

Transcription d'une conférence de Pierre Deligne (IAS) en 1996 au sujet de l'œuvre de Grothendieck, donnée à Nice, dans le cadre du Colloquium en l'honneur de Jean Dieudonné.

Alors dans “*Récoltes et semailles*”, Grothendieck, à un endroit, écrit que pour prouver un théorème que certains considèrent comme la principale activité mathématique, il y a essentiellement deux méthodes d'approche : il compare un problème à une noix, il dit qu'on peut bien prendre un burin et un marteau et essayer de la casser ainsi, ou bien qu'on peut imaginer la mer qui monte, qui petit à petit dissout le corps de la noix, et il considère que c'est cette deuxième approche qui est vraiment caractéristique de lui. Et je me rappelle effectivement, une fois, à un séminaire, au séminaire SGA5, il démontrait le théorème de changement de base en cohomologie étale pour un morphisme propre et il y avait des dévissages, des dévissages, des dévissages, on avait l'impression qu'il ne se passait rien et puis à la fin le théorème était démontré ; il fallait faire un effort pour comprendre qu'effectivement, il y avait quelque chose de très difficile qui avait été fait sans que rien n'apparaisse tellement le formalisme rendait tout transparent.

Alors ce que je voudrais essayer de faire, c'est de reprendre certaines des idées qu'il a introduites et d'essayer de montrer, autant que je puisse, combien elles étaient étonnantes dans leur simplicité. Maintenant, ça paraît simple mais, ça ne l'était pas du tout à l'époque ou bien ça l'était trop pour qu'on puisse vraiment s'y faire. Je ne parlerai pas du tout des idées, qu'il a introduites, par manque de temps et de compétences. Spécialement, je ne parlerai pas de sa première période sur les espaces vectoriels topologiques, ni des choses les plus récentes de géométrie anabélienne.

Alors le premier thème dont je voudrais parler, c'est celui des schémas, et c'est sans doute celui auquel on pense le premier en pensant à Grothendieck car c'est, je crois, celui qui a été le plus vite accepté, qui est entré dans notre inconscient collectif déjà en 1962. Serre disait que les schémas étaient le langage naturel de la géométrie algébrique et il y a bien sûr toute une série de prédécesseurs pour la notion.

Il y a d'abord Weil qui, dans son livre sur les Fondements de la géométrie algébrique *, définit les variétés abstraites par recollement au lieu de se limiter au cas de variétés projectives ou quasi-projectives définies directement comme étant plongées. D'autre part il y avait précédemment les travaux de Chevalley qui avait une notion de schéma ; c'était la notion de localisation d'anneaux locaux qui était mise en avant. Essentiellement Chevalley voyait un schéma comme étant tous ces anneaux locaux avec des conditions assez pénibles à écrire pour exprimer qu'on avait bien affaire à un schéma séparé. D'autre part, était clair aussi pour Weil, pour Shimura, pour Nagata, ce qui était nécessaire pour la géométrie qu'on voulait faire, on voulait retrouver la géométrie algébrique des Italiens, on voulait aussi pouvoir faire de la géométrie algébrique sur les entiers, avoir une notion de spécialisation, c'était spécialement utile pour Shimura, † qui apparaît pour la multiplication complexe) donc on voulait pouvoir travailler sur $\mathbb{Z}$, on voulait pouvoir spécialiser. Et d'autre part, il y avait aussi le travail de Serre (FAC ‡) qui était sur un corps algébriquement clos, essentiellement

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, novembre 2025.

*. *Foundations of algebraic geometry*, 1946, Publications de l'AMS.

†. Note de la transcriptrice : La proposition relative qualifie sûrement le mot “spécialisation”.

‡. FAC=Faisceaux algébriques cohérents.

sur un corps, le “algébriquement clos” n’était pas trop important, et on avait le point de vue de voir un schéma comme étant que ce qu’on recollait, c’étaient des espaces annelés, mais dans le cadre où Serre se plaçait, c’était un faisceau d’anneaux de fonctions qui était donné, parce qu’on considérait seulement des espaces “réduits” comme on dit maintenant, et donc le faisceau d’anneaux n’était pas un faisceau en l’air, c’était un faisceau de fonctions à valeurs dans un corps algébriquement clos. Alors l’idée, en un sens naïve, de Grothendieck, est que donc, de toute façon, ce qu’on recolle, ce sont des schémas affines. La notion de recollement était suffisamment bien comprise. Donc il faut comprendre ce qu’est un schéma affine. Et dans FAC, il était clair que, par exemple, si on considérait des faisceaux sur un corps algébriquement dans le cadre de FAC, cette notion de schéma affine équivalait à celle de quotient d’un anneau de polynômes, donc de type fini : un corps algébriquement clos qui soit réduit sans idempotent et l’idée de Grothendieck toute simple, c’est essentiellement de définir les schémas affines comme étant la même chose que des anneaux commutatifs à unité quelconque.

Ça obligeait à toute une série de changements de point de vue pour avoir cette idée-là. Par exemple, précédemment, et encore après, en un sens, mais ça prendra une autre forme sur le point de base, c’était le Nullstellensatz de Hilbert, on s’intéressait à un corps algébriquement clos, à une partie de l’espace affine définie par des équations et on avait le Nullstellensatz qui donnait une correspondance entre parties de l’espace affine définies par des polynômes égaux à Z_0 et les idéaux de l’anneau des polynômes qui sont égaux à leur propre radical. Alors dans le point de vue considéré ici, le Nullstellensatz n’a pratiquement aucun rôle à jouer et en fait, si on regarde les EV §, le Nullstellensatz n’a pratiquement pas d’effet.

