Problèmes du Millenium : L'hypothèse de Riemann

Enrico Bombieri

I. Le problème. La fonction zeta de Riemann est la fonction de la variable complexe s, définie sur le demi-plan [1] $\mathfrak{R}(s) > 1$ par les séries absolument convergentes

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

et dans le plan complexe entier $\mathbb{C}$ par prolongement analytique. Comme montré par Riemann, $\zeta(s)$ s'étend à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe avec un seul pôle simple en $s = 1$, avec résidu 1, et satisfait l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{1}$$

Dans un mémoire illustre publié en 1859, Riemann [Ri] obtient une formule analytique pour le nombre de nombres premiers jusqu'à une certaine limite. Cette formule est exprimée en fonction des zéros de la fonction zeta, c'est-à-dire en fonction des solutions $\rho \in \mathbb{C}$ de l'équation $\zeta(\rho) = 0$.

Dans son article, Riemann introduit la fonction de la variable complexe t définie par

$$\xi(t) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

avec $s = \frac{1}{2} + it$, et montre que $\xi(t)$ est une fonction entière paire de t dont les zéros ont leur partie imaginaire comprise entre $-i/2$ et $i/2$. Il établit alors, en fournissant la preuve, que dans le domaine entre 0 et T, la fonction $\xi(t)$ a environ $(T/2\pi)log(T/2\pi) - T/2\pi$ zéros. Riemann continue alors "Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind,", ce qui peut être traduit par "En effet, on trouve entre ces limites environ ce nombre de zéros réels, et il est vraisemblable que tous les zéros soient réels.".

L'assertion que tous les zéros de la fonction $\xi(t)$ sont réels est l'hypothèse de Riemann.

La fonction $\zeta(s)$ a des zéros aux entiers pairs négatifs -2, -4,... et on les appelle les *zéros triviaux*. Les autres zéros sont les nombres complexes $\frac{1}{2} + i\alpha$, où α est un zéro

Traduction de la description du problème Clay consultable ici : https://www.claymath.org/sites/default/files/official$_{problem}$$_{d}$escription.pdf.

1. Nous notons $\mathfrak{R}(s)$ et $\mathfrak{I}(s)$ les parties réelle et imaginaire des variables complexes. L'utilisation de la variable s est déjà présente dans le travail célèbre de Dirichlet de 1837 sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

de $\xi(t)$. Ainsi, de la fonction $\zeta(s)$, nous pouvons dire l'

Hypothèse de Riemann. *Les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ ont une partie réelle égale à $\frac{1}{2}$.*

Selon de nombreux mathématiciens, l'hypothèse de Riemann, et son extension aux classes générales de fonctions L, est probablement le problème ouvert le plus important des mathématiques actuelles.

II. Histoire et signification de l'hypothèse de Riemann. Pour des références appartenant à l'histoire du début des fonctions zeta et la théorie des nombres premiers, nous renvoyons à Landau [La] et Edwards [Ed].

La connexion entre les nombres premiers et la fonction zeta, par le célèbre *produit d'Euler*

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

valide pour $\Re(s) > 1$, apparaît pour la première fois dans le livre d'Euler *Introductio in Analysis Infinitorum*, publié en 1748. Euler a aussi étudié les valeurs de $\zeta(s)$ aux nombres entiers positifs pairs et aux nombres entiers négatifs, et il a deviné une équation fonctionnelle, équivalente à l'équation fonctionnelle de Riemann, pour la fonction qui lui est liée de façon proche $\sum(-1)^{n-1}/n^s$ (voir un compte-rendu intéressant du travail d'Euler dans le livre de Hardy [Hard]).

Le problème de la distribution des nombres premiers a été étudié attentivement pour la première fois par Gauss et Legendre, à la fin du XVIII^ème siècle. Gauss, dans une lettre à l'astronome Hencke en 1849, affirme qu'il avait trouvé dans ses jeunes années que le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers jusqu'à x est bien approché par la fonction [2]

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$$

En 1837, Dirichlet prouva son fameux théorème de l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique $qn + a$ avec q et a deux entiers positifs premiers entre eux.

Le 24 mai 1848, Tchebychev lut à l'Académie de Saint-Petersbourg son premier mémoire sur la distribution des nombres premiers, publié plus tard en 1850. Il contient la première étude de la fonction $\pi(x)$ par des méthodes analytiques.

2. L'intégrale est une valeur principale au sens de Cauchy.

Tchebychev commence par prendre le logarithme du produit d'Euler, obtenant [3]

$$-\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)+\log(s-1)=\log((s-1)\zeta(s)), \tag{2}$$

qui est son point de départ.

