Transcription d'un article publié par Jacques Hadamard en 1915 dans le Bulletin des Sciences mathématiques [1], d'un mémoire de Jean Merlin au sujet des nombres premiers

Mélanges

Un travail de Jean Merlin sur les nombres premiers

Avec tant d'autres admirables jeunes gens, sur lesquels la Science de notre pays était en droit de compter et dont la fin brutale nous atteint à la fois comme Français et comme savants, Jean Merlin, aide-astronome à l'Observatoire de Lyon, est tombé au champ d'honneur.

D'autres retraceront, mieux que je ne saurais le faire, cette vie dont la fin glorieuse ne dément pas le laborieux commencement. Merlin fut un modeste, qui eut comme la pudeur de son talent. Étranger à toute pensée d'ambition personnelle, il fut uniquement possédé de ce double désir : avancer dans la Science et la faire avancer à son tour ; la servir en un mot, à son rang, comme, finalement, il a servi la Patrie.

N'est-ce pas sous une telle inspiration de désintéressement et d'idéal qu'il s'adonna, sans pouvoir en attendre aucun avantage professionnel, à la branche la plus élevée des Mathématiques pures, je veux dire l'Arithmétique ?

C'est ainsi qu'il m'avait, il y a trois ou quatre ans, communiqué un essai de démonstration du célèbre théorème de Goldbach : "Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers." Cette démonstration présentait une lacune, et c'est la raison pour laquelle elle n'a pas été publiée. Cependant, il ne me paraît nullement démontré que la méthode si originale et si intéressante de Merlin ne soit pas susceptible de mener au but. Autant qu'un jugement de cette nature est possible à l'avance, on peut espérer la compléter un jour. Le principe me paraît, en tout cas, devoir en être retenu ; je ne me crois pas le droit de le laisser ignorer à ceux qui s'intéressent à ce genre de recherches. J'analyserai donc succinctement, ci-dessous, le travail de Merlin. Les parties imprimées en grand caractère sont citées textuellement (à quelques détails de notation près) d'après le Mémoire.

Jacques Hadamard

---

1. Le Bulletin des Sciences mathématiques avait été fondé par Jean Darboux. L'article de Jean Merlin publié par Jacques Hadamard est paru dans la seconde série du Bulletin, tome 39, juin 1915, pages 121–136.

Transcription et LaTeX : Denise Vella-Chemla, septembre 2026.

Jean Merlin est tué au combat en 2014, aux environs de Saint Dié. Voir

https://denisevellachemla.eu/in-memoriam-Jean-Merlin-qui-avait-etudie-CG.pdf .

I

Le principe de la méthode employée par Merlin n'est autre que le "crible d'Ératosthène" lui-même.

Soit A un entier. Soient $p_1 = 2, p_2, \ldots, p_n$ les nombres premiers égaux ou inférieurs à $\sqrt{A}$, avec

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_n.$$

On sait qu'on obtient tous les nombres premiers $\leq A$ en effaçant de l'intervalle $(0, A)$ tous les nombres de la forme

$$xp_i \tag{1}$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, et x est un entier quelconque. Dans la terminologie de Merlin, ceci s'appellera un crible d'Ératosthène d'origine 0.

Effaçons également, du même intervalle, tous les nombres de la forme

$$A + xp_i \tag{1'}$$

i prenant encore toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et x étant encore un entier arbitraire (visiblement négatif, cette fois). C'est ce qu'on appellera un crible d'Ératosthène d'origine A.

Tout entier de l'intervalle $(0, A)$ qui n'appartiendra à aucune des progressions arithmétiques (1), (1') sera à la fois de la forme P et $A - P'$ (les nombres P, P' étant premiers) et, par conséquent, fournira la décomposition dont le théorème de Goldbach affirme l'existence.

2. Pour évaluer le nombre des termes effacés, il convient, bien entendu, de tenir compte des nombres qui appartiennent à la fois à plusieurs des progressions précédentes, afin de ne pas les compter plusieurs fois.

Je dis que deux progressions $ax + b$, $a'x + b'$ interfèrent, lorsqu'il existe des nombres communs à ces deux progressions ; j'appelle ces nombres communs des interférences.

Pour que deux progressions $ax + b$, $a'x + b'$ interfèrent, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de a et de a' divise $(b' - b)$. Lorsqu'il en est ainsi, la raison des interférences est le plus petit commun multiple de a et de a'.

