Algèbres enveloppantes
Jacques Dixmier

1. Introduction. 1.1. Soit G un groupe de Lie réel connexe d'élément neutre e. Pour la convolution, les distributions sur G concentrées en e forment une algèbre U sur C. L'ensemble des vecteurs tangents complexes à G en e est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de U, et $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie complexifiée de G.

1.2. On peut construire U à partir de $\mathfrak{g}$ de manière algébrique : soient T l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$, I l'idéal bilatère de T engendré par les $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ où $x, y \in \mathfrak{g}$; l'algèbre T/I, notée $U(\mathfrak{g})$, s'appelle l'*algèbre enveloppante* de $\mathfrak{g}$. Le plongement naturel de $\mathfrak{g}$ dans $U(\mathfrak{g})$ est le plongement *universel* de $\mathfrak{g}$ dans une algèbre associative, d'où la notation $U(\mathfrak{g})$; et U s'identifie canoniquement à $U(\mathfrak{g})$. Si $(x_1, ..., x_n)$ est une base de $\mathfrak{g}$, les $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in N$ forment une base de $U(\mathfrak{g})$, d'où une vue assez concrète de $U(\mathfrak{g})$. Beaucoup de problèmes relatifs à $\mathfrak{g}$ ne se comprennent bien qu'après passage à $U(\mathfrak{g})$. On note $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$.

1.3. Toute représentation (=rep.) linéaire π de $\mathfrak{g}$ se prolonge de manière unique en une rep. π' de $U(\mathfrak{g})$. L'application $\pi \mapsto \pi'$ est une bijection entre rep. de $\mathfrak{g}$ et rep. de $U(\mathfrak{g})$, qui conserve l'équivalence et la simplicité.

1.4. Les *démonstrations* des résultats ci-dessous font appel à l'algèbre non-commutative, à la théorie des représentations, à la géométrie algébrique, et à des méthodes analytiques (groupes de Lie).

1.5. L'algèbre $U(\mathfrak{g})$ est utile dans d'autres contextes : corps de base quelconque, algèbres de Moody-Kac, superalgèbres de Lie. Nous n'en parlerons pas.

2. Représentations de G, de $\mathfrak{g}$, de $U(\mathfrak{g})$. 2.1. Soit $U(\mathfrak{g})^\wedge$ l'ensemble des classes de représentations simples de $U(\mathfrak{g})$, ou de $\mathfrak{g}$. La recherche de $U(\mathfrak{g})^\wedge$ a longtemps paru impraticable. Pourtant, $U(\mathfrak{g})^\wedge$ vient d'être calculé quand par exemple $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Heisenberg de dimension 3 [2], [2 bis]. L'ensemble $U(\mathfrak{g})^\wedge$ est très gros, et a peu de liens avec les rep. de G.

2.2. N. Jacobson a associé à tout anneau, par exemple à $U(\mathfrak{g})$, l'espace topologique Prim $U(\mathfrak{g})$ formé de tous les idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$. (Un idéal primitif est le noyau d'une représentation simple). On a une surjection évidente $U(\mathfrak{g})^\wedge \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$; bien que $U(\mathfrak{g})^\wedge$ soit énorme, Prim $U(\mathfrak{g})$ est raisonnable.

2.3. Soit π une rep. continue de G dans un espace de Banach H. On lui associe une rep. π' de $\mathfrak{g}$, donc de $U(\mathfrak{g})$: soit H' l'ensemble des $\xi \in H$ tels que la fonction $g \mapsto \pi(g)\xi$ sur G soit C^∞ ; H' est un sous-espace vectoriel dense de H ; tout $x \in \mathfrak{g}$ (réel) définit, par dérivation de $t \to \pi(\exp tx)$, un endomorphisme $\pi'(x)$ de H', d'où une rep. π' de $\mathfrak{g}$ dans H'. Supposons π simple, au seul sens intéressant, i.e. *topologiquement* : tout endomorphisme continu de H est limite forte de combinaisons linéaires des $\pi(g), g \in G$. Alors, malheureusement, π' n'est pas *algébriquement*

Référence : Proceedings du Congrès international des mathématiciens, Helsinki, 1978, p. 694.
https://www.imj-prg.fr/wp-content/uploads/2020/prix/dixmier1978.pdf.
Transcription : Denise Vella-Chemla, mars 2023.

simple. Mais $\operatorname{Ker}\pi' \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ [10].

