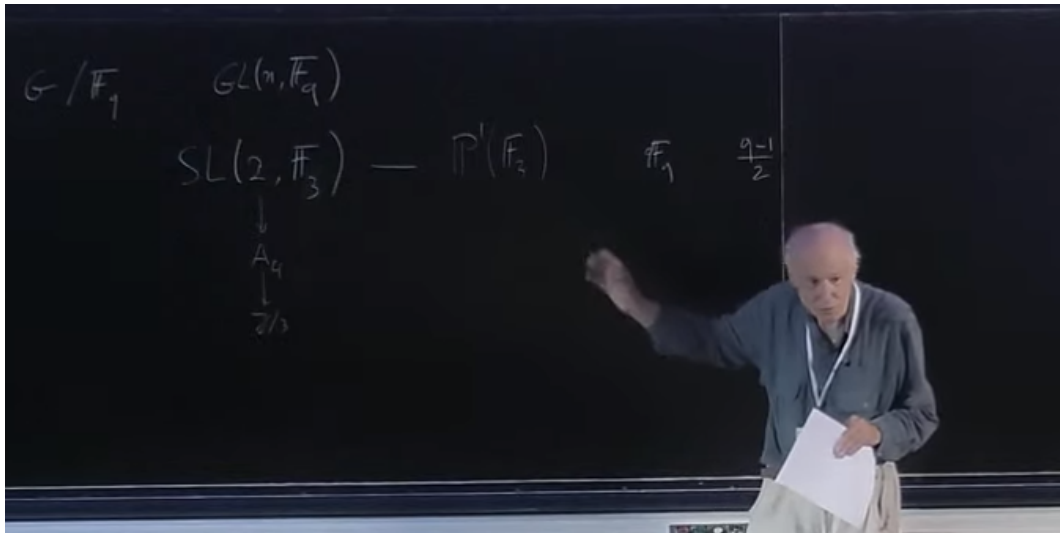


Transcription par outils d'ia de la conférence de Pierre Deligne à l'occasion de la conférence célébrant les 100 ans de Jean-Pierre Serre



[...]

Si on regarde du point de vue des représentations, ce qui se passe, c'est que quel que soit q , ce groupe $GL(2, \mathbb{F}_q)$ aura deux représentations de dimension $q - 1$ sur 2 , et si on prend q égale 3 , $q - 1$ sur 2 vaut 1 , ce qui explique qu'il y a des représentations de dimension 1 qui apparaissent dans ce cas-là. Et tous les cas où on a un groupe semi-simple dont on prend les points sur un corps fini et qui n'est pas égal à son groupe dérivé, ce sera dû au fait qu'il y a un certain polynôme en q qui donne une dimension, qui prend la valeur 1 . Comme autre exemple, il y a le cas du groupe V_2 sur le corps à deux éléments où on a un polynôme plus compliqué que celui-là qui aura la valeur 1 . Il y a une petite mise en garde que je dois faire. La façon dont on raconterait des choses n'est pas toujours l'ordre qu'on doit suivre pour les démonstrations, et si les résultats sont très uniformes en q , parfois les démonstrations ne le sont pas.

Et j'espère que je ne dirai pas des choses non-démontrées, mais peut-être qu'il y a certains cas encore où ce que je dirai n'est pas démontré pour des petites caractéristiques. Je commence par un outil essentiel dans la représentation soit sur un corps fini, soit sur un corps réel ou périodique. Dans tous les cas, un outil essentiel pour étudier les représentations, c'est l'induction à partir d'un groupe parabolique.

Dans le cas de $GL(n)$, on a la représentation sur un espace vectoriel V , on considère un drapeau, et on a le sous-groupe P qui respecte le drapeau, et on s'intéresse à la représentation de ce groupe. Ce groupe P est un produit d'un sous-groupe de Levi produit semi-directe par un radical unipotent. Ici, le sous-groupe de Levi, c'est le produit des V_ℓ , des quotients successifs, et U , c'est 1 plus quelque chose qui décroît strictement la filtration.

Un outil essentiel, c'est qu'on peut partir d'une représentation de $L^2(\mathbb{F}_q)$, qui est un autre groupe réductif, on l'enfle en une représentation de $P(2, \mathbb{F}_q)$, et puis on prend une induction de cette représentation. Une chose qu'on a compris il y a à peu près 50 ans, c'est qu'on peut faire plus par quelque chose que je viens de penser comme un prolongement analytique, ça n'a rien à voir avec le prolongement analytique habituel. Oui, une chose à remarquer, c'est que la représentation qu'on obtient par cette construction ne dépend pas de quel parabolique on prend, dont c'est le groupe de Levi.