Donc ça, c’est un premier changement de point de vue qui est très net. Une autre idée, parce que ceci, c’est juste absent, c’est rien, en fait. Réellement, l’idée de base, c’est de toujours considérer une situation relative, un schéma X au-dessus de S et c’était vraiment clair, quand on parlait à Grothendieck, que c’était ça la situation qui apparaissait.

Ça me rappelle un exposé, vers 1964-1965, avant qu’il ne vienne dans la salle, on avait écrit en grand au tableau $X \rightarrow S$ (avec X au-dessus de S). Alors quand, un peu avant son exposé, il a vu ça, il l’a effacé. Et puis quand il a commencé son exposé, il a commencé par écrire (*Deligne réécrit X au-dessus de S , juste à côté de la première écriture. [Rires]*).

Alors, en un sens, ce point de vue relatif est un peu un substitut au fait que, précédemment, l’objet de base était l’ensemble des points sur un corps algébriquement clos. Quand on considère X au-dessus de S , ce à quoi il faut penser, c’est qu’à chaque fois qu’on se donne donc S (S , par exemple, correspond au spectre d’un anneau A : $\text{Spec } A$), à et chaque fois qu’on envoie A dans un corps algébriquement clos, de X au-dessus de S , on déduit un schéma sur ce corps algébriquement clos. Donc, en un sens, l’objet géométrique, ce sont toutes les fibres géométriques de ce morphisme qui sont en un sens collées, qui forment une famille parce qu’on se donne un schéma X au-dessus de S . Ça amène à la distinction entre propriété géométrique et propriété arithmétique. Un des outils essentiels, dans ce cadre des schémas, c’est l’existence de produits fibrés. Quand on a X au-dessus de S et un morphisme de S' dans S , on peut considérer le produit fibré ou X fois S' sur S , ou comme on dit aussi le schéma déduit de X par changement de base de S à S' . Essentiellement,

§. espaces vectoriels

les propriétés géométriques sont les propriétés invariantes par changement de base et que dans une large mesure, on contrôle en comprenant ce qui se passe fibre géométrique à fibre géométrique, tandis que les propriétés arithmétiques seraient celles qui dépendraient de X lui-même éventuellement indépendamment de la base.

Si donc en ce sens-là, l'on retrouve un peu le point de vue de Weil, l'objet essentiel, c'est l'ensemble des points du schéma sur un corps algébriquement clos. Mais dans Weil, ça l'a amené à prendre cette notion d'ensemble des points du schéma comme la notion de base, et puis le corps de définition comme une structure additionnelle. Ici la donnée de base n'est pas celle qui est donnée par cette image-là, c'est X au-dessus de S , mais quand on en a besoin, on récupère des schémas sur des corps algébriquement clos simplement par un changement de base.

Et ce point de vue-là est aussi essentiel pour avoir une image géométrique de ce que c'est qu'un schéma, parce que si on regarde la définition d'un schéma, les points d'un schéma n'ont vraiment aucun sens géométrique, les corps résiduels sont différents, de dimensions différentes. On ne peut pas intuitivement penser à un schéma comme à l'ensemble de ses points ; tout au moins, c'est très artificiel. La notion naturelle est la suivante : étant donné X au-dessus de S , chaque fois qu'on considère S' au-dessus de S , on peut considérer l'ensemble des sections de X' au-dessus de S' , ou si on pense en terme de X défini par un système d'équations à coefficients dans un anneau A et qu'on se donne une extension de cet anneau, on considère les solutions de cette équation dans cet autre anneau, donc dans le langage des anneaux, on A, A', X défini par des équations, et on peut considérer les solutions du système des équations à coefficients dans A' et la donnée géométrique, ce n'est pas l'ensemble des points comme le schéma défini comme ensemble de points, l'objet géométrique, c'est l'ensemble des points à valeur dans A' quel que soit A' .

Ici, cette notion de foncteur représentable apparaît pour donner le support géométrique de la théorie. L'objet réellement est vu au mieux comme étant le foncteur représentable correspondant à l'ensemble des points à valeur dans A' pour tout A' . Et c'est ce point de vue-là aussi qui a permis de donner un sens tout à fait clair à la notion ancienne d'espace de modules. Riemann pouvait déjà dire que les courbes de genre g dépendent de $3g - 3$ paramètres complexes, je pense qu'il disait plutôt $6g - 6$ paramètres réels, mais ce que cela voulait dire exactement n'est, je pense, devenu réellement clair qu'avec Grothendieck, où, quand on a un problème de module, un certain type d'objets qu'on veut classer, en fait, ce qui est donné le plus naturellement, c'est un foncteur : de dire pour chaque schéma, qu'est-ce que c'est qu'une famille d'objets du type considéré paramétrée par S . Une solution du problème de modules est un foncteur qui représente ce foncteur. Donc on a le foncteur qui à S associe l'ensemble des familles paramétrée par S d'objets du type correspondant, et une solution du problème de module est une famille universelle dont toute autre famille se déduit de façon unique par changement de base.

Il fallait aussi comprendre ce que c'est vraiment que la notion de famille, et ce n'était pas une chose évidente du tout, je crois, de comprendre que la bonne notion de famille algébrique de schémas, par exemple, est un morphisme $X \rightarrow S$ qui est propre, plat (plat, c'est ce qui exprime que la famille varie de façon algébrique), et en plus, les fibres géométriques du type voulu ; on impose des conditions aux fibres géométriques, on demande en plus qu'on ait un morphisme propre et plat. Donc ça, c'est tout ce qui va autour de cette notion de schéma.