En particulier, notant $G^\wedge$ l'ensemble des classes de rep. unitaires simples de G, on a une *application canonique* $\theta : G^\wedge \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$. Soit $\operatorname{Prim}_a U(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ qui sont autoadjoints, i.e. invariants pour l'involution canonique de $U(\mathfrak{g})$. Alors $\theta(G^\wedge) \subset \operatorname{Prim}_a U(\mathfrak{g})$. Si G est nilpotent simplement connexe, l'application $G^\wedge \to \operatorname{Prim}_a U(\mathfrak{g})$ est *bijective* [8] ; en général, elle n'est ni injective, ni surjective, mais les espaces $G^\wedge$ et $\operatorname{Prim}_a U(\mathfrak{g})$ ont quelque ressemblance. Conjecture : si G est algébrique, les fibres de θ sont finies.

2.4. Pour prouver que π simple $\implies$ Ker π' primitif, il faut certaines *caractérisations des idéaux primitifs.* Soit dans $U(\mathfrak{g})$ un idéal bilatère I, premier (i.e. tel que $u, v \in U(\mathfrak{g})$, $uU(\mathfrak{g})v \subset I \implies u \in I$ ou $v \in I$; un idéal primitif est premier), et considérons les conditions suivantes : (a) I est primitif ; (b) soit A l'anneau de fractions de $U(\mathfrak{g})/I$ (qui existe et est un anneau de matrices d'après Goldie) ; alors le centre de A est C ; (c) l'intersection des idéaux primitifs qui contiennent strictement I est distincte de I. Alors (c) $\implies$ (a) $\iff$ (b) [10]. Si $\mathfrak{g}$ est résoluble (et probablement en général), (c) $\iff$ (a) [9]. Ces propriétés cessent d'être vraies en algèbre non-commutative générale [16], [24].

3. Recherche de Prim $U(\mathfrak{g})$. 3.1. Pour calculer Prim $U(\mathfrak{g})$, on cherche à imiter pour $U(\mathfrak{g})$ les théorèmes de Mackey concernant les rep. induites [10], et la méthode des orbites de Kirillov.

3.2. La méthode des orbites réussit pour $\mathfrak{g}$ *résoluble.* Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On appelle polarisation de $\mathfrak{g}$ en f une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui est un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal pour la forme alternée $(x, y) \mapsto f([x, y])$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. *Il existe* des polarisations de $\mathfrak{g}$ en f. Soit $\mathfrak{h}$ l'une d'elles. La forme $f|\mathfrak{h}$ est une rep. de dimension 1 de $\mathfrak{h}$. Soit ϱ la rep. "induite tordue" de $\mathfrak{g}$, i.e. associée au $U(\mathfrak{g})$-module $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} C$, où C est considéré comme $\mathfrak{h}$-module via la forme $x \mapsto f(x) + (1/2)\mathrm{trad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} x$ sur $\mathfrak{h}$. Alors : (1) Ker $\varrho \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$; (2) Ker ϱ ne dépend que de f et non du choix de $\mathfrak{h}$; posons Ker $\varrho = I(f)$; (3) l'application $I : g^* \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ est surjective ; (4) soit Γ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, i.e. le plus petit groupe algébrique d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ dont l'algèbre de Lie contient ad $\mathfrak{g}$; alors $I(f) = I(f') \iff f' \in \Gamma f$. *On a donc défini une bijection* $g^*/\Gamma \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ [9]. Cette bijection est même un homéomorphisme pour $\mathfrak{g}$ nilpotente [5] ; on ignore s'il est de même pour $\mathfrak{g}$ résoluble.

3.3. Pour $\mathfrak{g}$ *non résoluble*, il y a de sérieuses difficultés. (a) Certains éléments de $\mathfrak{g}^*$ sont non polarisables. Toutefois, disons que $f \in \mathfrak{g}^*$ est *régulier* si son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ est de dimension minimale ; l'ensemble $\mathfrak{r}$ des éléments réguliers est ouvert dans $\mathfrak{g}^*$ pour la topologie de Zariski. Si $f \in \mathfrak{r}$, f admet une polarisation résoluble. (b) Si $f \in \mathfrak{g}^*$ admet 2 polarisations $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, les idéaux obtenus comme en 3.2 par induction à partir de $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ peuvent être distincts. Toutefois, si $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sont résolubles, l'idéal obtenu est le même pour $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$, et est primitif. *On a donc défini une application* $I : \mathfrak{r} \to \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$, constante sur les orbites du groupe adjoint algébrique Γ [9]. (c) Les idéaux $I(f)$ précédents sont complètement premiers [6] (un idéal I de $U(\mathfrak{g})$ est complètement premier si $u, v \in U(\mathfrak{g}), uv \in I \implies u \in I$ ou $v \in I$). Un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ est complètement premier si $\mathfrak{g}$ est résoluble mais pas pour $\mathfrak{g}$ quelconque. Soit Prime $U(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux primitifs complètement premiers de $U(\mathfrak{g})$. La méthode des orbites, sous la forme précédente, ne peut donner au mieux que Prime $U(\mathfrak{g})$.