Donc dans $GL(m)$, on peut considérer un produit de $GL(n_i)$, qui correspond vraiment à une décomposition de l'espace de dimension n en espace de dimension n_i , et pour chaque ordre qu'on met sur ce système de sous-groupe, on a un parabolique correspondant, c'est-à-dire on a une décomposition de l'espace en somme directe, et puis on prend des filtrations correspondant à un ordre sur ces facteurs directs. Et la représentation obtenue à l'isomorphisme près ne dépend que de la représentation de L , pas du parabolique choisi contenant L . C'est une raison intuitive pour laquelle on peut faire mieux. On peut partir d'un sous-groupe L du groupe V , tout seul sur $\mathbb{F}_q$, qui, sur la clôture algébrique, devient un sous-groupe de Levi d'un parabolique.

Si je prends l'exemple de $GL(n)$ de $\mathbb{F}_q$, les sous-groupes qu'on obtient, d'abord il faut remarquer que GL , pardon, il faut remarquer que $\mathbb{F}_{q^n}$ multiplicatif à conjugaison près est naturellement un sous-groupe de $GL(n)$. $\mathbb{F}_{q^n}$ multiplicatif va vivre par multiplication sur lui-même, et c'est un espace de dimension n sur $\mathbb{F}_q$. Et en général, les sous-groupes de Levi géométriques qu'on obtient dans $GL(n)$ sont des produits de $GL(n_i)\mathbb{F}_{q^{n_i}}$ avec somme des $n_i m_i$ égale n . Donc on a beaucoup de sous-groupes comme ça, et on a une opération d'induction $R_L(V)$ qui fait passer des représentations du groupe des points sur $\mathbb{F}_q$ de L vers une représentation du groupe V . Et c'est construit en utilisant la cohomologie ℓ -adique de certaines variétés.

Donc on construit une certaine variété, on construit un système local attaché à la représentation. Tout ça sur la clôture algébrique du corps fini. On considère les groupes de cohomologie à support compact de ce faisceau ℓ -adique et la somme alternée.

Ce qui apparaît tout de suite, c'est que ces représentations construites ne sont pas vraiment des représentations, ce sont des représentations virtuelles. C'est dans le groupe de Grothendieck des représentations. Souvent, ce sera soit plus, soit moins une représentation irréductible.

Mais c'est loin d'être toujours le cas. Donc, généralisant la notion d'induction, on a cette construction d'induction généralisée où on part d'un sous-groupe de lévis que j'appellerais de Levi géométrique. Alors, une première surprise que j'ai eue en regardant ce qui avait été fait, c'est combien le cas de $GL(M)$ est trompeur.

Il y a beaucoup de choses qui sont trop simples pour $GL(M)$ qui ne donnent pas une idée de ce qui se passe pour un groupe général. Mais quand même, je vais commencer par expliquer le cas de $GL(M)$, comment sont classifiées les représentations pour servir de contraste avec le cas général. Alors, ce qui est frappant pour $GL(M)$, c'est une symétrie complète entre la classification des classes de conjugation d'éléments du groupe et la classification des représentations irréductibles du groupe.

Alors, je commence par la classification des éléments que je mettrai sous une forme où ça se transpose bien au cas des représentations du groupe. Donc, j'ai le groupe $GL(M) - SQ$. Si je prends un élément V , on a la décomposition de Jordan, un semi-simple fois unipotent.

Comme c'est des groupes finis, on peut dire d'ordre premier à p et d'ordre une puissance de p . Et donc, pour classer V à conjugaison près, on regarde S qui sera à prendre à conjugaison près. On prend son centralisateur et on prend un élément unipotent dans le centralisateur. Une chose qui est particulière à $GL(n)$ et qui explique un peu toutes ces propriétés miraculeuses, c'est que tous les centralisateurs des éléments de $GL(M)$ sont connexes.

Ici, si on prend le centralisateur d'un élément semi-simple, ce sera ce groupe de Levi géométrique. Sur la culture algébrique, c'est clair, vous avez des valeurs propres avec certaines multiplicités. Ça donne une décomposition de l'espace selon les sous-espaces propres.

Et vous avez un produit de $GL(M)$ correspondant, qui est le centralisateur. Et sur le corps fini, on a le type de sous-groupe de Levi géométrique que j'avais dit, et un produit de $GL(M_i)$ de $\mathbb{F}_q$, une extension $\mathbb{F}_q(M_i)$. On peut donc dire les choses de façon différente.