Grothendieck a aussi utilisé les mêmes idées dans le cadre de la géométrie analytique, où c'était parfois - souvent - plus difficile, et parfois plus simple, de traiter les problèmes. Là, je devrais dire aussi que ce thème des courbes a été un intérêt récurrent pour Grothendieck. Ce n'était jamais très loin de ce qu'il faisait, il y avait d'abord, comme premier exemple tout à fait non trivial l'espace de modules dont on prouve l'existence.

Un second théorème, à peu près à la même période, c'était celui où on a une courbe X sur un corps algébriquement clos de caractéristique p , et il faut calculer le π_1 de cette courbe, ou en tout cas le plus grand quotient, premier à la caractéristique du π_1 . Alors, plus tard dans le développement de la cohomologie étale, le cas des courbes était vraiment le cas crucial auquel se ramenaient tous les dévissages ; et encore plus tard, dans les années 70, Grothendieck a été extrêmement impressionné par le théorème de Belyi qui disait qu'une surface de Riemann est une courbe algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement si elle peut se représenter comme un revêtement de la droite projective, ramifiée seulement en trois points (on prend 0, 1, l'infini si on a envie).

Ah oui, une chose que j'avais oublié de dire, donc, tout au début, j'expliquais que Grothendieck avait cette image de la mer qui monte pour résoudre les problèmes en les dissolvant et il cite une liste de problèmes qu'il considère avoir traités par cette méthode-là, qui pour moi est un petit peu surprenante. Alors je vais la citer. Le premier problème, dont je n'ai pas parlé, c'est Riemann-Roch. Un second, c'est celui que je viens de mentionner ici sur la structure du π_1 d'une courbe sur un corps algébriquement clos, par une réduction au cas complexe. Il y a la rationalité des fonctions L , qui tombe comme un fruit mûr une fois que le formalisme de la cohomologie étale, de la dualité, de tout ce qu'il fallait, a été développé. Et il mentionne aussi le théorème de réduction semi-stable pour les variétés abéliennes, une fois qu'on a compris comment certains propriétés des représentations ℓ -adiques du groupe de Galois d'un corps local, le théorème de réduction semi-stable venant finalement du théorème que la monodromie locale est unipotente, que Grothendieck voyait d'un point de vue galoisien. Une situation où ce point de vue est apparu plus tôt, mais dont je ne dirai pratiquement rien, on parlera du théorème de Riemann-Roch, absolu en tout cas, ailleurs dans cette conférence, c'est de prouver le théorème de Riemann-Roch relatif pour X au-dessus de S , pour les besoins duquel Grothendieck a introduit le groupe K^0 qui, en un sens, est le premier groupe de la théorie des groupes de K -théorie supérieure. Et ça, c'est une direction qu'il n'a pas vraiment suivie. Je me rappelle de longues conversations à Massy-Verrières, avec Quillen, en se promenant sur l'ancien talus de chemin de fer. Alors, comme à son habitude, Grothendieck aimait beaucoup marcher, être dehors, mais il ne regardait absolument pas ce qu'il y avait autour de lui. Et je me rappelle de longues discussions avec Quillen, donc, sur cette théorie des K^i supérieurs que Quillen développait. En un sens, les travaux plus récents de Grothendieck *À la poursuite des champs* tournent autour de ce thème : une bonne façon de comprendre les K^i supérieurs, c'est de voir tous les K^i supérieurs comme formant un spectre.

Grothendieck aurait vu ça, "*À la poursuite des champs*", comme étant une ∞ -catégorie mais il n'a jamais rejoint ce point de vue des ∞ -catégories avec les travaux de Quillen par exemple. Ça, c'est ce que je voulais dire sur le premier thème, celui des schémas.

Le second thème dont je voudrais parler est celui des *topos*. pour des raisons que vous pourrez

peut-être essayer de comprendre après, il trouve que cette notion de topos a été sous-estimée et une des marques depuis longtemps de l'importance centrale qu'il attache à la notion, c'est que ce séminaire SGA4 consacré en grande partie à la cohomologie étale ne s'appelle pas "*Cohomologie étale*" mais "*Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*". Et essentiellement, Grothendieck nous a permis de comprendre autrement un mot qui joue un rôle crucial, le mot "*localement*", que depuis la théorie des schémas, on comprend très différemment de la façon dont on pouvait le comprendre avant. Il a aussi quelques prédécesseurs pour cette notion, mais je pourrai en citer beaucoup moins que je n'ai pu citer de prédécesseurs pour la notion de schéma.

Un prédécesseur, ce sont les théories de Ehresmann qui avait observé que dans la notion de faisceau, on n'avait pas vraiment besoin d'un espace topologique, mais qu'on employait simplement l'espace ordonné des ouverts de l'espace topologique ; je crois que ça n'a eu absolument aucune influence sur Grothendieck qui, de toute façon, ne lisait pas ce que les autres lisaient, qui apprenait ce qui se passait en dehors de lui à travers Serre ou Dieudonné. Et clairement Serre ne s'intéressait pas du tout à ce genre de choses que faisait Ehresmann [*Rire entendu adressé à un auditeur (Jean-Pierre Serre est dans la salle)*].