Ensuite, il prouve la formule intégrale

$$\zeta(s)-1-\frac{1}{s-1}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}\right)e^{-x}x^{s-1}dx, \tag{3}$$

dont il déduit que $(s-1)\zeta(s)$ a pour limite 1, et a également des dérivées finies de tous ordres, lorsque s tend vers 1 depuis la droite (par-dessus). Il observe alors que la dérivée de n'importe quel ordre du côté gauche de l'égalité (2) peut s'écrire comme une fraction dans laquelle le numérateur est un polynôme en les dérivées de $(s-1)\zeta(s)$, et le dénominateur est une puissance entière de $(s-1)\zeta(s)$, d'où il découle que le côté droit de l'égalité (2) a des dérivées finies de tous ordres, lorsque s tend vers 1 par la droite. De cela, il est capable de prouver que s'il y a une formule asymptotique pour $\pi(x)$ au moyen d'une somme finie $\sum a_k x/(\log x)^k$, jusqu'à un ordre $O(x/(\log x)^N)$, alors $a_k=(k-1)!$ pour $k=1,...,N-1$. Ceci est précisément l'expansion asymptotique de la fonction $\mathrm{Li}(x)$, ce qui corrobore l'intuition de Gauss.

Un second article de Tchebychev donne des preuves rigoureuses des bornes explicites supérieure et inférieure pour $\pi(x)$, de l'ordre de grandeur correct. Ici, il introduit les fonctions de comptage

$$\vartheta(x)=\sum_{p\leq x}\log p, \qquad \psi(x)=\vartheta(x)+\vartheta(\sqrt[2]{x})+\vartheta(\sqrt[3]{x})+\ldots$$

et prouve l'identité [4]

$$\sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=\log[x]!.$$

De cette identité, il obtient finalement des bornes numériques supérieure et inférieure pour $\psi(x),\vartheta(x)$ et $\pi(x)$.

Les variantes populaires de la méthode de Tchebychev, basées sur le caractère entier ou non de rapports adéquats de factorielles, ont été utilisées plus tard et ne peuvent être attribuées à Tchebychev.

---

3. Tchebychev utilise $1+\rho$ à la place de notre s. Nous écrivons ses formules en notation moderne.
4. Ici $[x]$ dénote la partie entière de x.

Le mémoire de Riemann sur $\pi(x)$ est vraiment étonnant pour la nouveauté des idées qu'il introduit. Il écrit d'abord $\zeta(s)$ en utilisant la formule de l'intégrale, valide pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx, \tag{4}$$

et alors il déforme le contour d'intégration dans le plan complexe, de manière à obtenir une représentation valide pour tout s. Cela donne le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$. Ensuite, il donne une seconde preuve de l'équation fonctionnelle selon la forme symétrique (1), il introduit la fonction $\xi(t)$ et il établit quelques-unes de ses propriétés comme fonction de la variable complexe t.

Riemann continue en écrivant le logarithme du produit Eulérien comme une transformation d'intégrale, valide pour $\Re(s) > 1$:

$$\frac{1}{s} \log \zeta(s) = \int_1^\infty \prod(x) x^{-s-1} dx \tag{5}$$

où

$$\prod(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt[2]{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dots$$

Par inversion de Fourier, il est capable d'exprimer $\prod(x)$ comme une intégrale complexe, et de la calculer en utilisant le calcul des résidus. Il y a des résidus au niveau des singularités de $\log \zeta(s)$ en $s = 1$ et aux zéros de $\zeta(s)$. Finalement, une formule d'inversion exprimant $\pi(x)$ en fonction de $\prod(x)$ amène à la formule de Riemann.

Ce fut un résultat remarquable qui attira immédiatement beaucoup d'attention. Même si la ligne d'attaque initiale de Riemann a pu être influencée par Tchebychev (on trouve des références explicites à Tchebyehev dans le Nachlass [5] non publié de Riemann), sa grande contribution a été de voir comment la distribution des nombres premiers est déterminée par les zéros complexes de la fonction zeta.

Au premier abord, l'hypothèse de Riemann apparaît seulement comme une propriété intéressante plausible de la fonction spéciale $\zeta(s)$, et Riemann lui-même semble de cet avis. Il écrit : “Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen ; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien,” que l'on peut traduire par “Il serait sans aucun doute souhaitable d'avoir une preuve rigoureuse de cette proposition ; pourtant j'ai laissé cette recherche

5. Le Nachlass contient les articles et notes non publiés de Riemann et il est conservé dans la bibliothèque mathématique de l'Université de Gottingen. La partie concernant la fonction effective a finalement été étudié en profondeur par C. L. Siegel [Sie].

de côté pour l'instant après quelques tentatives rapides infructueuses, parce qu'elle semble ne pas être nécessaire au but immédiat de mon étude.".