Pour que plusieurs progressions

$$a_1x + b_1, \quad a_2x + b_2, \quad \ldots, \quad a_nx + b_n, \tag{2}$$

aient un point d'interférence commun (elles en ont alors une infinité), il faut et il suffit que ces progressions interfèrent deux à deux. La raison des interférences communes est le plus petit commun multiple des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Supposons en particulier que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient premiers entre eux deux à deux. Alors, les progressions (2) ont toujours une interférence commune à chacune d'elles.

3. Considérons la suite des termes de la $n^{\text{ième}}$ progression

$$b_n + a_n x,$$

et le système d'interférences I_1 produites sur cette suite de termes par chacune des $n-1$ autres progressions

$$b_1 + a_1 x, \quad b_2 + a_2 x, \quad \ldots, \quad b_{n-1} + a_{n-1} x.$$

La configuration ainsi obtenue sera identique[2] à celle formée par les interférences I_2 de $n-1$ progressions sur la suite des nombres entiers.

4. En particulier, lorsque les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres premiers différents, les progressions (2) ont toujours un point d'interférence commune.

II
Démonstration d'un théorème

5. Suivant l'usage, je désigne par p_n le $n^{\text{ème}}$ des nombres premiers rangés par ordre de grandeur croissante, en posant $p_1 = 2$. $[x]$ désigne le plus grand entier non supérieur à x.

J'appelle $A(b, a)$ l'opération qui consiste à effacer dans le tableau T des nombres entiers positifs et négatifs les nombres de a en a à partir de b, dans le sens des entiers croissants comme dans celui des entiers décroissants. Généralement, on aura

$$0 \leq b < a.$$

Cette opération consiste donc à effacer dans T tous les nombres de la progression $ax + b$.

Considérons une progression $r_1 + p_1 x$ relative au nombre premier $p_1 = 2$, et, pour les nombres premiers p_i autres que 2, simultanément deux progressions telles que

$$r_i^{(0)} + p_i x, \qquad r_i^{(1)} + p_i x$$

avec $0 \leq r_i^{(0)} < p_i$, $0 \leq r_i^{(1)} < p_i$, qui, naturellement, n'interfèrent pas.

On fait, dans l'intervalle des A premiers nombres, les opérations

$$(A) \begin{cases} A(r_1, p_1), & \\ A(r_2^{(0)}, p_2), & A(r_2^{(1)}, p_2), \\ \ldots & \ldots \\ A(r_n^{(0)}, p_n), & A(r_n^{(1)}, p_n), \end{cases}$$

2. Ceci signifie que (les nombres b' étant convenablement choisis) les valeurs qu'il faut donner à x, dans l'expression (2), pour obtenir les interférences I_1, sont précisément les nombres donnés par les interférences I_2.

(Jacques Hadamard)

Le théorème que je veux démontrer est le suivant :

Dans tout intervalle de longueur $\nu p_n \log p_n$, ν désignant une certaine constante, il y a au moins un nombre non effacé.

6. Je désignerai les différentes constantes que j'aurai à introduire par $\nu_1, \nu_2, \ldots$

J'emploierai, suivant M. Landau, la notation

$$f(x) = O[g(x)],$$

pour indiquer que, $f(x)$ et $g(x)$ étant fonctions de x (la fonction g étant positive), on a

$$\lim_{x \to +\infty} \sup \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty.$$

Je me servirai des formules

$$\sum_{p=p_1}^{p=p_n} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \log\log p_n + v_1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right), \tag{2}$$

et

$$\begin{cases} \vartheta(p_n) = \log p_1 + \log p_2 + \cdots + \log p_n = p_n + \mathrm{O}\left(p_n e^{-\sqrt[13]{\log p_n}}\right), \\ \Pi(p_n) = n = \dfrac{p_n}{\log p_n} + \mathrm{O}\left(\dfrac{p_n}{\log^2 p_n}\right) \end{cases} \tag{3}$$

(Landau, *Verteilung der Primzahlen*, t. I, p. 102, 195, 196), $\pi(x)$ désignant le nombre des nombres premiers non supérieurs à x.