Par contre, il y a eu une autre... Serre, je crois, a eu une influence directe en introduisant la notion de fibré isotrivial, l'idée que quand on considère des espaces principaux homogènes ou fibrés de diverses natures, dans bien des cas, la notion naturelle n'est pas celle de fibré localement trivial qui était comprise par exemple par Weil déjà, mais qu'il fallait considérer des fibrés qui deviennent localement triviaux ou triviaux après un revêtement fini non ramifié. Et en fait, l'ancêtre le plus direct, là où la notion s'est d'abord développée, c'est dans la *théorie de la descente*. Donc comme j'avais expliqué, la notion de base n'est pas celle d'un schéma, mais celle d'une famille de schémas paramétrée par S , donc dans notre façon de dire, par un morphisme de schémas, et une opération fondamentale, c'est de faire un changement de base, donc un autre nom pour "produit fibré". Et une question essentielle, c'est de pouvoir monter, et descendre, savoir que certaines propriétés sont préservées par extension des scalaires, changement de base, et aussi savoir dans certains cas que si une propriété est prouvée après changement de base, ou si on a pu faire certaines constructions après changement de base, on peut les redescendre au schéma de base. Par exemple, on veut prouver quelque chose par localisation : on peut se ramener à prouver le même énoncé sur le spectre d'anneaux locaux (*Deligne écrit au tableau : $\mathrm{Sp}(\mathcal{O}_x)$* .) et on aime pouvoir passer des anneaux locaux à leur complété (*Deligne écrit au tableau : $\mathrm{Sp}(\mathcal{O}_x^\wedge)$*), qui peuvent être atteints par d'autres techniques.

Pour étudier ce qui se passe sur les anneaux locaux, on peut étudier d'abord ce qui se passe sur des quotients par une puissance de l'idéal maximal (*Deligne écrit au tableau : $\mathrm{Sp}(\mathcal{O}^\wedge/m^n)$* .), ceci, c'est plus ou moins un problème différentiel ; on passe de ce problème différentiel au complété et on veut redescendre à l'anneau local. Alors ici, il y a une chose que je voudrais quand même dire, que j'aurais dû dire tout à l'heure. Pour nous, il est maintenant plus ou moins évident que les éléments nilpotents, on considère des anneaux locaux ou de la puissance de l'idéal maximal, c'est une façon de faire de la géométrie différentielle, de comprendre infinitésimalement ce qui se passe. Mais je voudrais indiquer que pour les Italiens, ce n'était pas du tout une idée naturelle. Les Italiens aussi s'étaient posé le problème, sur une surface surtout, de comprendre ce qui se passe infinitésimalement au voisinage d'un point. Par exemple, il est clair que si on impose à une courbe de passer par deux points, puis que ces points commencent à se coaguler, on impose de passer par un point et

d'avoir une tangente donnée en ce point-là et on peut aller au-delà. Mais les Italiens ne traitaient pas du tout ce genre de question en terme d'anneau à élément nilpotent, le point de vue qu'ils adoptaient toujours, c'était de passer de la surface donnée et de faire une série d'éclatements. Le premier stade, c'est que si on a une surface et un point, si on éclate ce point, on le remplace par une droite projective et chaque point de cette droite projective correspond sur la surface originale à un point, enfin, le point qu'on a éclaté, plus une direction. Et c'était en généralisant ce point de vue-là que les Italiens essayaient de comprendre les propriétés infinitésimales des surfaces. Donc le point de vue des éléments nilpotents était quelque chose de tout à fait nouveau à l'époque.

Donc là, comme prédécesseur, il y a cette question de descente : ce que Grothendieck a vu, c'est que si on veut construire par exemple X au-dessus de S , qu'on parvient à construire X' au-dessus de S' , si on veut descendre ce X' au-dessus de S' en S au-dessus de X , la première chose à faire, c'est de trouver qu'elle doit être aussi l'image de X au-dessus du produit fibré $S' \times_S S'$ avec une condition de compatibilité sur le produit fibré triple. Et dans le cas particulier où S' est simplement une réunion disjointe d'ouverts de S , c'est simplement la localisation que tout le monde fait : pour définir un objet X au-dessus de S , on considère un recouvrement ouvert (U_i) de S ; au-dessus de chaque U_i , on construit l'objet, et puis sur les intersections des U_i , on les recolle et il y a une condition de compatibilité sur les intersections triples.

Mais ce qui est tout à fait nouveau, ici, c'est que S' n'est pas une somme disjointe d'ouverts, mais quelque chose qui est au-dessus de S . Donc on a S ici, on a des fibres qui peuvent être de dimension positive de S' au-dessus de S et essentiellement, ce qu'on se donne, on construit l'objet sur X' , et si deux points sont au-dessus du même point de S , on se donne un isomorphisme entre les fibres entre ces deux points, qui est la donnée de recollement. Mais la bonne façon de l'exprimer, c'est ce langage de donnée de descente, qui s'applique très joliment pour expliquer la descente galoisienne, la descente inséparable qui venait avant.

Et là, j'aime beaucoup l'expression que Cartier ¶ m'a dite une fois, c'est que, de nouveau, c'est un peu cette image de la mer qui monte, on ne voit plus ce qu'il y a à démontrer. Cartier disait que Grothendieck pouvait prouver la descente galoisienne par descente galoisienne. Et en un sens, c'est assez vrai.

Alors ça, c'est, comme je le comprends, la source : que d'avoir compris que cette notion de descente de S' au-dessus de S qui n'est pas une somme disjointe d'ouverts peut se traiter par ce langage de la descente, de la même façon qu'on traiterait un recouvrement d'ouverts de S , et de faire des recollements. Donc là apparaît l'analogie entre donner une certaine classe de morphismes comme morphisme surjectif et plat, et la donnée de recouvrement. Et le principal succès de la notion de topos a été de fournir le cadre qu'il fallait pour définir la cohomologie ℓ -adique.