D'un autre côté, on ne devrait pas tirer de ce commentaire la conclusion que l'hypothèse de Riemann était seulement une remarque occasionnelle d'un intérêt mineur pour lui. La validité de l'hypothèse de Riemann équivaut à dire que la déviation du nombre de nombres premiers du terme moyen $\mathrm{Li}(x)$ est

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\log x);$$

Le terme d'erreur ne peut pas être beaucoup amélioré, puisqu'on sait qu'il oscille dans les deux directions d'un ordre de grandeur au moins égal à $\mathrm{Li}(\sqrt{x})\log\log\log x$ (Littlewood). Quand on voit les commentaires de Riemann à la fin de son mémoire à propos de l'approximation de $\pi(x)$ par $\mathrm{Li}(x)$, il est assez vraisemblable qu'il avait vu combien son hypothèse était centrale pour permettre d'évaluer la qualité de l'approximation de $\pi(x)$ que l'on peut obtenir à partir de cette formule.

L'invalidation de l'hypothèse de Riemann provoquerait des ravages dans la distribution des nombres premiers. Ce fait à lui seul fait de l'hypothèse de Riemann la principale question ouverte en théorie des nombres premiers.

L'hypothèse de Riemann est devenue un problème central de mathématiques pures, pas seulement du fait de ses conséquences fondamentales sur la loi de distribution des nombres premiers. Une raison est que la fonction zeta de Riemann n'est pas un objet isolé, elle est plutôt le prototype d'un ensemble plus général de fonctions, appelées *fonctions L*, associées à des objets algébriques (les représentations automorphes) ou arithmétiques (les variétés arithmétiques) ; nous les appellerons les *fonctions L globales*. Ce sont des séries de Dirichlet avec un produit Eulérien adéquat et on s'attend à ce qu'elles satisfassent une équation fonctionnelle appropriée et une hypothèse de Riemann. Les facteurs du produit Eulérien peuvent aussi être considérés comme des fonctions zeta d'un certain type de nature locale, et ils devraient aussi satisfaire une hypothèse de Riemann appropriée (appelée la propriété de Ramanujan). Les propriétés les plus importantes des objets algébriques ou arithmétiques sous-tendant une fonction L peuvent ou devraient pouvoir être décrits en fonction de la localisation des zéros et des pôles, et des valeurs en certains points spéciaux.

Les conséquences d'une hypothèse de Riemann pour les fonctions L globales sont importantes et variées. Nous mentionnons ici, pour indiquer la variété des situations auxquelles elle peut être appliquée, une forme effective extrêmement forte du théorème de densité de Tchebotarev pour les corps de nombres, la représentabilité non triviale de 0 par une forme cubique non singulière en 5 variables ou plus (en supposant qu'elle satisfiait les conditions appropriées de congruences nécessaires à sa solubilité, Hooley), et le test déterministe de primalité en temps polynomial de Miller. D'un autre côté, de nombreux résultats profonds de théorie des nombres qui sont des conséquences d'une hypothèse de Riemann généralisée peuvent être montrés comme étant valides indépendamment d'elle, ajoutant ainsi un poids considérable à la validité de la conjecture.

Il est en dehors du champ de cet article de résumer la définition des fonctions L globales, on se reportera à ce sujet à Iwaniec et Sarnak [IS] pour une étude des propriétés qu'elles sont attendues de satisfaire ; il suffit de dire ici que l'étude des propriétés analytiques de ces fonctions présente d'extraordinaires difficultés.

Déjà, le prolongement analytique des fonctions L en fonctions méromorphes ou entières est seulement connu dans des cas spéciaux. Par exemple, l'équation fonctionnelle pour la fonction L d'une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ et pour ses torsions par des caractères de Dirichlet est une conséquence facile de l'existence d'une paramétrisation de la courbe au moyen de fonctions modulaires pour un groupe de Hecke $\Gamma_0(N)$ (elle lui est équivalente) ; la difficulté réelle consiste à établir cette modularité. Personne ne sait comment prouver cette équation fonctionnelle par des méthodes analytiques, mais la modularité des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ a été établie directement, d'abord dans le cas semi-stable dans le travail spectaculaire de Wiles [Wi] et de Taylor et Wiles [TW] amenant la résolution du dernier théorème de Fermat, et ensuite dans le cas général dans une pré-publication récente de Breuil, Conrad, Diamond et Taylor.

Toutes les fonctions L ne sont pas directement associées à des objets arithmétiques ou géométriques. L'exemple le plus simple de fonctions L qui ne soient ni de nature arithmétique ni de nature géométrique sont celles qui découlent de formes d'ondes de Maass d'une surface de Riemann X uniformisée par un sous-groupe arithmétique Γ de $PGL(2,\mathbb{R})$. Ce sont des pullbacks $f(z)$ vers le recouvrement universel $\Im(z) > 0$ de X des fonctions propres simultanées pour l'action du Laplacien hyperbolique et des opérateurs de Hecke sur X.