3.4. Supposons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$. Alors tout $f \in \mathfrak{g}^*$ est polarisable [25]. L'idéal obtenu comme en 3.2 est indépendant du choix de la polarisation, et est primitif ; notons-le $I(f)$. L'application $I\ : \mathfrak{g}^* \to \mathrm{Prime}\, U(\mathfrak{g})$ est constante sur les Γ-orbites, *d'où une application de* $\mathfrak{g}^*/\Gamma$ dans $\mathrm{Prime}\, U(\mathfrak{g})$ qui est *injective* [3], [4]. On ignore si elle est surjective. Elle l'est pour $n \leq 5$ [20]. La situation est moins bonne pour $\mathfrak{g}$ semi-simple quelconque.

3.5. Après ce qu'on a dit en 3.3 (c), on peut tenter d'induire à : $\mathfrak{g}$ des rep. simples de dimension finie > 1. Cela ne suffit pas, hélas, pour obtenir Prim $U(\mathfrak{g})$ tout entier : même pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$, les idéaux primitifs "non induits" sont assez nombreux [4]. Nous reviendrons sur le calcul de $U(\mathfrak{g})$ au § 6.

4. Le centre de $U(\mathfrak{g})$**.** 4.1. Soit $Z(\mathfrak{g})^\wedge$ l'ensemble des caractères de $Z(\mathfrak{g})$ (= homomorphismes de $Z(\mathfrak{g})$ dans C). Si π est une rep. simple de $U(\mathfrak{g}), \pi \mid Z(\mathfrak{g})$ appartient à $Z(\mathfrak{g})^\wedge$ et ne dépend que de $\mathrm{Ker}\, \pi$, d'où *une application canonique* $\varphi\ :\ \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})^\wedge$. Il importe donc de bien connaître $Z(\mathfrak{g})$.

4.2. Soit $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$. Il existe une bijection linéaire β de $S(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$, la *symétrisation*, telle que $n!\beta(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$ quels que soient $x_1, ..., x_n \in \mathfrak{g}$ (S_n : groupe symétrique) ; et β est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules pour les représentations adjointes. En particulier, notant $Y(\mathfrak{g})$ l'ensemble des *invariants* de $S(\mathfrak{g})$, on a $\beta(Y(\mathfrak{g})) = Z(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente, $\beta|Y(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme d'algèbres de $Y(\mathfrak{g})$ sur $Z(\mathfrak{g})$. Pour $\mathfrak{g}$ quelconque, considérons la fonction $x \mapsto (\text{dét}\,(\text{sh}\, \frac{1}{2}\text{ad}\, x/\frac{1}{2}\text{ad}\, x))^{-1/2}$ sur $\mathfrak{g}$ au voisinage de 0 ; elle définit un opérateur de multiplication dans l'algèbre de séries formelles $S^\wedge(\mathfrak{g}^*)$ donc par transposition un opérateur différentiel d d'ordre infini dans $S(\mathfrak{g})$. L'application $u \mapsto d\beta^{-1}(u)$, où u parcourt $Z(\mathfrak{g})$, *est un isomorphisme d'algèbres* de $Z(\mathfrak{g})$ *sur* $Y(\mathfrak{g})$ [12]. Cela ramène l'étude de $Z(\mathfrak{g})$ à celle de $Y(\mathfrak{g})$.

4.3. Il peut arriver que $Z(\mathfrak{g})$ ne soit pas de type fini. Mais supposons $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}, r = \dim \mathfrak{h}$, W le groupe de Weyl, $S(\mathfrak{h})^W$ l'algèbre des éléments W-invariants de $S(\mathfrak{h})$. Il y a des isomorphismes connus $Y(\mathfrak{g}) \mapsto S(\mathfrak{h})^W$ (Chevalley) et $Z(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{h})^W$ (Harish-Chandra) ; ils sont liés à l'isomorphisme $Z(\mathfrak{g}) \mapsto Y(\mathfrak{g})$ de 4.2 par un triangle commutatif. On sait que $S(\mathfrak{h})^W$ est une algèbre de polynômes à r générateurs, donc il en est de même de $Z(\mathfrak{g})$; on sait même décrire dans chaque cas des générateurs explicites de $Z(\mathfrak{g})$.