Essentiellement, on a d'abord cette notion de topos ; les topos sont ce qu'il faut pour définir une notion de faisceau. Grothendieck avait vu précédemment que si on voulait bien définir la cohomologie des faisceaux, il n'était pas nécessaire de procéder à la Čech ou par quelque autre façon, mais qu'on pouvait simplement partir de la catégorie des faisceaux et considérer les foncteurs satellites du foncteur section globale. Donc ce point de vue s'adaptait aussi bien, dès qu'on avait n'importe quelle

¶. Pierre Cartier (1932-2024).

notion de faisceau avec des propriétés raisonnables. Il a ensuite su montrer que si on prend comme topologie la topologie étale, la théorie de cohomologie qu'on obtient, la cohomologie ℓ -adique, a tout ce qu'il faut pour prouver la rationalité des fonctions L .

Alors, j'imagine qu'une des raisons pour laquelle la notion de topos est moins entrée dans notre inconscient collectif que celle de schémas, c'est que d'une part, de cette application la plus spectaculaire, le site ou le topos qui apparaît là est vraiment très proche de l'intuition classique : on peut presque oublier que ce ne sont pas des vrais ouverts, mais qu'ils sont un peu étalés au-dessus de l'espace donné. Et dans les autres cas, où la notion de topos est utile, il y avait essentiellement toujours d'autres façons d'aborder le problème, que les gens ont souvent préférées, plutôt que de faire l'effort de voir ce nouveau point de vue.

Les cas auxquels je pense, par exemple, d'abord, il y a la notion de... quand on considère un espace feuilleté, on peut considérer un site correspondant, où les ouverts sont donnés par des sections au feuilletage, il y a une cuisine qu'on peut faire..., mais en fait, ça n'a pas, on a ceci... (*Deligne dessine des courbes parallèles et une courbe comme un serpent qui les traverse toutes.*) moralement on peut considérer X modulo cette relation d'équivalence (*Deligne écrit le quotient X/R .*) mais pas comme espace topologique mais comme site ou comme topos, et on obtient un topos qui est localement une variété, on a pu faire ce complexe de de Rham, tout ce genre de choses-là. Mais en fait, ça n'a pas été la façon la plus commode de donner un sens à ce X modulo une relation d'équivalence ; la façon qui est apparue comme la plus commode, c'est celle d'Alain Connes d'introduire des algèbres non commutatives dont les modules sont moralement des fibrés vectoriels sur ce quotient X modulo R .

Un autre cas plus proche de la géométrie algébrique, c'est la cohomologie non pas ℓ -adique mais cristalline, où là, le topos dont la cohomologie cristalline et la cohomologie correspondante est un topos beaucoup plus loin de l'intuition classique, le site correspondant n'a pas d'objet final, on a des morphismes de topos qui ne viennent pas de façon très claire de morphismes de sites, tout ça est assez délicat. Et on a en général une ou même deux façons autres de procéder : une façon qui est d'utiliser systématiquement le complexe de de Rham ; ou un autre point de vue aussi, c'est de systématiquement employer des $\mathcal{D}$ -modules et de ce fait-là, on n'a pas le même besoin de topos cristallin qu'on a du topos étale.

Sinon, la notion de topos apparaît en logique aussi, mais ça, c'est tout à fait en dehors de ce qui était les intérêts de Grothendieck.

Aussi il y a une série de prédécesseurs il y a Cartan-Eilenberg, par exemple, diverses théories de dualité notamment la dualité en cohomologie galoisienne avec Poitou-Serre^{||}, la théorie de la dualité pour les espaces topologiques avec Borel-Moore.

Grothendieck a ici édifié un formalisme extrêmement souple qu'il a appelé le formalisme des six opérations. Un point de départ est l'introduction de la notion de catégorie dérivée d'une catégorie

^{||}. Note de la transcriptrice : Là, Serre corrige "Poitou-Tate" et Deligne, alors qu'il écrit Poitou-Tate, c'était un lapsus, fait remarquer que ces références ne sont pas des articles en commun (c'est ainsi qu'il a dû interpréter l'intervention de Serre, mais des lignées de prédécesseurs et Serre, en toute modestie, dit "je n'ai pas compris que tu disais Tate").

abélienne. Là je ne sais pas quelle est la part respective de Grothendieck et de Verdier, je m'en f... d'ailleurs en général des parts respectives de l'un ou de l'autre. *Un auditeur (Serre ?) intervient : "Ce n'est pas un colloque sur l'Histoire ?". Deligne : "Pardon ?...". Serre : "Ce n'est pas un colloque sur l'histoire." [Rires]*