Le cas le plus important est à nouveau le groupe $\Gamma_0(N)$. Dans ce cas, on introduit une notion de forme d'onde *primitive*, analogue à la notion de caractère primitif de Dirichlet, signifiant que la forme d'onde n'est pas induite par une autre forme d'onde pour un $\Gamma_0(N')$ avec N' un diviseur propre de N. Pour une forme d'onde primitive, l'action des opérateurs de Hecke T_n, est définie pour tout n, et la fonction L peut être définie comme $\sum \lambda_f(n)n^{-s}$, où $\lambda_f(n)$ est la valeur propre de T_n agissant sur la forme d'onde $f(z)$. Une telle fonction L a un produit Eulérien et satisfait l'équation fonctionnelle analogue à celle de $\zeta(s)$. On s'attend aussi à ce qu'elle satisfasse l'hypothèse de Riemann.

Pas un seul exemple de validité ou d'échec de l'hypothèse de Riemann n'est connu à ce jour pour une fonction L. L'hypothèse de Riemann pour $\zeta(s)$ ne semble pas être plus facile que pour les fonctions L de Dirichlet (excepté éventuellement pour les zéros non-triviaux réels), ce qui amène à penser que sa solution peut nécessiter d'attaquer des problèmes plus généraux, au moyen d'idées entièrement nouvelles.

III. Evidence de l'hypothèse de Riemann. Nonobstant quelque scepticisme exprimé dans le passé, et peut-être à cause du nombre de tentatives infructueuses d'obtenir une preuve plutôt que de solides heuristiques, il est juste de dire qu'aujourd'hui, il y a un peu d'évidence en sa faveur. Nous avons déjà insisté sur le fait que l'hypothèse de Riemann générale est consistante avec notre connaissance actuelle en théorie des nombres. Il y a aussi une évidence spécifique d'une nature plus directe, que nous allons examiner maintenant.

Premièrement, voyons l'évidence numérique forte.

D'une manière suffisamment intéressante, les premiers calculs numériques des premiers zéros de la fonction apparaissent déjà dans le Nachlass de Riemann. Une vérification numérique de l'hypothèse de Riemann dans un intervalle donné peut être effectuée de la façon suivante. Le nombre $N(T)$ de zéros de $\zeta(s)$ dans le rectangle $\mathcal{R}$ de sommets en $-1-iT, 2-iT, 2+iT, -1+iT$ est donnée par l'intégrale de Cauchy

$$N(T)-1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)ds,$$

si T n'est pas la partie imaginaire d'un zéro (le -1 du côté gauche de cette formule est dû au pôle simple de $\zeta(s)$ en $s=1$). La fonction zeta et ses dérivées peut être calculée avec une précision arbitraire en utilisation la formule de sommation de MacLaurin ou la formule de Riemann-Siegel [Sie] ; la quantité $N(T)-1$, qui est une entier, est alors calculée exactement en divisant par $2\pi i$ l'évaluation numérique de l'intégrale, et en arrondissant sa partie réelle, à l'entier le plus proche (ceci est seulement d'un intérêt théorique, et de bien meilleures méthodes existent en pratique pour calculer $N(T)$ exactement). D'un autre côté, puisque $\xi(t)$ est continue et réelle pour t réelle, il y aura un zéro d'ordre impair entre n'importe quels deux points entre lesquels $\xi(t)$ change de signe. En choisissant judicieusement les points en question, on peut détecter les changements de signe de $\xi(t)$ dans l'intervalle $[-T,T]$. Si le nombre de changements de signe est égal à $N(T)$, on en conclut que tous les zéros de $\zeta(s)$ dans $\mathcal{R}$ sont simples et satisfont l'hypothèse de Riemann. De cette manière, il a été démontré par van de Lune, te Riele et Winter [LRW] que les 1.5 billions premiers zéros de $\zeta(s)$, ordonnés par parties imaginaires positives croissantes, sont simples et satisfont l'hypothèse de Riemann.

L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion que tous les maxima locaux de $\xi(t)$ sont positifs et que tous les minima locaux sont négatifs, et il a été suggéré que si un contre-exemple existe, alors il devrait se trouver au voisinage des pics inhabituellement élevés de $\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right|$. Le domaine ci-dessus pour T est $T \cong 5\times 10^8$

et n'est pas assez grand pour que $\left|\zeta(\frac{1}{2}+it)\right|$ montre de tels pics, dont on sait qu'ils peuvent éventuellement exister. De plus, les calculs effectués par Odlyzko [Od] dans des intervalles particuliers montrent que l'hypothèse de Riemann est vérifiée pour plus de 3×10^8 zéros plus grands que [6] 2×10^{20}. Ces calculs corroborent également fortement des conjectures indépendantes de Dyson et Montgomery [Mo] concernant la distribution des intervalles entre les zéros.