Ce qu'on doit classer, c'est d'abord un sous-groupe de Levi géométrique. C'est quelque chose d'assez combinatoire, sur le groupe de $GL(n)$ qui est le groupe symétrique. Puis un élément de $GL(\mathbb{F}_q)$.

Il faut faire attention à quel élément on prend. On ne veut pas prendre l'élément neutre, par exemple. On veut que L soit le centralisateur.

Donc on veut que L soit maximal. Il n'y a pas un sous-groupe de Levi géométrique plus grand tel que S soit encore dans son centre. Et on doit maintenant se donner un élément unipotent de ce groupe de Levi géométrique.

Maintenant, je passe du côté des représentations pour montrer qu'on a tout à fait la même histoire qui se passe. Mais il faut d'abord que j'explique ce qui vaut le rôle des éléments unipotents. C'est ce qu'on appellera les représentations unipotentes.

C'est un nom un peu bizarre, mais c'est par l'analogie avec les éléments unipotents. Et pour $GL(M)$, c'est très simple. C'est les représentations qui figurent induites dans ce groupe de Borel, donc stabilisateur d'un drapeau complet de la représentation triviale.

En d'autres termes, la représentation, on considère l'espace des sous-groupes de Borel ou l'espace des drapeaux complets dans la représentation standard. Et on considère les fonctions sur cet espace sur lequel le groupe a vie par conjugaison. Et les représentations unipotentes sont celles qui apparaissent là-dedans.

Et pour les décrire, il faut comprendre quel est le groupe des endomorphismes de cette représentation comme représentation de $GL(q)$. Et on voit facilement une base des représentations, une façon d'attacher... Il suffit de voir comment attacher à une fonction ici-dessus une autre fonction. Donc

on veut un noyau $BF_q \times BF_q$ ¹ invariant par le groupe.

Et l'idée, c'est que si on a deux sous-groupes de Borel, il y a une position relative entre eux qui est indexée par un élément de groupe de V_l , qui est le groupe symétrique, ici. Et donc, les endomorphismes qu'on a, on a une base des endomorphismes indexés par le groupe symétrique qui, à un Borel, attache la somme de tous ceux dans une position relative donnée. Donc on a cet algèbre qu'on appelle l'algèbre de Hecke avec une base Tw, W, W dans le groupe symétrique S_n .

Alors, on a une loi de multiplication et ce qu'on a, c'est qu'on obtient une déformation de l'algèbre du groupe symétrique S_n . Et en trichant un peu, on peut dire que les modules irréductibles sous cet algèbre sont en correspondance avec la représentation irréductible du groupe S_n qui, elles-mêmes, sont indexées par les partitions. Et à chaque représentation irréductible de l'algèbre de Hecke correspond une représentation irréductible du groupe $GL(n)$ auquel on s'intéresse.

Et donc on a une indexation des représentations unipotentes qui nous intéressent par les partitions, par la représentation de S_n . Donc ça, c'est ce qui joue le rôle des éléments unipotents. On a les représentations unipotentes.

Et une fois qu'on a ça, la description des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles est tout à fait pareille à ce qu'on a là, on doit se donner un sous-groupe de Levi géométrique. Dans le cas précédent, on se donnait un élément du centre. Duale, on considère ce groupe rendu abélien et on prend les points rationnels et on prend un caractère de ce groupe fini.

Donc ça correspond là-bas à un élément du centre du groupe de Levi géométrique. Et on se donne aussi une représentation unipotente de ce groupe de Levi géométrique. Je vais expliquer ce que c'étaient les représentations unipotentes pour $GL(n)$.

Ici, on a un produit de $V_l(n_i)$. Donc on a là une description tout à fait semblable. Est-ce que les caractères... Ah, pardon.

Oui, oui. On demande en plus qu'elles soient maximales, en ce sens qu'il n'y ait pas un sous-groupe de Levi géométrique plus grand, tel que le caractère qu'on a considéré provienne d'un caractère du groupe $L'(\mathbb{F}_q)$ rendu abélien. Donc, la maximalité de la même façon.

Et à ce moment-là, on prend cette fonction, de R à V_l , de cette représentation de dimension 1, tensorielle, une représentation unipotente. Donc, on a cette symétrie parfaite entre les deux côtés. On parle plus ou moins de ça.

Ah, oui. Donc, ce qu'on obtient est soit une représentation irréductible, soit l'opposé d'une représentation irréductible, parce que toutes ces représentations sont... Et le signe qu'il faut, c'est la différence des rangs déployés du groupe $GL(n)$ et du Levi géométrique. Moins 1 exposant.