Enfin, j'aurai besoin d'une valeur approchée de chacune des deux expressions

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{p_n}\right),$$

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{2}{p_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{2}{p_n}\right).$$

On trouve, à l'aide des formules qui viennent d'être rappelées,

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{(\log p_n)^2 e^{2v_1 - v_2} e^{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right)}}, \\ v_n = (\log p_n)^2 e^{2v_1 - v_2} e^{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right)}. \end{cases} \tag{4}$$

7. Revenons maintenant au calcul du nombre B des termes que les opérations (A) effacent dans l'intervalle A, afin de rechercher si $A - B > 0$.

On est, comme il est bien connu, conduit, pour tenir compte des termes communs à plusieurs progressions et ne les effacer qu'une seule fois à écrire B sous la forme

$$B = A_1 + A_2^{(0)} + A_2^{(1)} + A_3^{(0)} + A_3^{(1)} - A_{12}^{(0)} - A_{12}^{(1)} - \ldots + (-1)^{n+1} A_{12^0 3^0 \ldots n^0} + \ldots + (-1)^{n+1} A_{12^1 3^1 \ldots n^1},$$

$A_{i^{(\alpha)} j^{(\beta)} \ldots}$ désignant le nombre des termes suivant lesquels interfèrent, dans l'intervalle $(0, A)$, les progressions

$$r_i^{(\alpha)} + p_i x, \quad r_j^{(\beta)} + p_j x, \quad \ldots$$

$(\alpha = 0, 1;\ \beta = 0, 1;\ i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$.

Or il est clair que, d'une manière générale, le nombre des termes de la progression

$$r + px$$

[celle-ci étant l'interférence des progressions (5)] contenus dans un intervalle d'amplitude A est, à une unité près, représenté par $\frac{A}{p}$; il est de la forme

$$\frac{A + \theta}{p},$$

avec $|\theta| \leq 1$.

La quantité $A - B$ pourra donc s'exprimer par la somme

$$\sum \left(\pm \frac{A}{p} \right) + \sum \left(\pm \frac{\theta}{p} \right)$$

Nous désignerons respectivement [3] par (I) et (II) les deux parties $\sum \left(\pm \frac{A}{p} \right)$ et $\sum \left(\pm \frac{\theta}{p} \right)$ de la somme précédente.

8. Calculons d'abord (I).

Cette somme est égale à

$$A - \frac{A}{p_1} - \frac{2A}{p_2} - \frac{2A}{p_3} - + \frac{2A}{p_1 p_2} + \frac{2A}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{2A}{p_1 p_n} + \frac{2^2 A}{p_2 p_3} + \frac{2^2 A}{p_2 p_4} + \ldots + \frac{2^2 A}{p_{n-1} p_n} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{n-1} A}{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

ou

$$A \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{p_3}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{p_n}\right)$$

D'après (4), ce produit est égal à

$$\frac{A}{(\log p_n) e^{2\nu_1 - \nu_2} e^{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right)}}.$$

3. Nous adoptons ici une notation légèrement différente de celle de Merlin.

L'importance de la restriction de ne considérer qu'une seule progression $r_1 + p_1 x$ relative à $p_1 = 2$ apparaît ici. [4]. Si nous considérions, relativement à $p_1 = 2$ comme pour les autres nombres premiers, deux progressions $r_1^{(0)} + xp_1$, $r_1^{(1)} + xp_1$, nous trouverions (I) = 0.

9. Passons au calcul de la partie (II), c'est-à-dire de $\sum \pm \frac{\theta}{p}$.

Merlin la décompose elle-même de la manière suivante :

Soient r le plus petit terme de la progression $r + px$ contenu dans l'intervalle considéré et $A - \rho$ le plus grand terme de la même progression contenu dans cet intervalle. Le nombre total des termes en question sera

$$\frac{A - r - \rho}{p} + 1.$$

Toutefois, cette expression sera en défaut lorsqu'il n'y aura aucun de ces termes ; elle ne redeviendra exacte qu'en remplaçant le terme 1 par zéro, les quantités r et ρ étant, d'autre part, choisies par convention telles que $r + \rho = A$.

L'expression (II) sera donc, à son tour, la somme des deux parties

(II′) $$\sum \mp \frac{r + \rho}{p},$$

et

(II″) $$\sum \mp \eta,$$

η étant égal à 1 ou à 0, suivant qu'un au moins des termes à énumérer existe, ou qu'il n'en existe aucun.

10. Contrairement à (I), on n'établira pas que (II') soit nécessairement positive ; mais, dans le cas contraire, on obtiendra néanmoins une limite inférieure (négative) de cette expression.