Calculer les zéros de fonctions L est plus difficile, mais cela a été fait dans plusieurs cas, incluant des exemples de fonctions L de Dirichlet, de fonctions L de courbes elliptiques, de fonctions L de Maass et de fonctions L non abéliennes d'Artin qui proviennent des corps de nombres de petit degré. Aucune exception à l'hypothèse générale de Riemann n'a été trouvée de cette manière.

Deuxièmement, il est connu que d'éventuelles exceptions à l'hypothèse de Riemann doivent être rares si l'on s'éloigne de la droite $\mathfrak{R}(s) = \frac{1}{2}$.

Soit $N(\alpha, T)$ le nombre de zéros de $\zeta(s)$ dans le rectangle $\alpha \leq \mathfrak{R}(s) \leq 2$, $0 \leq \mathfrak{I}(s) \leq T$. Le résultat prototype remonte à Bohr et Landau en 1914, notamment $N(\alpha, T) = O(T)$ pour tout α fixé tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Une amélioration significative du résultat de Bohr et Landau a été obtenu par Carlson en 1920, qui a démontré le *théorème de densité* $N(\alpha, T) = O(T^{4\alpha(1-\alpha)+\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. Le fait que l'exposant ici soit strictement plus petit que 1 est important pour les applications arithmétiques, par exemple dans l'étude des nombres premiers dans de petits intervalles. L'exposant dans le théorème de Carlson a été plusieurs fois précisé pour différents domaines de α, en particulier pour le domaine $\frac{3}{4} < \alpha < 1$. Curieusement, le meilleur exposant connu jusqu'à aujourd'hui dans le domaine $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{4}$ reste l'exposant de Ingham $3(1-\alpha)/(2-\alpha)$, obtenu en 1940. Pour des références de ces résultats, le lecteur peut consulter la révision récente par Heath-Brown de la monographie classique de Titchmarsh [Ti], et le livre d'Ivič [Iv].

Troisièmement, il est connu que plus de 40% des zéros non-triviaux de $\zeta(s)$ sont simples et satisfont l'hypothèse de Riemann (Selberg [Sel], Levinson [Le], Conrey [Conr]). La plupart de ces résultats ont été étendus à d'autres fonctions L, incluant toutes les fonctions L de Dirichlet et les fonctions L associées à des formes modulaires ou à des formes d'onde de Maass.

IV. Evidence renforcée : Variétés sur des corps finis. On peut dire que la meilleure évidence en faveur de l'hypothèse de Riemann découle de la théorie correspondante, qui a été développée dans le contexte des variétés algébriques sur des corps

6. Les calculs les plus récents d'Odlyzko, qui arrivent bientôt à terme, exploreront complètement l'intervalle $[10^{22}, 10^{22} + 10^{10}]$.

finis. La situation la plus simple est la suivante.

Appelons C une courbe non-singulière projective sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p avec $q = p^a$ éléments. Soit $\mathrm{Div}(C)$ le groupe additif des diviseurs de C défini sur $\mathbb{F}_q$, ou en d'autres termes, des sommes finies formelles $\mathfrak{a} = \sum a_i P_i$, avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et P_i points de C définies sur une extension finie de $\mathbb{F}_q$, telles que $\phi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ où ϕ est l'endomorphisme de Frobenius sur C élevant les coordonnées à la puissance q. La quantité $\deg(\mathfrak{a}) = \sum a_i$ est le degré du diviseur $\mathfrak{a}$. Le diviseur $\mathfrak{a}$ est dit effectif si tout a_i est un entier positif ; dans ce cas, nous écrivons $\mathfrak{a} > 0$. Finalement, un diviseur premier $\mathfrak{p}$ est un diviseur positif qui ne peut pas être exprimé comme une somme de deux diviseurs positifs. Par définition, la norme d'un diviseur $\mathfrak{a}$ est $N\mathfrak{a} = q^{\deg(\mathfrak{a})}$.

La fonction zeta de la courbe C, telle que définie par E. Artin, H. Hasse et F.K. Schmidt, est

$$\zeta(s, C) = \sum_{\mathfrak{a}>0} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}.$$

Cette fonction a un produit Eulérien

$$\zeta(s, C) = \prod_{\mathfrak{p}} (1 - N\mathfrak{p}^{-s})^{-1}$$

et une équation fonctionnelle

$$q^{(g-1)s}\zeta(s, C) = q^{(g-1)(1-s)}\zeta(1 - s, C),$$

où g est le genre de la courbe C ; ceci est une conséquence du théorème de Riemann-Roch. La fonction $\zeta(s, C)$ est une fonction rationnelle de la variable $t = q^{-s}$ et est donc périodique [7] de période $2\pi i/\log q$ et a des pôles simples en les points $s = 2\pi i m/\log q$ et $s = 1 + 2\pi i m/\log q$ pour $m \in \mathbb{Z}$. Exprimée en fonction de la variable t, la fonction zeta devient une fonction rationnelle $Z(t, C)$ de t, avec des pôles simples en $t = 1$ et $t = q^{-1}$. L'utilisation de la variable t, plutôt que q^{-s}, est plus naturelle dans le cas géométrique et nous appellerons fonctions Zeta, avec un Z majuscule, les objets correspondant.