Donc, ça, c'est ce qui se passe pour $GL(n)$. J'aimerais quand même dire un petit peu plus sur les représentations unipotentes. Dans le cas de GL_n .

1. BF_q sous groupe de Borel sur le corps fini.

Donc, on a vu qu'elles sont indexées par la représentation de groupes symétriques. Donc, l'habitude maintenant, c'est de regarder ces représentations comme indexées par les partitions de n . Mais si on regarde les anciens articles de Frobenius, Frobenius procède différemment. Au lieu de considérer une partition de n , Frobenius considère une suite... Oui, zéro.

Frobenius considère une suite strictement croissante. Et la façon dont on passe de l'un à l'autre, si on a la partition qui correspond à une représentation, ce que Frobenius considérera, c'est $\lambda_1, \lambda_2 + 1, \lambda_3 + 2$, etc., le minimum qu'il faut pour rendre la suite strictement croissante. Il faut faire attention toutefois que dans la partition, on aurait le droit de prendre un 1 qui est zéro.

On peut mettre des zéros devant tant qu'on veut. Et ça correspond à des μ qui sont différents. Donc un tel μ qui est un disque, un disque, une représentation, doit être considéré comme équivalent à... considérer quelque chose d'un peu plus long, où on aura zéro, et puis $\mu_1 + 1, \mu_2 + 1$, jusqu'à $\mu_i + 1$. Donc on a cette notion de décalage qui augmente de 1 à la longueur de cette suite strictement croissante.

C'est assez similaire, et en fait, dans les démonstrations de Frobenius, c'est tout à fait lié. Ça correspond un peu au fait que dans la représentation d'un groupe réductif sur les complexes, une façon d'indexer les choses, c'est par le poids dominant. Mais souvent, il est plus commode d'employer λ plus ρ , le poids dominant plus la demi-somme des racines positives, et ça donne des formules souvent beaucoup plus... La formule d'Hermann Weyl pour la dimension est beaucoup plus jolie si on regarde $\lambda + \rho$ plutôt que λ . Alors, la formule de la dimension des représentations de groupes symétriques de Frobenius s'écrit très bien, mieux en termes des μ que des λ . On a le produit des $\mu_j - \mu_i$, i , le petit j , factorielle n , divisé par le produit des μ_i factorielle.

Alors, la raison pour laquelle j'explique ça, c'est que si on considère les représentations unipotentes qui, donc, s'obtiennent en prenant $\text{int } B_V$ de 1, sur lequel on en a d'une part l'algèbre de $H(C)$ qui a vu, et d'autre part le groupe $V_l(n)$ qui a vu, et que la correspondance étant... Disons que cette induite est la somme de représentations tensorielles d'une représentation correspondante, c'est ce qu'il donne le dictionnaire. Il y a lieu de penser à cette situation comme une déformation du cas où on prend la représentation régulière de S_n , avec S_n qui a vu par multiplication à droite, ainsi que par multiplication à gauche. Et de ce point de vue-là, on s'attend à ce que la formule pour la dimension d'une représentation unipotente correspondant à une partition ou à une suite strictement croissante comme cela, soit donnée par une q -déformation de la formule qu'on a pour la dimension de la représentation, et c'est ce qui se passe.

On a comme formule i plus petit que V , $q\mu_i V - q\mu_i I$ ($\prod_{i < j} (q^{\mu_i} - q^{\mu_j} / \dots)$). Oui, l'analogue... Oui, alors je dois définir factoriel d'un entier au sens q comme étant $(q^x - 1)/(q - 1)$. Alors, le q -analogue de la factorielle divisé par le produit, comme on a les factorielles ici, de $\mu_i I$ q -analogue, divisé par une puissance de q que je vais noter là, et que ce n'est pas la peine que je l'écrive. Et pour d'autres groupes, on aura aussi des notions de représentation unipotentes, et pour les groupes classiques, c'est un peu le type de formule qui apparaîtra pour les formules de dimension. Et aussi pour la classification, il est crucial d'utiliser non pas le point de vue des partitions, mais celui des suites strictement croissantes pour indexer la représentation de groupes symétriques ou d'autres groupes.

Oui. Oui, pour E_7 et E_8 , pour éliminer ça, il faut fixer une addition de la $\sqrt{q}$. Et bien sûr, dans le domaine, quand on prend la représentation. Mais c'est seulement... J'avais un peu trompé, mais c'est seulement quelques représentations pour E_7 et E_8 , où ça se passe.