Les caractères de $S(\mathfrak{h})^W$ s'identifient aux W-orbites dans $\mathfrak{h}^*$. Compte tenu de l'isomorphisme de Harish-Chandra, on obtient une *surjection* $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ de $\mathfrak{h}^*$ *sur* $Z(\mathfrak{g})^\wedge$, et *une bijection de* $\mathfrak{h}^*/W$ *sur* $Z(\mathfrak{g})^\wedge$.

4.4. Revenons au cas général. Soit $C^\infty(G)$ l'ensemble des fonctions complexes C^∞ sur G. Si $u \in U(\mathfrak{g})$ et $f \in C^\infty(G)$, on a $u * f, f * u \in C^\infty(G)$, et $f \mapsto u * f$ (resp. $f * u$) est un opérateur différentiel (OD) invariant à droite D_u (resp. à gauche D'_u) sur G ; l'application $u \mapsto D_u$ (resp. D'_u) est un isomorphisme (resp. antiisomorphisme) de l'algèbre $U(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre des OD invariants à droite (resp. à gauche) sur G. Si $u \in Z(\mathfrak{g})$, on a $D_u = D'_u$ et $u \mapsto D_u$ est un isomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre des OD *biinvariants* sur G (exemple : les OD à coefficients constants sur R^n). Grâce à 4.2, on montre que *si* Δ *est un OD biinvariant sur* G*, et si* $f \in C^\infty(G)$*, il existe* $g \in C^\infty(G)$ *telle que* $\Delta g = f$ *au voisinage de* e [12].

5. Modules de Verma. 5.1. On a dit que $U(\mathfrak{g})^\wedge$ est énorme. Mais pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, on sait construire des sous-ensembles intéressants de $U(\mathfrak{g})^\wedge$: on définit des "séries" importantes $(\varrho_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de rep. de $\mathfrak{g}$, qui sont simples pour les valeurs génériques de λ, et seulement de longueur finie pour certaines valeurs exceptionnelles de λ ; même pour ces valeurs, la considération des sous-quotients de ϱ_λ fournit bien entendu des éléments de $U(\mathfrak{g})^\wedge$. Parmi ces séries, citons les *modules de Verma* [26], les *modules de Verma généralisés* [23], les *modules de Whittaker* [21], les modules de Harish-Chandra et parmi eux les *modules de la série principale algébrique* [22] (liés à la série principale de G), les *modules d'Enright-Varadarajan* [13] (liés à la série discrète de G), généralisés par Enright-Wallach [14]. Cf. [15] pour les modules de Harish-Chandra indécomposables sur certaines algèbres $\mathfrak{g}$.

5.2. Parlons seulement des modules de Verma (qui servent d'ailleurs à étudier les autres modules de 5.1). Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}\supset\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Borel, $\mathfrak{n}=[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]$, $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, ϱ la demi-somme des racines >0. On prolonge λ par 0 sur $\mathfrak{n}$, d'où une rep. de dimension 1 de $\mathfrak{b}$. Par induction tordue à $\mathfrak{g}$, on obtient le $\mathfrak{g}$-*module de Verma* $M(\lambda)$, qui admet le caractère infinitésimal χ_λ. En tant que $\mathfrak{h}$-module, $M(\lambda)$ est somme directe de sous-espace poids de dimension finie ; c'est le module universel parmi les modules engendrés par un vecteur de plus grand poids $\lambda-\varrho$. Avec les notations classiques, $M(\lambda)$ simple $\iff$ $\lambda(H_\alpha)\notin\{1,2,3,...\}$ pour toute racine positive α. Donc $M(\lambda)$ est en général simple. Pour les valeurs exceptionnelles de λ, les multiplicités des sous-quotients simples de $M(\lambda)$ ne sont pas entièrement connues. [7], [17].

5.3. Pour tout λ, $M(\lambda)$ admet un plus grand sous-module distinct de $M(\lambda)$; soit $L(\lambda)$ le module quotient. Quand λ est dominant entier, $L(\lambda+\varrho)$ est le module simple de dimension finie bien connu de plus grand poids λ. La théorie des modules de Verma permet de retrouver bien des résultats classiques : formule des caractères de Weyl, formule de Kostant pour la multiplicité des poids, théorème de Bott-Kostant sur la cohomologie $H^*(\mathfrak{n},L(\lambda))$, homomorphisme de Harish-Chandra, y compris dans le cas sphérique, etc. [1], [22].