L'hypothèse de Riemann pour $\zeta(s, C)$ est l'assertion que tous ses zéros ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$; cela correspond pour la fonction Zeta $Z(t, C)$, qui a un numérateur de degré $2g$, au fait que ses zéros ont pour valeur absolue $q^{-1/2}$.

Ceci est très facile à vérifier si $g = 0$, parce que le numérateur est 1. Pour $g = 1$, une preuve a été obtenue par Hasse en 1934. Le cas général pour le genre arbitraire a finalement été établi par Weil dans le début des années 1940 (voir sa lettre à E. Artin

7. De façon similaire, $\zeta(s)$ est presque périodique dans le demi-plan $\Re(s) \geq 1 + \delta, \delta > 0$.

du 10 juillet 1942, où il donne un croquis complet de la théorie des correspondances sur une courbe [We1]) ; ses résultats furent finalement publiés sous forme de livre en 1948 [We2].

A travers ses recherches, Weil a été amené à la formulation de conjectures générales à propos des fonctions Zeta de variétés algébriques générales sur des corps finis, reliant leurs propriétés à la structure topologique de la variété algébrique qui les sous-tend. Ici, l'hypothèse de Riemann, sous une forme simplifiée, est l'assertion que les réciproques des zéros et des pôles de la fonction Zeta (appelées *racines caractéristiques*) ont pour valeur absolue $q^{-d/2}$ avec d un entier positif ou nul, et sont interprétées comme les valeurs propres de l'automorphisme de Frobenius agissant sur la cohomologie de la variété. Après que M. Artin, A. Grothendieck, et J.-L. Verdier aient développé l'outil fondamental de la cohomologie étale, la preuve de l'hypothèse de Riemann correspondant aux fonctions Zeta de variétés arbitraires sur des corps finis a finalement été fournie par Deligne [Del1], [Del2]. Le théorème de Deligne peut certainement être considéré comme le couronnement des plus profondes réalisations des mathématiques du XX[ème] siècle. Ses applications nombreuses à la résolution de problèmes anciens en théorie des nombres, en géométrie algébrique et en mathématiques discrètes sont les témoins de l'importance de ces hypothèses de Riemann générales.

Selon notre opinion, ces résultats dans le domaine géométrique ne peuvent être considérés comme ne relevant pas de la compréhension de l'hypothèse classique de Riemann, ces analogies étant trop irrésistibles pour être carrément rejetées.

V. Toujours plus d'évidence : la formule explicite. Une généralisation conceptuelle importante de la formule explicite de Riemann pour $\pi(x)$, obtenue par Weil [We3] en 1952, offre un indice de ce qui peut continuer de se cacher derrière le problème.

Considérons la classe $\mathcal{W}$ des fonctions à variable complexe $f(x)$ de la demi-droite positive $\mathbb{R}_+$, continues et continûment différentiables sauf pour un nombre fini de points pour lesquels à la fois $f(x)$ et $f'(x)$ présentent au plus une discontinuité de la première espèce, et auxquels les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies comme moyennes de leurs limites droite et gauche à cet endroit. Supposons également qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) = O(x^\delta)$ lorsque $x \to 0+$ et $f(x) = O(x^{-1-\delta})$ lorsque $x \to +\infty$.

Désignons par $\widetilde{f}(s)$ la transformée de Mellin

$$\widetilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^s \frac{dx}{x},$$

qui est une fonction analytique de s pour $-\delta < \Re(s) < 1 + \delta$.

Pour la fonction zeta de Riemann, la formule de Weil peut être exprimée comme suit. Soit $\Lambda(n) = \log p$ si $n = p^a$ est une puissance d'un nombre premier p, et 0 sinon. On a la

Formule explicite. *Pour $f \in \mathcal{W}$, on a*

$$\widetilde{f}(0) - \sum_{\rho} \widetilde{f}(\rho) + \widetilde{f}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \left\{ f(n) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \right\} + (\log 4\pi + \gamma) f(1)$$
$$+ \int_1^{\infty} \left\{ f(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x} f(1) \right\} \frac{dx}{x - x^{-1}}$$