Une deuxième surprise que j'ai eue, c'est que si on compare, pour un groupe réductif général maintenant, la classification des classes de conjugaison et la classification des représentations irréductibles, pour les classes de conjugaison, ça devient assez pénible dans les petites caractéristiques. On a, par exemple, des horreurs, par exemple, pour le groupe symplectique, sur le corps à deux éléments, qu'il y a des éléments unipotents. Si on prend leur centralisateur, d'abord, le centralisateur n'est pas connect, ce n'est pas une catastrophe, mais en plus, ils ne sont pas dans la composante neutre du centralisateur.

Et en général, pour les groupes classiques, la classification est très simple quand la caractéristique n'est pas deux, mais devient pénible en caractéristique deux. Et trois et cinq deviennent pénibles aussi pour V_2 et puis les groupes de type E . $\mathbb{F}_4$ aussi, V_2 . Par contre, la classification des représentations est tout à fait uniforme en q , sans ce problème d'exception pour les petites caractéristiques.

Je voudrais expliquer le schéma général pour la classification donnée par Lusztig et je me limiterai au cas d'un groupe à centre connexe. Il y a des ambiguïtés pénibles dans le cas où le centre n'est pas connexe. D'abord, j'avais dit que pour VL_n , on a la décomposition de Jordan d'un côté et un analogue pour les représentations.

On a la même chose pour les représentations, donc un analogue qui permet de séparer la classification en classification de quelque chose qui correspond à des éléments semi-simples et quelque chose qui correspond à des éléments unipotents. D'abord, il faut dire ce que sont les représentations unipotentes. Dans le cas de $GL(n)$, il suffisait de prendre l'induit de 1 du Borel.

Ça ne suffit pas ici. On doit considérer, pour tous les tores maximaux du groupe, qui sont les autres groupes de levée géométrique...

On doit considérer, pour tous les tores maximaux du groupe, qui sont les autres groupes de Levi géométriques, le ... d'induites de Lusztig, du tore à V , de la représentation triviale. Ces représentations sont virtuelles, d'une part, elles ne sont pas irréductibles, et il faut les prendre toutes.

Donc, parmi celles-là, si je pense aussi au cas d'un groupe déployé, d'abord, on a l'induite BV de 1, et ceci ne fournit qu'une partie des représentations. Et ce qui apparaît dans l'induite du Borel, elle correspond essentiellement à ce que Grothendieck prédisait, à la classification des représentations de groupes de $GL(n)$, et pour les groupes classiques, ça se ramène à des classifications de représentations de groupes symétriques. En fait, si on prend le cas type B ou C , la représentation correspond à... Il faut décomposer le rang n en $n' + n''$, une représentation de $S_{n'}$, une représentation de $S_{n''}$, et ça, ça donne la classification.

Et donc, on a plus, qui ont une description quelque peu similaire. Ce qui va se passer, c'est que toutes ces représentations ont une dimension qui est polynomiale en q . La classification est indé-

pendante du corps phénique qu'on prend. Donc, si on a représentation 1, on a dimension égale polynome en q . Et ce qui se passe, c'est que ce polynome se spécialise en la dimension d'une représentation de groupe de $GL(n)$ quand ça provient de ces représentations-là.

Pour les autres, ce qu'on aura, c'est que la valeur de p en 1 est égale à zéro. Ce qui en a sens. Explique qu'elle n'apparaisse pas là.

Donc, on a cette notion de représentation unipotente avec une classification. Maintenant, pour expliquer ce qu'est la décomposition de Jordan de la théorie de Lusztig, il faut que j'introduise le groupe dual. Alors, cette notion de groupe dual, ça a été introduit par Langlands dans le cas groupe réel ou péadique.

Et le groupe qu'il définit est un groupe complexe. Ici, c'est, ayant plutôt qu'un groupe complexe, une extension d'un groupe de Galois par un groupe complexe. Ici, la situation est inspirée par Langlands et différente.

On part d'un groupe V sur $\mathbb{F}_q$ réductif et on va obtenir un autre groupe sur $\mathbb{F}_q$. Et plutôt que de parler juste de groupe, il faut mieux rigidifier la situation pour que la classification devienne purement combinatoire. Donc, mon groupe V sur $\mathbb{F}_q$, je veux fixer un tore.

Un sous-groupe de Borel, dont T est le sous-groupe de Levi. Et un épinglage. Ça, ça permet de rigidifier encore plus.

