce champ.

Nous avons dans ce qui précède un procédé pour construire un champ d'ordre h où toutes les hypothèses soient vraies, quelque soit h. Elles sont donc vraies dans un champ infini, et la théorie ne peut être contradictoire (comparer D I, Ch. 5, 6. 8 ; le raisonnement actuel est plus simple, car nous ramenons les hypothèses B aux hypothèses C).

On voit combien la démonstration est simple, une fois connu le théorème général. Pourtant, la question n'est pas entièrement résolue. Il faut considérer le cas, où dans le groupe B, Φx peut contenir des variables apparentes. Nous pouvons seulement dire :

On peut ajouter sans contradiction les hypothèses B dans le cas où Φx contient des variables apparentes, si la seule fonction intervenant dans Φx est (outre la constante 0), la fonction $u + 1$.

Nous pouvons en effet introduire la fonction δx avec les hypothèses :

$$\begin{aligned} \delta 0 \quad &= 0 \\ \delta(x+1) \quad &= x \end{aligned}$$

On en déduit la vérité de la proposition :

$$x = 0. \vee .(Ey)x = y + 1.$$

Nous avons de plus montré dans D I (Ch. 4, 8.1) que les propositions de forme $x \neq x+1+1+\ldots+1$ sont une conséquence d'hypothèses du groupe B, où les Φx n'ont pas de variables apparentes. Enfin nous avons démontré dans D I (Ch. 4, 8.1) que les propositions ci-dessus, jointes aux hypothèses A entraînaient les hypothèses B dans le cas étudié, c. q. f. d.

On aurait un problème encore plus général, en admettant d'autres schémas de définition par récurrence. Par exemple, on pourrait introduire une fonction fx avec les hypothèses :

$$A(f0)$$

$$B[fx, f(x+1)]$$

$(Ex)Ax$, et $(x)(Ey)Bxy$ étant des propositions vraies, démontrées sans l'emploi de la nouvelle fonction [10].

10. M. Bernays nous signale que si l'on avait démontré la non-contradiction d'une Arithmétique comportant les hypothèses A, B et comme fonctions, celles intervenant dans Ax et Bxy, l'addition et la multiplication il en résulterait que l'on peut ajouter les nouvelles hypothèses sans contradiction, car tout raisonnement fait avec la nouvelle fonction fx, peut se faire dans l'Arithmétique que nous venons de décrire.

4. Comparaison avec un théorème de M. Gödel.

En raisonnant comme M. Gödel [11], on peut démontrer que :

Il est impossible de démontrer la non-contradiction d'une théorie par des raisonnements formalisables dans cette théorie, quand cette théorie contient l'Arithmétique.

Le sens exact de cette proposition est aisé à comprendre. Pour des détails, on peut consulter le mémoire de Gödel, où ce théorème est démontré pour le système de Russell et Whitehead. Rappelons en deux mots l'essentiel de son raisonnement :

On peut numéroter intuitionnistiquement toutes les propositions à une variable réelle et toutes les démonstrations de la théorie étudiée. Soit $Pxyz$ une proposition définie de manière intuitionnistique, signifiant : la démonstration numéro x démontre la proposition numéro y, pour la valeur z de sa variable (dans son mémoire, Gödel construit effectivement cette fonction pour la théorie qu'il étudie). Remarquons que le calcul (fait intuitionnistiquement), nécessaire pour vérifier si $Pxyz$ est vrai ou faux, pour des x, y, z, déterminés, peut aussi être fait formellement dans la théorie ; donc, si $Pxyz$ est vrai, il est démontrable dans la théorie. Supposons la théorie non-contradictoire. Alors, si β est le numéro de la proposition $(x). \sim Pxyy$, la proposition $x\beta\beta$ ne peut être vraie, car cela signifierait que la démonstration numéro x démontre $(x). \sim x\beta\beta$, donc on pourrait démontrer $\sim Px\beta\beta$ dans la théorie, et on aurait une contradiction. De plus $(x) \sim Px\beta\beta$ est indémontrable dans la théorie, car si la démonstration numéro y le démontrait, $Py\beta\beta$ serait vrai (par définition), donc d'après ce que nous avons dit, serait démontrable dans la théorie, et on aurait encore une contradiction. Si l'on formalise dans la théorie les considérations qui précèdent et qui sont intuitionnistes, on a le résultat suivant : w étant la traduction [12] de la proposition “la théorie n'est pas contradictoire”, $w \to \sim Px\beta\beta$ est une proposition vraie de la théorie (x étant une variable). Si w était démontrable dans la théorie, il en serait donc de même de $Px\beta\beta$, donc de $(x). \sim Px\beta\beta$, et nous venons de voir que cela entraînait une contradiction dans la théorie. Donc *w est indémontrable.*