Alors, ça, c'est le cas des catégories dérivées, c'est pour le cas abélien. Je veux quand même mentionner qu'avant ce formalisme cohomologique général, Grothendieck avait étudié le cas non-abélien dans l'article à Kansas pour bien comprendre le H^1 dans le cas non-commutatif inspiré par Weil, j'imagine aussi, et ce thème non abélien après s'est poursuivi dans le livre de Giraud où le H^2 est interprété de façon plus ou moins terre à terre ou catégorique. Pour le cas abélien, il y a eu l'article de Grothendieck du Tôhoku, est-ce que j'ai la date, oui, 1957, qui est l'endroit où notamment il montre que la notion de cohomologie des faisceaux, que dans le cas des schémas, dans FAC, Serre introduisait la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents en terme de cohomologie de Čech ; ici, dans le Tôhoku, il y avait une définition générale qui s'appliquait sans devoir trop se poser de question, simplement comme foncteur satellite du foncteur de section globale. Donc après ça, pour moi, un point essentiel a été l'introduction de la catégorie dérivée, où l'idée de base est très simple : c'est que chaque fois qu'on calcule la cohomologie de quelque chose, ce qu'on fait, c'est qu'on prend une résolution d'un faisceau par exemple ; dans le cas des faisceaux, on prend une résolution convenable de ce faisceau dans un complexe de de Rham, on prend des sections globales ou si c'est des *Ext* qu'on calcule, on considère une résolution projective des homomorphismes dans quelque chose. Mais dans tous les cas, quand on calcule des groupes de cohomologie, ce qu'on obtient n'est pas simplement les groupes de cohomologie, mais on a toujours un complexe qui vient avec, et qui leur donne naissance. Donc l'objet réellement naturel qui est construit, c'est un complexe dont les objets de cohomologie sont les groupes de cohomologie du complexe dans lequel ça vit et, dans une large mesure, il y a souvent intérêt aussi longtemps que possible à rester au niveau du complexe plutôt que de passer simplement à la cohomologie. Et le formalisme des catégories dérivées est un formalisme qui marche étonnamment bien et qui permet de faire ça de façon très souple, qui permet par exemple de, au moins dans les énoncés, au lieu de se trimballer avec quelques suites spectrales, on a une formule de foncteur composé simplement, ce qui fait qu'à la fois, on comprend mieux ce qui se passe, et on sent qu'on est plus proche de ce qui se passe réellement. Donc il y a ce formalisme de la catégorie dérivée, qui, essentiellement, est le support de ce formalisme des six opérations.

Alors je dois dire quelles sont ces opérations.

Comme je comprends, le formalisme est d'abord apparu en cohomologie cohérente, pour les faisceaux cohérents, où elles** ne sont pas tout à fait au complet, mais aussi dans le cas des espaces topologiques, des CW-complexes en tout cas. Alors l'idée, c'est qu'on considère un espace, certains types de faisceaux, la catégorie dérivée correspondante, et les opérations avec lesquelles on aime jouer sont les suivantes : on a une opération de produit tensoriel ; s'il y a des phénomènes de torsion qui se passent, il faut prendre un produit tensoriel dérivé, donc au niveau des complexes, c'est ce qui donnera des foncteurs *Tor* ; on a aussi un foncteur *Hom*, c'est ce qui correspond, quand on passe à la cohomologie au *Ext*, ça, c'est ce qui se passe sur un espace donné, dans une de ces catégories dérivées. D'autre part, si on a un morphisme $X \rightarrow Y$ (*prononcer X flèche Y.*) : on dispose de 4 foncteurs reliant les objets sur X et les objets sur Y , deux foncteurs allant des objets sur X

** . Note de la traductrice : elles = les 6 opérations.

aux objets sur Y (dans le cas des espaces topologiques, c'est le foncteur dérivé du foncteur image directe (Rf_*) et aussi le foncteur dérivé du foncteur image directe à support propre $(Rf_!)$, et dans l'autre sens, on a le foncteur image inverse (Lf^*) et le foncteur image inverse extraordinaire $RF^!$ (point d'exclamation en haut), et on a une formule d'adjonction entre ces deux foncteurs-ci qui est tout à fait triviale, et aussi une formule d'adjonction entre les deux foncteurs extraordinaires, et ceci s'incarne dans les diverses théories de dualité dont on dispose : dualité de Poincaré, dualité de Serre pour les faisceaux cohérents, dualité en cohomologie étale et vous voyez, il y a bien six opérations qui essentiellement... alors, oui, dans le cas des faisceaux cohérents, la théorie marche vraiment pour les images directes, seulement pour les morphismes propres, et dans ce cas-là, ces deux images directes coïncident. Mais dans le cas soit topologique, soit de cohomologie ℓ -adique, on dispose des six opérations dans toute leur beauté. Et plus tard, il s'est encore ajouté d'autres opérations. Donc les 6 opérations sont 8 opérations en fait. Dans le séminaire SGA 7, Grothendieck considère un morphisme X flèche S où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, donc avec un point, un point général et un point spécial, et on a les foncteurs cycle évanescents et cycle proches allant des faisceaux sur la fibre générale vers les faisceaux sur la fibre spéciale. Alors il y a encore une opération que je devrais considérer, c'est l'opération de dualité ; ce qui se passe plutôt, c'est que dans cette histoire, apparaît toujours aussi ce qu'on appelle le complexe dualisant qui, dans le cas d'un point ou d'un corps dans le cas cohérent est quelque chose de tout à fait trivial ; dans le cas d'un schéma lisse, c'est un objet très simple : des différentielles de degré maximal dans le cas cohérent, ou simplement un faisceau tordu à la tête dans le cas étale, le faisceau d'orientation, et il entre dans le formalisme avec la formule que l'image inverse extraordinaire du complexe dualisant sur Y s'identifie au complexe dualisant sur X . Donc une fois qu'on en dispose sur le point de base, on en dispose automatiquement sur tout le monde, par ce type de formule.

Ce formalisme a d'abord été développé dans le livre d'Hartshorne, j'ai oublié le titre, c'est le livre d'Hartshorne *Residues and duality*^{††}, mais c'est le séminaire de Grothendieck.

Et en un sens, tout le formalisme développé là, c'est assez étonnant à voir, d'ailleurs, a pratiquement pu être repris tel quel, pour traiter le cas de la cohomologie étale, le formalisme lui-même, les démonstrations sont complètement différentes : certaines sont essentiellement triviales dans le cas cohérent, et sont très profondes dans le cas de la cohomologie étale, mais il est vraiment miraculeux de voir combien le même formalisme peut servir dans les deux cas. Et ici, je viens de donner les ingrédients de base du formalisme, mais une fois qu'on a ce type de situation, on en déduit formellement des formules de points fixes de type Lefschetz, donc ce qu'on appelle dans le cas cohérent "Woods hole fixed point formula" parfois ou dans le cas ℓ -adique, la vraie formule des traces de Lefschetz, qui est ce dont sort, essentiellement, la rationalité des fonctions L avec une bonne interprétation des facteurs rationnels en question.