Quand le groupe n'est pas déployé par épinglage, je veux dire un épinglage sur une extension qui déploie le groupe, qui est invariante par Galois. Et un groupe épinglé ainsi donne lieu, d'une part, au groupe des caractères du tore sur la clôture algébrique. Le groupe des sous-groupes a un paramètre sur la clôture algébrique.

Les deux groupes sont en dualité. On a un système de racines donné par les racines et les coracines, respectivement, dans X et Y . Et en plus, on a Frobenius qui est un V . Le groupe V étant sur $\mathbb{F}_q$, si on passe à la clôture algébrique, on a un endomorphisme de Frobenius du groupe qui induit un endomorphisme de Frobenius de T , qui induit un endomorphisme de Frobenius du groupe des sous-groupes à un paramètre, et aussi le transposé sur X . Et ces données-là déterminent complètement le groupe. Et pour avoir le dual, on permute simplement X et Y . Alors, les exemples standards, un groupe simplement connexe correspond à un groupe adjoint.

Si le centre est connexe, ce qui correspond au groupe dérivé simplement connexe... Oui, donc, ce groupe dual est sur $\mathbb{F}_q$ avec un tore, un Borel et un épinglage. Alors, la relation entre les deux groupes, c'est, d'une part, que les classes de conjugaison de tores maximaux se correspondent d'un groupe à l'autre. Avec dualité entre les tores correspondants.

Même chose pour les sous-groupes de Levi géométriques. Et une chose où il faut faire des choix un peu pénibles, que je fais une fois pour toutes, on choisit un isomorphisme entre le groupe multiplicatif de la culture algébrique du corps fini avec la partie première à p de $q \bmod z$, et pour le corps $\bar{q}l$, où sont les représentations, où c'est, on prend un isomorphisme des racines de l'unité avec

qmodz. Quand on a fait ça, ce qu'on avait, c'est que... certaines représentations sont indexées par des représentations de groupes de Weil avec une formule de dimension qui est un polynôme en q , et quand on prend la valeur en 1, on obtient la dimension d'une représentation de groupe de Weil. Alors, oui, j'ai dit que je supposais que le groupe était connexe.

Grâce à ça, le centralisateur, ici, sera connexe. Ça, sinon, on a des ennuis. Donc il faut se donner ça.

Maintenant, ici, on est du côté dual. Donc j'ai envie de repasser du côté... groupe. Alors, du côté groupe, on a le groupe dont $z(s)$ est le dual, et l'élément s correspond à un caractère... de ce groupe.

Et la classification complète, c'est qu'on se doit donner S et une représentation unipotente... de ce groupe. Qui n'est pas un sous-groupe, en général, du groupe V . Alors, dans le cas où ce Z de S est un sous-groupe de Levi, celui-ci sera aussi un sous-groupe de Levi, et la représentation qu'on veut obtenir est obtenue par cette induction de Lusztig, comme on a fait pour $GL(n)$. On prend le produit tensoriel de la représentation unipotente et de ce caractère, et on induit.

Je voudrais maintenant expliquer une troisième surprise. Non, ça ne sera pas un sous-groupe. Par exemple, si je pense à G_2 , dont le dual sera G_2 , l'un des sous-groupes qu'on peut obtenir, c'est un sous-groupe correspondant aux grandes racines.

Un sous-groupe A_2 . Et moralement, ça devrait être un sous-groupe... Le dual devrait être le sous-groupe de G_2 qui correspond aux petites racines, mais ça n'existe pas. Donc, on n'a pas jusqu'ici, de façon géométrique, de passé de représentation de ce groupe qui n'est pas un sous-groupe vers la représentation du groupe, sauf dans le cas où ce groupe est un sous-groupe de Levi.

Oui, ce n'est pas une construction directe. Alors, quand on a une variété algébrique sur un corps fini, et puis on prend X de F_q et on prend une fonction sur cet ensemble fini, je suis toujours très content quand cette fonction correspond à un faisceau éladique. Si on a un faisceau éladique F sur X de F_q , pour chaque point, on peut prendre la fibre du faisceau en un point géométrique correspondant, on a un endomorphisme d'ophtobénus, et on peut prendre sa trace.

Donc, on a cette construction pour passer d'un faisceau vers une fonction. Et plutôt qu'un faisceau, on peut prendre un complexe de faisceau ou un faisceau pervers. Le faisceau pervers, c'est ce qui sera utile.

Et il est très agréable qu'une fonction corresponde à un faisceau, parce que ça permet notamment... La fonction, on a une fonction sur X de F_q , on ne sait pas comment déduire une fonction sur X de F_{q^n} . Tandis que quand on a le faisceau, on a non seulement une fonction sur X de F_q , mais sur les points, sur toutes les extensions de F_q . Et si on a une fonction qui a une certaine signification, on peut essayer de comprendre la relation entre ce qui se passe sur F_q et sur une extension finie.