Appliquons cette méthode à l'Arithmétique avec les hypothèses A, B, et C (laissons de côté les hypothèses D pour simplifier). Nos raisonnements, et ceux nécessaires pour établir le théorème fondamental, sont formalisables dans cette théorie. Mais, si nous voulons appliquer le raisonnement de Gödel, il est nécessaire de considérer une théorie déterminée. Dans le groupe C, nous n'avons qu'une description d'hypothèses que l'on peut introduire. Il faut considérer un groupe déterminé de schémas d'hypothèses du type C, soit le groupe C'. Si l'on veut faire le raisonnement de Gödel, nous allons voir qu'il faut introduire d'autres schémas de définition de fonctions ; il est donc impossible d'appliquer ses considérations à notre Arithmétique.

---

11. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze. Monatshefte für Math. und Ph. 88 (1981), p. 173. Pour comprendre cette proposition, il faut se figurer tous les signes qui interviennent dans la Métamathématique représentés par des objets de la théorie en question, par exemple par des nombres entiers en Arithmétique ; les propriétés de ces signes, et leurs relations entre eux, seront alors représentées par certaines propositions de la théorie ; et tout raisonnement de la théorie en question fait avec ces objets et ces propositions, correspondra à un raisonnement métamathématique, dont il sera en quelque sorte la traduction.

12. Voir la note 9.

On pourrait objecter : il est peut-être possible de décrire d'un seul coup tous les schémas de fabrication de fonctions inclus dans C. Cela voudrait dire : il est possible de décrire d'un seul coup tous les procédés intuitionnistes de fabrication des fonctions d'entiers. Mais cela est impossible. Car dans ce cas, on pourrait, par un procédé intuitionniste, numéroter toutes celles de ces fonctions n'ayant qu'une variable, soient $f_1x, f_2x, \ldots, f_nx, \ldots$ serait alors une fonction définie intuitionnistiquement, qui ne ferait pas partie des précédentes, d'où une contradiction.

Appliquons cette considération à toutes les fonctions définissables par C' et celles obtenues en les combinant entre elles et avec $x + 1$. La fonction $f_xx + 1$ ne peut donc faire partie de ces dernières. Or pour faire le raisonnement de Gödel, il faut numéroter tous les objets intervenant dans les démonstrations ; on est donc conduit à fabriquer la fonction de deux variables f_yx : cela justifie ce que nous disions plus haut : il est impossible de formaliser dans une Arithmétique avec les hypothèses C', le raisonnement de Gödel relatif à cette Arithmétique.

Faisons encore deux remarques :

a) Tout raisonnement intuitionniste peut toujours être fait avec des entiers ordinaires, car on peut toujours remplacer les objets que l'on y considère par des entiers ordinaires, en les numérotant, par exemple. Il nous semble à peu près certain que tout raisonnement intuitionniste peut alors être fait dans une Arithmétique avec les hypothèses A, B et C. Mais la justification de ce point (une *démonstration*, au sens mathématique du mot, est évidemment impossible, comme pour toute affirmation portant sur l'ensemble de *tous* les raisonnements intuitionnistes), nous entraînerait à une discussion détaillée sur laquelle nous reviendrons peut-être une autre fois. Il en résulterait que les hypothèses du groupe D résultent des précédentes.

b) Il nous paraît impossible, contrairement à l'opinion de Gödel [13], qu' il y ait des raisonnements intuitionnistes non formalisables en analyse ordinaire. C'est ainsi que nous croyons que l'Arithmétique avec les hypothèses A, B, C, D, est une partie de l'analyse ordinaire. Il nous parait probable que la position de cette question est la suivante : on ne pourra jamais donner d'exemple de raisonnement intuitionniste non formalisable en analyse ordinaire, et il sera également toujours impossible de démontrer qu'il n'en existe pas : nous avons en effet montré qu'il était impossible de décrire tous les procédés de raisonnement intuitionnistes (puisqu'il est impossible de décrire tous les procédés de fabrication de fonctions). *Il peut y avoir là une sorte de postulat logique.* Il en résulterait qu'il est impossible de démontrer la non-contradiction de l'analyse ordinaire.

Il n'est même pas impossible que tout raisonnement intuitionniste puisse se faire dans une Arithmétique avec les hypothèses A, B et en n'admettant dans C que l'addition et la multiplication ordinaires [14]. S'il en était ainsi, la non-contradiction de l'Arithmétique ordinaire serait déjà indémontrable.

Göttingen, le 14 Juillet 1931.
reçu le 27 Juillet 1931.

13. Loco citato note 9, p. 197.
14. Comparer Gödel, loco citato, Satz 7 ; et la note 8 du présent travail.