Ici la première somme est effectuée sur tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ et est comprise comme

$$\lim_{T \to +\infty} \sum_{|\Im(\rho)| < T} \widetilde{f}(\rho).$$

Dans son article, Weil a montré qu'il y a une formule correspondante de zeta pour les fonctions L d'un corps de nombres aussi bien que pour les fonctions Zeta des courbes sur les corps finis. Les termes dans le côté droit de l'équation peuvent être écrits comme une somme de termes de nature locale, associés aux valeurs absolues du corps de nombres sous-jacent, ou du corps de fonctions sous-jacent dans le cas d'un corps de caractéristique positive. De plus, dans le dernier cas, la formule explicite peut être déduite de la formule du point fixe de Lefschetz, appliquée à l'endomorphisme de Frobenius sur la courbe C. Les trois termes du côté gauche de l'équation, notamment $\widetilde{f}(0), \sum \widetilde{f}(\rho), \widetilde{f}(1)$, correspondent maintenant à la trace de l'automorphisme de Frobenius de la cohomologie l-adique de C (le terme intéressant $\sum \widetilde{f}(\rho)$ correspond à la trace sur H^1), alors que le côté droit correspond au nombre de points fixes de l'endomorphisme de Frobenius, c'est-à-dire aux diviseurs premiers de degré 1 sur C.

Weil a aussi démontré que l'hypothèse de Riemann est équivalente à la négativité du côté droit pour toutes les fonctions $f(x)$ de type

$$f(x) = \int_0^{\infty} g(xy) \overline{g(y)} dy,$$

à chaque fois que $g \in \mathcal{W}$ satisfait les conditions supplémentaires

$$\int_0^{\infty} g(x) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} g(x) dx = 0.$$

Dans le cas géométrique des courbes sur un corps fini, la négativité est plutôt une conséquence facile du *théorème de l'index algébrique* pour les surfaces, c'est-à-dire,

Théorème de l'index algébrique. *Soit X une surface projective non-singulière définie sur un corps algébrique fermé. Alors l'auto-intersection quadratique de la forme $(D.D)$, restreinte au groupe des diviseurs D sur X de degré 0 dans le recouvrement* *projectif de X, est semi-définie négative.*

Le théorème de l'index algébrique pour les surfaces est essentiellement dû à Severi [8] en 1906 [Sev, §2, Théo. I]. La preuve utilise le théorème de Riemann-Roch sur X et la finitude des familles de courbes sur X d'un degré donné ; aucune autre preuve par des méthodes algébriques n'est connue à ce jour, même si plus tard, quelques auteurs ont indépendamment redécouvert l'argument de Severi.

Le théorème de l'index algébrique pour les variétés projectives non-singulières de dimension paire sur les nombres complexes a d'abord été formulé et prouvé par Hodge, comme une conséquence de sa théorie des formes harmoniques. Aucune preuve algébrique du théorème de Hodge n'est connue, et cela reste un problème ouvert fondamental que de l'étendre aux variétés sur des corps de caractéristique positive.

Le travail de Montgomery [Mo], Odlyzko [Od], et Rudnick et Sarnak [RS] sur les corrélations pour les espacements entre zéros de $\xi(t)$ suggère que les fonctions L peuvent être groupées en quelques familles, dans chacune desquelles la corrélation est universelle ; la corrélation pour les espacements conjecturée est la même que celle pour la distribution limite des valeurs propres de matrices aléatoires orthogonales, unitaires ou symplectiques dans des familles universelles adéquates, quand la dimension tend vers l'∞.

Tout ceci est compatible avec la vision exprimée par Hilbert et Pólya que les zéros de $\xi(t)$ pourraient être les valeurs propres d'un opérateur auto-adjoint linéaire sur l'espace de Hilbert adéquat. Il faudrait aussi rappeler qu'une théorie correspondante inconditionnelle, pour les corrélations d'espaces des racines caractéristiques des fonctions Zeta des familles de variétés algébriques sur des corps finis ont été développées par Katz et Sarnak [KS], en utilisant les méthodes introduites par Deligne dans sa preuve de l'hypothèse de Riemann pour les variétés sur les corps finis. Ainsi le problème des corrélations d'intervalles pour les zéros des fonctions L semble être un problème très profond.

Tout ceci amène plusieurs questions de base.

Y a-t-il une théorie dans le cas global, qui joue le même rôle que celui que joue la cohomologie pour les fonctions Zeta des variétés sur un corps de caractéristique positive ? Y a-t-il un analogue de l'automorphisme de Frobenius dans le cas classique ? Y a-t-il un théorème de l'index général par lequel on peut prouver l'hypothèse de

8. Severi a montré qu'un diviseur D sur X est algébriquement équivalent à 0 modulo torsion, s'il est de degré 0 et si $(D.D) = 0$. Sa preuve reste valide, sans modifications, sous l'assomption plus faible $(D.D) \geq 0$, qui amène le théorème de l'index.