Pour cela, il faut faire intervenir les destructions mutuelles des différents termes qui y figurent. Merlin y parvient en établissant entre eux une subordination qu'on peut exposer de la manière suivante :

Soient

$$r_{\alpha_1}^{(\epsilon_1)} + p_{\alpha_1} x, \quad r_{\alpha_2}^{(\epsilon_2)} + p_{\alpha_2} x, \quad \ldots, \quad r_{\alpha_i}^{(\epsilon_i)} + p_{\alpha_i} x$$

les progressions dont l'interférence sert à définir un terme de (II') (les ϵ étant tous égaux à 0 ou à 1 et les p_α étant tous distincts, puisque deux progressions de même raison n'interfèrent pas). Il est d'abord clair que le nombre i de ces progressions, qui sera dit le rang du terme, fait connaître le

4. Dans le théorème de Goldbach, l'hypothèse que le nombre à décomposer soit pair est évidemment essentielle. Dans l'analyse de Merlin, c'est à ce point du raisonnement qu'elle intervient. D'autres nombres premiers peuvent d'ailleurs se comporter comme p_1, c'est-à-dire ne correspondre qu'à une seule progression chacun : c'est le cas, dans la démonstration du théorème de Goldbach, pour tous ceux qui figurent en facteurs dans le nombre à décomposer. La rédaction du texte fait abstraction de cette circonstance, dont il est aisé de tenir compte. (Jacques Hadamard)

signe de ce terme [toujours contraire à celui du terme correspondant de (I), soit $(-1)^{i+1}$], et que le dénominateur du même terme est le produit

$$p = p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_i}.$$

On va convenir, en premier lieu, de ranger ces progressions par ordre de raison croissante (de sorte que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i$).

Ceci fait, si l'on supprime la dernière d'entre elles, les progressions restantes définissent un autre terme de (II'), qu'on peut appeler l'antécédent du premier, lequel en sera dit le conséquent.

On voit que :

1° Dans tous les cas, on a

$$r + \rho \leq A;$$

2° Tout terme de (II') (sauf ceux de rang 1) a un antécédent unique, tandis qu'il a plusieurs conséquents (sauf si $i = n$, auquel cas il n'y en a aucun) ;

3° L'antécédent et le conséquent sont toujours de signes contraires ;

4° Le dénominateur de l'antécédent divise celui du conséquent ;

5° Le numérateur $(r' + \rho')$ d'un conséquent est toujours au moins égal au numérateur $r + \rho$ de son antécédent, d'après la manière dont r et ρ ont été définis.

Si donc T est un terme de rang i figurant dans (II'), l'un quelconque de ses conséquents sera de la forme

$$T' = -T\frac{R}{p_{\alpha_{i+1}}},$$

R étant un nombre (en général fractionnaire) au moins égal à 1.

11. Cela posé, mettons d'abord à part, dans l'expression (II'), les termes de rang 1, lesquels sont tous positifs.

Dans ce qui reste, nous associerons à tout terme T dont le rang i est pair, l'ensemble de ses conséquents T'. La somme algébrique ainsi constituée est, d'après ce qui précède, de la forme

$$T + \sum T' = -\frac{r+\rho}{p} + \sum \frac{r'+\rho'}{p \cdot p_{i+1}} = (-T)\left(-1 + \sum \frac{R}{p_{i+1}}\right),$$

avec

$$(-T) > 0, \qquad \alpha_{i+1} > \alpha_i, \qquad R \geq 1.$$

Pour trouver une limite inférieure de l'une quelconque des expressions précédentes, voyons à quelle condition la parenthèse qui multiplie $(-T)$ est sûrement positive.

Dans cette parenthèse, la somme $\sum$ est étendue à tous les indices α_{i+1} tels que

$$\alpha_i + 1 \leq \alpha_{i+1} \leq n.$$

Chacun de ces indices fournit d'ailleurs deux termes de cette somme. Celle-ci sera donc supérieure à 1 si

$$-1 + 2\left(\frac{1}{p_{i+1}} + \frac{1}{p_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right) > 0.$$

D'après les formules précédemment rappelées, cette condition peut s'écrire

$$-1 + 2\left[\log\log p_n + \nu_1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right) - \log\log p_{\alpha_i} - \nu_1 - \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_{\alpha_i}}\right)\right] > 0.$$