6. Recherche de $\operatorname{Prim}U(\mathfrak{g})$ **(suite).** 6.1. Conservons les notations de 4.3. et 5.3. Pour tout $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, l'annulateur $J(\lambda)$ de $L(\lambda)$ appartient à $\operatorname{Prim}U(\mathfrak{g})$. L'application composée

$$\mathfrak{h}^* \xrightarrow{J} \operatorname{Prim}U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varphi} Z(\mathfrak{g})^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*/W$$

est la surjection canonique. *L'application J est surjective* [11].

6.2. L'ensemble Prim $U(\mathfrak{g})$ est donc "intermédiaire" entre $\mathfrak{h}^*$ et $\mathfrak{h}^*/W$. Soient $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, et $\lambda^\wedge$ la W-orbite de λ ou le caractère correspondant de $Z(\mathfrak{g})$. Si $\lambda(H_\alpha)\notin Z$ pour toute racine α, on a $\#\varphi^{-1}(\lambda^\wedge)=1$. Mais la situation est beaucoup plus subtile quand par exemple λ est *entier régulier* ; on a alors $2^r\le\#\varphi^{-1}(\lambda^\wedge)\le i$, où i est le nombre d'involutions de W ; ces inégalités sont strictes en général, mais $\#\varphi^{-1}(\lambda^\wedge)=i$ quand $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n)$ [19] ; cf. [19] pour des conjectures quand $\mathfrak{g}\neq\mathfrak{sl}(n)$.

6.3. Fixons λ entier dominant. Quand w parcourt W, l'annulateur de $L(w\lambda)$ parcourt $\varphi^{-1}(\lambda^\wedge)$, d'où une surjection $W\to\varphi^{-1}(\lambda^\wedge)$. L'inclusion dans $\varphi^{-1}(\lambda^\wedge)$ définit par image réciproque un préordre et par suite une relation d'équivalence intéressants sur W [18].

6.4. Supposons $\mathfrak{g}$ simple. L'ensemble Prim $U(\mathfrak{g})$ n'est complètement connu que pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ou $\mathfrak{g}$ de rang ≤ 2. Il est presque complètement connu pour $\mathfrak{g}$ de rang 3.

Bibliographie

(Très incomplète ; on trouvera dans [9] des références aux mémoires originaux.)

1. I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, S. I. Gelfand, Publ. of 1971 Summer School in Math., Budapest, 1971.

2. R. E. Block, *The irreducible representations of the Weyl algebra* A_1 (preprint) ; [2 bis] *Classification of the irreducible representations of* $\mathfrak{sl}(2, C)$ (preprint).

3. W. Borho, Invent. Math. **40** (1977), 143-169.

4. W. Borho and J. C. Jantzen, Invent. Math. **39** (1977), 1-53.

5., 6. N. Conze, J. Algebra **25** (1973), 100-105 ; Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 379-415.

7. V. V. Deodhar, J. Lepowsky, *On multiplicity in the Jordan-Hölder series of Verma modules* (preprint).

8., 9., 10. J. Dixmier, An. Acad. Brasil. ci. **35** (1963), 491-519 ; *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974 ; J. Algebra **48** (1977), 96-112.

11., 12. M. Duflo, Ann. of Math. **105** (1977), 107–120 ; Ann. École Nat. Sup. **10** (1977), 265-288.

13. T. J. Enright, V. S. Varadarajan, Ann. of Math. **102** (1975), 1-15.

14. T. J. Enright, N. R. Wallach, *The fundamental series of representations of a real semisimple Lie algebra*, (preprint).

15. I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, Uspehi Mat. Nauk **23** (1968), 3-60.

16. R. S. Irving, Math. Z. **160** (1978), 241-247.

17. J. C. Jantzen, *Moduln mit einem höchsten Gewicht* (preprint).

18., 19., 20. A. Joseph, *Gelfand-Kirillov dimension for the annihilators of simple quotients of Verma modules* (preprint) ; *Towards the Jantzen conjecture II* (preprint) ; *Kostant's problem, Goldie rank and the Gelfand-Kirillov conjecture* (preprint).

21. B. Kostant, *On Whittaker vectors and representation theory* (preprint).

22., 23. J. Lepowsky, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 1-44 ; J. Algebra **49** (1977), 470-495.

24. M. Lorenz, Math. Ann. **225** (1977), 115-122.

25. H. Oseki and M. Wakimoto, Hiroshima Math. J. **2** (1972), 445-482.

26. D. N. Verma, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 160-166.

Université Paris VI,
Paris, France