Riemann classique ? Nous sommes ici dans le domaine des conjectures et de la spéculation. Dans le paradigme adélique proposé par Tate et Weil, les articles [Conn], [Den], [Hara] fournissent des vues sur une manière de poser ces problèmes de base.

D'un autre côté, il y a les fonctions L, telles que celles attachées à des formes d'onde de Maass, qui ne semblent pas trouver leur origine dans la géométrie et pour lesquelles nous attendons toujours qu'elles vérifient une certaine hypothèse de Riemann. Pour ces fonctions, nous n'avons pas de modèles algébrique et géométrique pour guider notre pensée, et il est possible que des idées entièrement nouvelles soient nécessaires pour étudier ces objets si énigmatiques.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, NJ 08540

BIBLIOGRAPHIE

[Conn] A. CONNES, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Selecta Math. (NS)* **5** (1999), 29-106.

[Conr] J.B. CONREY, More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line, *J. reine angew. Math.* **399** (1989), 1-26.

[Del1] P. DELIGNE, La conjecture de Weil I, *Publications Math. IHES* **43** (1974), 273-308.

[Del2] P. DELIGNE, La conjecture de Weil II, *Publications Math. IHES* **52** (1980), 137-252.

[Den] C. DENINGER, Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces, *Proc. Int. Congress Math. Berlin 1998*, Vol. I, 163-186.

[Ed] H.M. EDWARDS, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.

[Hara] S. HARAN, Index theory, potential theory, and the Riemann hypothesis, *L-functions and Arithmetic, Durham 1990*, LMS Lecture Notes **153**, 1991, 257-270.

[Hard] G.H. HARDY, *Divergent Series*, Oxford Univ. Press, 1949, Chap II, 23-26.

[IS] H. Iwaniec and P. Sarnak, Perspectives on the Analytic Theory of L-functions, to appear in proceedings of the conference *Visions 2000*, Tel Aviv.

[Iv] A. Ivič, *The Riemann Zeta function - The Theory of the Riemann Zeta function with Applications*, John Wiley & Sons Inc., New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapore 1985.

[KS] N.M. Katz and P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues and monodromy, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[La] E. Landau, *Primzahlen*, Zwei Bd., IInd ed., with an Appendix by Dr. Paul T. Bateman, Chelsea, New York, 1953.

[Le] N. Levinson, More than one-third of the zeros of the Riemann zeta function are on $\sigma = 1/2$, *Adv. Math.* **13** (1974), 383-436.

[LRW] J. van de Lune, J.J. te Riele, and D.T. Winter, On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip, IV, *Math. of Comp.* **46** (1986), 667-681.

[Mo] H.L. Montgomery, Distribution of the zeros of the Riemann zeta function, *Proceedings Int. Cong. Math. Vancouver 1974*, Vol. I, 379-381.

[Od] A.M. Odlyzko, Supercomputers and the Riemann zeta function, *Supercomputing 89 : Supercomputing Structures & Computations, Proc. 4-th Intern. Conf. on Supercomputing*, L.P. Kartashev and S.I. Kartashev (eds) International Supercomputing Institute, 1989, 348-352.

[Ri] B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monat. der Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859* (1860), 671-680 ; also, *Gesammelte math. Werke und wissensch. Nachlass*, 2. Aufl. 1892, 145-155.

[RS] Z. Rudnick and P. Sarnak, Zeros of principal L-functions and random matrix theory, *Duke Math. J.* **82** (1996), 269-322.

[Sel] A. Selberg, On the zeros of the zeta function of Riemann, *Der Kong. Norske Vidensk. Selsk. Forhand.* **15** (1942), 59-62 ; also, *Collected Papers*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1989, Vol. I, 156-159.

[Sev] F. Severi, Sulla totalita delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, *Math. Annalen 62* (1906), 194-225.

[Sie] C.L. Siegel, Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* **2** (1932), 45-80 ; also *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966, Bd. I, 275-310.

[Ti] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*, 2nd ed. revised by R.D. Heath-Brown, Oxford Univ. Press, 1986.

[TW] R. Taylor and A. Wiles, Ring theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Math.* **141** (1995), 553-572.

[We1] A. Weil, *Œuvres Scientifiques - Collected Papers*, corrected 2nd printing, Springer-Verlag, New York - Berlin 1980, Vol I, 280-298.

[We2] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann et al., Paris, 1948.

[We3] A. Weil, Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers, *Meddelanden Från Lunds Univ. Mat. Sem.* (dédié à M. Riesz), (1952), 252-265 ; also, *Œuvres Scientifiques - Collected Papers*, corrected 2nd printing, Vol. II, Springer-Verlag, New York - Berlin 1980, Vol. II, 48-61.

[Wi] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem, *Annals of Math*, **141** (1995), 443-551.