$\dfrac{1}{\log p_n}$ tendant vers 0 quand p_{α_i} croît indéfiniment, on peut prendre α_i assez grand pour que

$$2\left|\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_n}\right) - \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log p_{\alpha_i}}\right)\right| < \chi;$$

χ étant choisi aussi petit que l'on veut ; et la condition (7) devient

$$1 - \chi - 2(\log\log p_n - \log\log p_{\alpha_i}) < 0,$$

c'est-à-dire

$$p_{\alpha_i} > p_n^{\frac{1-\chi}{2}}.$$

12. Soit p_α le plus petit nombre premier tel que

$$(8) \qquad p_{\alpha_i}^{e^{\frac{1-\chi}{2}}} \geq p_n.$$

Tous les termes T tels que $\alpha_i \geq \alpha$ donneront, dans la somme (II'), après le groupement qui vient d'être indiqué, des sommes partielles positives.

Occupons-nous maintenant des sommes partielles pour lesquelles $\alpha_i \geq \alpha$ (y compris celles pour lesquelles $\alpha_i = n$ et qui sont, par conséquent, réduites à leur premier terme) ou, du moins, de celles d'entre elles qui seront négatives.

Considérons une de ces sommes partielles ; elle sera en valeur absolue inférieure à la somme obtenue en remplaçant : la parenthèse par 1 ; et, dans le premier facteur, p_{α_i} par $p_n^{e^{\frac{1-\chi}{2}}}$ [d'après (8)], et le numérateur par A (d'après la première remarque faite au n° 10). Cette somme partielle sera donc en valeur absolue inférieure à

$$\frac{A}{p_n^{\frac{1-\chi}{2}}} \cdot \frac{1}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{i-1}}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{e^{1-\chi}}} = f < 1\right),$$

et d'ailleurs, χ étant arbitrairement petit, f est aussi voisin de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ que l'on veut, pour α déterminé en fonction de χ.

En groupant, d'après la formule (2), toutes les sommes partielles correspondant à un même système des indices inférieurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$, on obtient une deuxième somme partielle dont la valeur absolue est inférieure à

$$\frac{A}{p_n^f}\frac{2^i}{p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots p_{\alpha_{i-1}}}, \qquad \text{ou bien à} \qquad \frac{A}{p_n^f}\frac{2^{i-1}}{p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots p_{\alpha_{i-1}}},$$

suivant que le dénominateur du second facteur ne contient pas ou contient p_1.

En faisant varier, de toutes les façons possibles, ce système d'indices inférieurs, on obtient par le groupement considéré des termes de rang i et de rang $i+1$, une somme dont la valeur absolue est inférieure à

$$\frac{A}{p_n^f}\sum^{1}\frac{2^{i-1+(0\text{ ou }1)}}{p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots p_{\alpha_{i-1}}},$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les permutations $i-1$ à $i-1$ des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ et 0 ou 1 devant être choisis dans la parenthèse suivant que le dénominateur correspondant contient ou ne contient pas p_1.

Or il est clair que le facteur de $\frac{A}{p_n^{\frac{1-\chi}{2}}}$ est inférieur à

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{2}{p_2}\right)\ldots\left(1+\frac{2}{p_n}\right)=\nu_n.$$

D'après l'évaluation indiquée plus haut pour cette dernière quantité, la partie restante de (II') (celle qui correspond à $\alpha_i \geq \alpha$) est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{A}{p_n^f}(\log\, p_n)^2 e^{2\nu_1+\nu_3+1}.$$

Elle est donc d'ordre de grandeur visiblement inférieur à celui de la quantité (I).

13. Il resterait à s'occuper de l'expression (III).

C'est pour cette dernière que Merlin n'obtient pas d'évaluation satisfaisante.

III

14. L'application du théorème principal, supposé démontré, au théorème de Goldbach, est immédiate.

Soit $2l$ un nombre pair. Construisons les deux cribles d'Ératosthène d'origines 0 et $2l$ jusqu'au plus grand nombre premier contenu dans $\sqrt{2l}$; le théorème en question veut qu'il y ait au moins un nombre non effacé entre 0 et $2l$.