C'est un des formalismes dont Grothendieck, dans *Récoltes et semailles*, regrette un peu qu'il ne soit pas aussi familier qu'il devrait l'être. Et effectivement, c'est un formalisme extrêmement puissant.

Je voudrais raconter un éberllement que j'ai eu une fois en parlant avec Grothendieck. Un de ses intérêts constants, aussi, a été de comprendre les phénomènes de dualité, ce qui est lié aux variétés abéliennes, et donc aux courbes aussi, qui sont toujours un point de départ, et comprendre la no-

^{††}. <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN496067613>.

tion de bi-extension : si on a deux variétés abéliennes A et B , on a une notion de bi-extension de $A \times B$ par le groupe multiplicatif, qui est très commode pour exprimer ce qu'est la dualité entre deux variétés abéliennes ; si deux variétés abéliennes sont en dualité, cette dualité s'exprime par l'existence d'une bi-extension de $A \times B$ par le groupe multiplicatif. Et ça donne un peu une image de la façon dont Grothendieck osait voir les choses : il m'a expliqué une fois que si on considérait les G_m ou les schémas abéliens comme foncteurs représentables sur le gros site étale, ce qui est une chose assez raisonnable, les bi-extensions de $A \times B$ par G_m forment simplement le Ext du produit tensoriel dérivé A tensoriel B par le groupe multiplicatif (*Il note : $Ext(A \overset{\mathbb{L}}{\otimes}, G)$*).

Alors jamais je n'aurais imaginé qu'on ose considérer un objet pareil, le produit tensoriel dérivé de deux schémas abéliens. Et pourtant, si on regarde ce que les choses veulent dire, ça entre assez bien dans le formalisme général, et ça donne immédiatement toutes sortes de formules de relations, que Mumford avait vues, ou ça permet de comprendre l'accouplement de Weil attaché à une bi-extension ; tout ça sort très facilement de ce type de formule, plus, bien sûr, la suite exacte reliant la variété abélienne et ses points de division par n (*Deligne écrit la suite exacte : $A_n \longrightarrow A \xrightarrow{n} A \longrightarrow 0$*), la suite exacte genre suite exacte de Kummer. Mais c'est un exemple de la façon, qu'on trouve complètement extraordinaire, que Grothendieck avait de réfléchir ; il avait ce formalisme qu'il disait comme il respirait. Il s'appliquait à un objet qu'on aurait jamais osé considérer, mais Grothendieck osait.

Mais il y a encore un thème dont je voudrais parler, qui est celui des motifs. Si on considère des schémas sur un corps k , algébriquement clos, pour chaque ℓ différent de la caractéristique, on dispose de la cohomologie ℓ -adique de X . et ces cohomologies sont des frères jumeaux pour les différents nombres premiers. Et donc il est assez naturel de vouloir avoir quelque chose comme la cohomologie entière. On sait qu'il n'y a pas moyen, donc il faut inventer quelque chose, qui joue le rôle de la cohomologie entière. Avant d'avoir la cohomologie, on voudrait aussi avoir une théorie pour p égal à la caractéristique, et là, il y a une longue histoire : Serre avait commencé à considérer la cohomologie des vecteurs de Witt ; la bonne théorie finalement a été la cohomologie cristalline de Grothendieck. Finalement les vecteurs de Witt ont quand même pu servir pour une interprétation de la cohomologie cristalline en termes de de Rham-Witt, mais le point de vue de Grothendieck a été le point de vue cristallin. Donc on voudrait avoir quelque chose sur $\mathbb{Z}$. Alors là aussi, il y a eu toute une série d'essais, de tentatives avant d'arriver à quelque chose. Dans ce qu'on voulait, on voulait deux choses : on voulait d'une part comprendre pourquoi toutes ces théories parallèles existaient, qu'est-ce qui les rassemblait. Et d'autre part, on voulait mettre en œuvre la stratégie que Serre avait indiquée dans l'article *Analogues kahlériens*, qui expliquait sur les complexes un énoncé, qui si on était à la fois sur les complexes et sur un corps fini, donc on avait à la fois la théorie de Kähler et le Frobenius, on pouvait démontrer la conjecture de Weil, complète, et un des buts des motifs était de faire une théorie sur $\mathbb{Z}$ qui aurait permis d'utiliser ces arguments de Serre dans *Analogues kähleriens*. Il y a eu une série d'essais différents ; par exemple, le meilleur exemple de motif, le seul cas qu'on comprenait vraiment, c'était le cas du H^1 , ou un motif correspondant à un H^1 d'une variété algébrique, c'est simplement que le H^1 d'une courbe correspond à la jacobienne de la courbe. Donc la théorie du H^1 , c'est celle des variétés abéliennes du schéma de Picard, vu comme étant $\text{Pic} = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ (H^1 de $\mathcal{O}$ multiplicatif), et les premiers essais, comme je les comprends, ont plutôt été dans cette direction-là. Il y avait la notion de jacobienne intermédiaire dans les H supérieurs que Weil, Griffiths avaient regardée. Et il y a aussi la tenta-

tive de Grothendieck de comprendre les H^i supérieurs de X à valeurs dans $\mathcal{O}$ multiplicatif, donc l'étude du groupe de Brauer qu'il a fait dans une série de séminaires Bourbaki. Mais j'imagine qu'il avait la notion de motif derrière la tête. Mais tout ça n'a rien donné, en fait, en direction des motifs.