Alors... On peut vouloir appliquer ce désir au cas de $G(\mathbb{F}_q)$ avec G réductif. Et de nouveau, si on prend $GL(n)$, tout marche à merveille. Et ce n'est pas le cas pour d'autres groupes.

Pour les groupes unitaires, c'est vrai aussi. Donc, si je pense au cas de $GL(n)$, on a le groupe dual

qui est de nouveau $GL(n)$. Et la classification que j'avais donnée des représentations peut s'énoncer en disant qu'on a une correspondance naturelle une fois qu'on a choisi les isomorphismes de groupes de racines de l'unité avec quelques foses, les représentations correspondent naturellement aux classes de conjugaison dans le groupe dual.

On a d'une part, prendre un élément semi-simple, et d'autre part, les unipotents... Les représentations unipotentes correspondent à la classification d'éléments unipotents en $GL(n)$ par des partitions. Donc, pour $GL(n)$, pour chaque représentation correspond à un faisceau. Et du côté dual, si on a $GL(n)$ de F_q , ça s'injecte dans $SL(n)$ d'une extension de F_q .

Et... c'est compatible avec prendre le faisceau correspondant. Pour d'autres groupes, ce n'est pas pareil. Et je crois que ce qui est instructif, c'est que j'explique... Il y a deux façons dont les foses marchent différemment.

Je voudrais expliquer l'une des deux par l'exemple de $SL(2, \mathbb{F}_q)$, que je trouve assez instructif, avec q impair. Pour la plupart des représentations, on les obtient à partir d'une représentation de $V(l, 2)$ par restriction, simplement. Et donc là, comme pour $V(l, 2)$, on aura un faisceau correspondant à la représentation ici aussi.

Mais il y a certaines représentations de $V(l, 2)$ qui se coupent en deux quand on les restreint à $SL(2)$. Et c'est pour celles-là que les foses deviennent intéressantes. Donc il y a quatre représentations qu'il faut considérer en même temps, qui sont intéressantes.

On peut prendre l'induite du Borel au groupe d'un caractère... Oui, alors ici, le Borel... Ce sont les matrices comme ça. Le sous-groupe de Levi, c'est les matrices diagonales. Donc AB avec AB égale à 1. Et la donnée, pour faire l'induction, c'est un caractère... Donc ce groupe de Levi est isomorphe à F_q multiplicatif.

Et on va donc se donner un caractère de F_q multiplicatif. Et on veut d'ordre 2. Donc ça, c'est un de ceux qui est intéressant. Et donc ça se coupe en deux.

L'induite est de dimension $1 + q$, le nombre de points de la droite projective. Donc on a deux représentations de dimension $\frac{1+q}{2}$. L'autre, ça, c'est le tore déployé. On a aussi le tore non déployé, qui est le noyau de F_{q^2} multiplicatif, qui est un tore non déployé dans $GL(2)$, qu'on envoie par la norme correspondant au déterminant dans F_q multiplicatif.

Donc ceci, c'est un groupe cyclique d'ordre $q + 1$. Et on considère R , tore non déployé, vers $SL(q)$, du caractère d'ordre 2 de nouveau. L'induite de l'houstique est de dimension... Si je prends vraiment le R à la représentation virtuelle, on passe de l'un à l'autre, remplaçant q par $-q$. Et donc on a deux représentations de dimension $1 + q$. Deux représentations virtuelles de dimension $\frac{1-q}{2}$. Alors, si on regarde ça, ça a une sale tête pour correspondre... que le caractère correspond à un faisceau ℓ -adique, parce que déjà, en élément neutre, la dimension de la représentation, donc la valeur du caractère en l'élément neutre, soit $\frac{1+q}{2}$ ou $\frac{1-q}{2}$, ça ne ressemble vraiment pas à une trace d'infrobénus. Alors, il y a, avec un peu d'arbitraire, on a ces quatre représentations et on peut les indexer par cet modulo 2 fois cet modulo 2. Pour un ensemble à quatre éléments, il n'y a pas beaucoup de mérite.