Or nous avons vu [5] au n° 1 que cette construction est précisément celle qui est étudiée dans le paragraphe II. Soit p_n le plus grand nombre premier contenu dans $\sqrt{2l}$; il est démontré dans ce

5. On doit tenir compte de la remarque finale du n° 8 (voir page 127, note). (Jacques Hadamard).

paragraphe que, dans tout intervalle de longueur au moins égale à $\nu p_n \log p_n$, il y a au moins un nombre non effacé. Il en sera donc ainsi dans l'intervalle de 0 à $2l$. Toutefois il faudra, pour qu'il en soit sûrement ainsi, que

$$\nu\sqrt{2l}\log\sqrt{2l} < 2l,$$

inégalité toujours vérifiée à partir d'une certaine valeur de $2l$.

Pour pouvoir énoncer le théorème dans toute sa généralité, il y aurait donc lieu d'entreprendre une vérification numérique pour les premières valeurs de l.

On peut obtenir, par la formule du n° 8, une limite inférieure du nombre de manières dont un nombre pair est décomposable en une somme de deux nombres premiers. En effet, ce nombre de manières est au moins égal à la moitié du nombre de nombres non effacés de 0 à $2l$ quand on construit les deux cribles d'Ératosthène que nous venons de considérer. Nous aurons une limite inférieure de ce dernier nombre en faisant $A = p_n^2$ dans le second membre de la formule (1) du n° 8.

La limite inférieure que nous obtenons ainsi est asymptotique à

$$\frac{1}{2}\frac{\nu p_n^2}{(\log p_n)^2 e^{2\nu_1-\nu_2}}.$$

15. Applications diverses. - Merlin indique une série d'autres questions délicates susceptibles d'être résolues par les mêmes moyens.

C'est ainsi qu'on peut se demander si l'on trouve indéfiniment des couples de nombres premiers différant entre eux de deux unités seulement.

Nous nous proposons de chercher s'il existe une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 2.$$

Dans la construction du crible d'Ératosthène, on effectue successivement les opérations

$$A(0, p_1), A(0, p_2), \ldots, A(0, p_n).$$

Effectuons d'abord les deux premières opérations $A(0, p_1)$, $A(0, p_2)$. Il ne reste plus non barrés que tous les nombres de la forme $6m \pm 1$. Soit T' le tableau ainsi formé.

Je fais correspondre à chaque nombre $6m \pm 1$ non barré du tableau T' le nombre m du tableau T des nombres entiers positifs et négatifs ; de sorte qu'à un nombre m de T correspondent deux nombres de T'.

Continuons maintenant sur T la formation du crible d'Ératosthène, en barrant dans le tableau T les nombres correspondants des nombres que nous barrons dans le tableau T'.

En faisant l'opération $A(0, p_4)$, nous barrons dans T' tous les nombres $5(6n \pm 1)$, ou

$$(6 \cdot 1 - 1)(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En faisant l'opération $A(0, p_5)$, nous barrons, dans T', tous les nombres

$$7(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ou

$$(6 \cdot 1 + 1)(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad \ldots$$

Arrêtons-nous après l'opération $A(0, p_k)$ et soit, d'ailleurs,

$$p_k = 6l + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1;$$

à ce moment nous avons barré, dans T', tous les nombres

$$(6m \pm 1)(6n \pm 1) \qquad (m = 1, 2, \ldots, l-1;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$(6l - 1)(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = -1$; et tous les nombres

$$(6m \pm 1)(6n \pm 1) \qquad (m = 1, 2, \ldots, l;\ n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = +1$.

Quels sont les nombres du tableau T que nous avons barrés en même temps ?

$$(6m \pm 1)(6n \pm 1) = 6(mn + \varepsilon m + \varepsilon' n) + \varepsilon\varepsilon' \qquad (\varepsilon = \pm 1, \varepsilon' = \pm 1),$$

c'est-à-dire que nous avons barré dans T tous les nombres de la forme

$$6mn + \varepsilon m + \varepsilon' n \qquad (m = 1, 2, \ldots, l-1;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$6ln - n + \varepsilon l \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = -1$, et tous les nombres de la forme

$$6mn + \varepsilon m + \varepsilon' n \qquad (m = 1, 2, \ldots, l;\ n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = +1$.