Et là aussi, Grothendieck a eu une idée qui est assez typique de lui ; on a ces diverses théories de cohomologie, on en voudrait une qui les coiffe toute, à valeur dans la catégorie des motifs. Et son idée, simplement, c'est qu'on peut définir la catégorie des motifs comme étant la catégorie universelle, pour laquelle on dispose d'une théorie de cohomologie, ayant les propriétés dont on a envie. Donc Grothendieck a eu une idée assez extraordinaire, qui est de définir la catégorie des motifs comme étant la catégorie universelle ayant certaines propriétés. Alors, la notion d'objet universel est une notion bien ancienne, mais ici, c'est assez différent, ce ne sont pas des objets qu'on veut construire, c'est la catégorie de ces objets. Et on veut définir la catégorie de ces objets par ses propriétés essentiellement. Bon, alors ça, on peut faire une définition, mais c'est une idée qui, en soi, "n'a pas pris" tellement. Mais il y a ici une autre idée que Grothendieck a introduite, c'est que cette catégorie de motifs, c'est une catégorie additive, ça, c'est essentiellement par définition ; on voudrait qu'elle soit abélienne semi-simple, pour pouvoir attaquer diverses conjectures. Mais il y a une structure essentielle additionnelle qui est un produit tensoriel, qui correspond au fait qu'on peut considérer le produit de deux variétés algébriques, et qu'on veut que la cohomologie d'un produit soit le produit tensoriel des cohomologies par la formule de Künneth. Alors c'est pour étudier les motifs que Grothendieck a inventé la notion de théorie tannakienne. il y a une catégorie avec produit tensoriel, avec des propriétés raisonnables, qui implique presque que ce soit la catégorie des représentations d'un groupe algébrique, presque : il y a des subtilités à faire, et la théorie a été développé par Saavedra, qui a choisi le nom tannakien aussi, ce dont Grothendieck s'est plaint par la suite. En fait, je crois que Grothendieck ne connaissait pas du tout les travaux de Tannaka, et dans Tannaka, l'emphase est effectivement assez différente. Dans Tannaka, on considère essentiellement des groupes compacts ; on considère aussi la catégorie des représentations de ce groupe compact éventuellement unitaire, mais la différence essentielle, c'est qu'on ne considère pas la catégorie en l'air, mais on considère les représentations de ce groupe k , les représentations linéaires, plus la donnée de ce qu'est, mais considéré comme sous-catégorie de la catégorie des espaces vectoriels, donc on a d'une part la catégorie avec produit tensoriel, plus le foncteur espace vectoriel sous-jacent. Tandis que l'idée essentielle pour les catégories tannakiennes, c'est que c'est la catégorie en l'air avec un produit tensoriel, on peut, on demande l'existence de foncteur analogue au foncteur espace vectoriel sous-jacent, à valeur au moins dans des extensions du corps de base. Mais ce n'est pas parti de la structure de base, c'est un outil pour étudier la catégorie ; donc de ce point de vue-là, c'est très nouveau aussi comme idée. Et là, je dirais que cette idée de catégorie tannakienne, la catégorie en l'air qui permet de plus ou moins reconstruire un groupe, dans la catégorie sur le groupe des représentations, est un peu préfiguré par la théorie du π_1 . Bon ici, dans le cas des catégories tannakiennes, on est dans une situation linéaire avec produit tensoriel. Dans le cas du π_1 , c'est différent : l'idée, c'est que si on a un espace topologique ou un schéma, enfin, beaucoup de situations sont possibles, on a d'une part la notion de groupe fondamental, et d'autre part on a la notion de revêtement fini, ou profini selon le cas. Et dans sa théorie du π_1 , Grothendieck met clairement en évidence l'équivalence entre les deux points de vue et que si on peut définir la catégorie des revêtements comme catégorie en l'air avec des propriétés convenables, automatiquement, on reconstitue le groupe fondamental, qu'il y a dualité entre les deux points de vue, comme il y a dualité entre un groupe et la catégorie de ses représentations. Et en fait, beaucoup de résultats

sur le π_1 peuvent devenir beaucoup plus lumineux, du point de vue des revêtements. Le théorème de Steel-van Kampen^{‡‡} qui explique comment le π_1 d'une somme amalgamée se construit à partir du π_1 des morceaux et des intersections s'écrit simplement comme théorème de descente pour les revêtements. Et si ces théorèmes de van Kampen un peu compliqués sont juste une traduction en termes de descente, ils deviennent tout à fait limpides. Donc considérons cette théorie du π_1 comme préfiguration de cette catégorie des catégories tannakiennes. Ce qui a été assez ironique dans cette théorie des motifs, c'est qu'elle s'est développée de façon très différente de ce que Grothendieck imaginait, essentiellement parce qu'on n'a fait aucun progrès sur la question de comprendre la notion de cycle algébrique : on ne sait pas plus qu'il y a 25 ans, maintenant, construire les cycles algébriques intéressants sur des variétés sur un corps algébriquement clos. Et la définition des motifs, pour être réellement utile, exige, par exemple pour qu'on résolve quelque chose comme la conjecture de Hodge, qu'on ait suffisamment de cycles algébriques à sa disposition. Et en fait, la direction la plus intéressante après a été la notion de motif mixte, la relation avec les valeurs des fonctions L et ainsi de suite, des choses auxquelles Grothendieck ne s'était pas réellement intéressé. Voilà, c'est tout ce que j'avais à dire.

^{‡‡}. *Seifert-van Kampen dans wikipedia ?*