Si j'en choisis une, je définis que la somme de deux autres, c'est la troisième qui manque, et j'ai un groupe C modulo 2 fois C modulo 2. Mais ce que je raconte a été fait par Bonnafé par les groupes $SL(n)$, où là, il faut être plus prudent pour comment indexer, dans certains cas, par C modulo n fois C modulo n . Maintenant, ce qu'on fait, on a cette famille de fonctions indexées par C modulo 2 fois C modulo 2 et on prend une transformée de Fourier. C'est peut-être l'appeler ça qui, le i , j . On prend la somme, $(-1)^{i'+j'}$. Donc, on a le groupe dual, c'est C modulo 2 fois C modulo 2 de nouveau fois $q(i, j)$. 1,5, pardon.

Grâce à ce 1,5, on a une situation évolutive. Et si on regarde déjà les dimensions, ça devient beaucoup plus sympathique. Donc, on a ces quatre représentations.

On peut faire soit la somme de tous les caractères et diviser par 2, soit 2 plus et 2 moins, et diviser par 2 aussi. Et on se demande ce qu'on obtient. Alors, pour les dimensions, si on fait la somme de tout le monde et qu'on divise par 2, on obtient 1. Je reprends la représentation virtuelle.

Si, au contraire, on prend la somme de ces deux ici, moins la somme de ces deux ici, et qu'on divise par 2, on obtient Q , ce qui est aussi quelque chose qui est raisonnable comme valeur propre de Frobenius. Si on prend la différence des deux et la différence des deux, là, on a zéro, ce qui est tout à fait raisonnable aussi. Et ce qui se passe, c'est que les fonctions qu'on obtient de cette façon-là correspondent à des faisceaux.

C'est la théorie des faisceaux caractères de Lusztig. Et donc, ça montre qu'il faut considérer ces quatre représentations comme un bloc. Et là, on comprend ce qui se passe avec une extension par un scalaire, de $\mathbb{F}_q$ à $\mathbb{F}_{q^n}$.

Oui, est-ce que j'ai le temps ? Non. Oui. Donc, c'est un exercice amusant de regarder les valeurs du caractère sur tous les autres éléments et de voir qu'effectivement, on obtient des faisceaux pervers et réductibles quand on prend cette transformée de Fourier.

Une chose que je devrais dire, c'est que ce qui se passe ici, si on passe au groupe dual, qui est $PSL(2)$, les caractères correspondent à des éléments semi-simples qui ne sont pas conjugués, mais qui deviennent conjugués quand on passe à la culture algébrique. Et le même genre de faux se passe pour $SL(n)$. Alors, ça, c'est une des façons dont les caractères ne sont pas des faisceaux.

Il y en a une autre, si on regarde uniquement les caractères unipotents. Là, on a la théorie de Lusztig, les groupes en paquets, qui sont indexés, dans le cas des groupes classiques, par un espace symplectique, par un vectoriel symplectique sur le corps à deux éléments. Alors, j'ai l'impression de revenir dans mon enfance.

HÉLÈNE ESNAULT : Il n'y a pas beaucoup de lumière. Revenir dans mon enfance, il n'y a pas beaucoup de lumière. Le micro ne marche pas très bien, mais ça fait rien, on peut poser des questions.

UN INTERVENANT : ... un exemple de faisceau. Ceux qui apparaissent pour... Oui, monsieur. Ça marche ?

PIERRE DELIGNE : Oui, ça marche.

Ceux qui apparaissent pour $SL(2)$, je peux dire. Donc... Disons... Si on regarde sur les éléments semi-simples, là, pour les caractères, on a le tore déployé, le tore non déployé. Ah, merci.

Et pour un des... des caractères, on aura caractères d'ordre 2 et 0. Pour l'autre, 0 et ordre 2. Et quand on met les choses ensemble avec cette transformée de Fourier, ce qu'on obtient, génériquement, c'est qu'on a l'application du groupe dans lui-même par élévation au carré. Et on prend l'image directe du faisceau. C'est un revêtement double, génériquement.

Et on prend le faisceau de rang 1 correspondant. Ici, on aura tous des faisceaux de rang 1. Un autre, c'est le même, translaté par un élément du centre. Et on en a encore deux autres.

Il faut que je raconte un peu un autre cas. On a la variété des éléments unipotents, qui est comme un cône quadratique. Et la même fois moins un.

Sur ce cône quadratique, on a moins l'origine, on a un revêtement double, parce que le cône quadratique, ce sont ces deux modules plus ou moins un. Et donc, on a un système local de rang 1 qui apparaît naturellement, dont on prend le prolongement intermédiaire par 0, ou bien le même translaté par moins un. Dans le cas que je vais raconter, c'est ça, les quatre faisceaux qui apparaissent.

Plus d'autres questions ? Si ce n'est pas le cas, on remercie Pierre.

[Applaudissements]