À chaque nombre non barré de T correspond un couple de nombres $6m - 1, 6m + 1$ non barrés de T'. Comme $p_k = 6l + \varepsilon_1$, le premier nombre de T que l'on barrera en faisant l'opération $A(0, p_{k+1})$ sera au moins

$$\frac{(6l+1)^2 - 1}{6} = 2l(3l + 1).$$

Si donc, après la $k^{\text{ème}}$ opération, il y a des nombres de T non barrés supérieurs à l et inférieurs à $6l^2 + 2l$, il y aura, après p_k, un couple de nombres premiers tels que p_n et p_{n+2}. Il en sera toujours ainsi et, par conséquent, il y aura une infinité de valeurs de n telles que $p_{n+1} = p_n + 2$ si, entre l et $2l(3l + 1)$, il y a au moins un nombre qui n'est d'aucune des formes

$$6mn + \varepsilon m + \varepsilon' n \quad (m = 1, 2, \ldots, l;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Merlin démontre que l'existence d'un tel nombre se ramène bien au théorème général énoncé ci-dessus.

16. Une méthode toute semblable est appliquée par Jean Merlin à la démonstration :

- De l'existence d'une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 4;$$

- De l'existence d'une infinité de valeurs de n telles que l'on ait à la fois

$$p_{n+1} - p_n = 2, \qquad p_{n+2} - p_{n+1} = 4.$$

17. Plus généralement, on peut se proposer de résoudre en nombres premiers l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues x, y. Soit

$$(10) \qquad ax + by = c$$

l'équation en question ; nous supposons a, b, c premiers entre eux deux à deux.

Supposons d'abord a et b positifs. Considérons les deux progressions

$$(11) \qquad ax,$$

et

$$(11') \qquad c - by.$$

D'après le n° 2, elles ont une infinité d'interférences communes formant une progression arithmétique de raison

$$(12) \qquad ab,$$

qui donnent les solutions de l'équation (10).

Pour trouver les solutions en nombres premiers de l'équation (10), il faut d'abord effacer les termes de la progression (11) à partir de 0 de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, ..., de p_n en p_n, p_n désignant le plus grand nombre premier non supérieur à $\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Puis il faut effacer les termes de (11') à partir de c de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, ..., de p_m en p_m, p_m désignant le plus grand nombre premier non supérieur à $\sqrt{\frac{c}{b}}$.

Les termes de la progression (12) qui n'auront pas été effacés entre zéro et c donneront les solutions cherchées.

Appelons A_1 l'ensemble des opérations que nous venons de définir relativement à la progression ax.

Appelons B_1 l'ensemble des opérations que nous venons de définir relativement à la progression $c - by$.

Appelons A'_1 l'ensemble des opérations qui constituent A_1, sauf celles relatives aux nombres premiers facteurs de b ; A'_2 l'ensemble des mêmes opérations A'_1, mais effectuées sur la suite des nombres entiers.

Appelons B'_1 l'ensemble des opérations qui constituent B_1, sauf celles relatives aux nombres premiers facteurs de a ; B'_2 l'ensemble des mêmes opérations B'_1, mais effectuées sur la suite des nombres entiers, et l'origine étant $\left[\frac{c}{b}\right]$.

Les opérations A'_1, ne contenant que des progressions dont la raison est première avec b, forment, d'après le n° 3, sur la progression (12), une configuration identique à celle produite par les opérations A'_2 sur un certain intervalle I_1, de longueur $\left[\frac{c}{ab}\right]$.

Les opérations B'_1, ne contenant que des progressions dont la raison est première avec a, forment, d'après le n° 3, sur la progression (12), une configuration identique à celle produite par les opérations B'_2 sur un certain intervalle I_2, de longueur $\left[\frac{c}{ab}\right]$.

Pour obtenir la configuration produite sur la progression (12) par les opérations A'_1 et B'_1 faites simultanément, il suffit d'amener les intervalles I_1 et I_2 à coïncider en déplaçant convenablement l'origine des opérations B'_2, par exemple.

On constate d'ailleurs que les facteurs premiers qui figurent dans a et dans b sont sans effet.

Bien entendu, il faut encore que les opérations A et B ne fassent intervenir qu'une seule et même progression de raison 2. Ceci correspond à une restriction évidente nécessaire pour la possibilité de l'équation (10) en nombres premiers (le cas de x ou $y = 2$ excepté). Il est clair que c doit être pair si a et b sont tous deux impairs, impair dans le cas contraire.

La méthode ainsi développée permettrait, on le voit, la résolution en nombres premiers du problème de l'analyse indéterminée du premier degré.

18. *Généralisation.* - Ajoutons que, à la fin du Mémoire, l'Auteur indique comment on pourrait appliquer la même marche à un plus grand nombre de progressions en substituant aux nombres premiers des systèmes de nombres premiers entre eux deux à deux.