Qu'est-ce que les mathématiques modernes ?

Gustave CHOQUET

Première publication en 1962

Table des matières

Préface

Bourbaki et l'analyse

Malgré le sous-titre, je n'ai pas l'intention dans ce court texte de m'embarquer dans le projet fou d'essayer de lire l'esprit de Bourbaki, ce génie à plusieurs têtes.

Pourtant, puisque je suis concerné par la totalité de l'analyse, le traité de Bourbaki contenant des concepts si clairs et étant si étroitement lié au développement des mathématiques de notre temps, nous pouvons espérer que l'étude de “sa” philosophie et de “son” travail mathématique nous amènera à l'essence des tendances modernes en analyse.

Une telle étude peut servir à développer pour tous les niveaux de l'éducation un enseignement des mathématiques mieux adapté aux besoins de notre époque et au niveau de conscience de notre génération.

Chapitre 1

La méthode axiomatique

L'étude de l'histoire des mathématiques montre assez clairement que chaque période de recherche et d'extension est suivie d'une période de révision et de synthèse durant laquelle les méthodes plus générales évoluent et les fondations sont consolidées. C'est ainsi que la contribution de Descartes peut être regardée comme le point culminant d'une longue période de recherches apparemment diverses qui ont rendu possible la relégation dans les musées d'un grand nombre de procédures différentes pour l'étude des courbes et fonctions particulières et ont permis de les remplacer par une procédure plus universelle. Aujourd'hui, le nombre de chercheurs en mathématiques est si grand que les deux processus, recherche et synthèse, peuvent être menés simultanément. De plus, le travail de synthèse des cinquante dernières années, rendu possible par la théorie des ensembles et la terminologie proprement dite, a été particulièrement remarquable. On peut trouver cela clairement établi dans Bourbaki, et c'est ce que je voudrais étudier.

Pour Bourbaki n'existe qu'une MATHEMATIQUE, et l'instrument principal de son évolution vers l'unité était la méthode axiomatique. Pour appliquer cette méthode à l'étude d'une théorie, le mathématicien "sépare les lignes principales de raisonnement qui figure dans la théorie, puis, prenant chacune d'elle isolément, il la considère comme un principe abstrait et il déduit d'elle ses conséquences naturelles ; alors, revenant à la théorie étudiée, il "recombine" les éléments précédemment considérés séparément et il voit comme ils interagissent les uns avec les autres." (Bourbaki trouve dans cette assertion une présentation plus structurelle de l'un des principes de base de la méthode de Descartes : diviser chaque difficulté en autant d'éléments que nécessaire pour la comprendre.

1.1 Structures

Les "lignes principales de raisonnement" sont les structures. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède des structures variées : celle de groupe, celle de corps, celle d'espace vectoriel, celle d'ensemble ordonné et celle d'espace topologique. Inversement, une structure identique peut être retrouvée dans un certain nombre de théories distinctes. Par exemple, la structure de groupe trouvé dans l'étude de $\mathbb{R}$ est la structure de l'ensemble des entiers modulo p ou celle de l'ensemble de certains déplacements spatiaux.

Pour que l'étude d'une structure soit applicable à différentes théories, les ensembles considérés doivent nécessairement être généraux ; en particulier, la *nature* de leurs éléments ne doit pas intervenir, seules les *relations* entre eux importent. Ces relations sont clairement établies par les *axiomes* définissant la structure.

Ainsi la structure d'ordre d'un ensemble arbitraire est une relation binaire sur S, dénotée $\prec$, qui satisfait les axiomes suivants ou postulats.

Pour tout x, y, z appartenant à S, on a

1) $x \prec x$
2) $(x \prec y\ et\ y \prec x) \implies (x = y)$
3) $(x \prec y\ et\ y \prec z) \implies (x \prec z)$

Quelques-unes de ces structures ont une signification plus fondamentale parce qu'on les rencontre dans toutes les théories. On les appelle des structures mères et elles incluent les structures associées à une relation d'équivalence, les structures d'ordre, les structures algébriques, les structures topologiques, etc.

Quand nous comparons les structures les unes aux autres, nous pouvons voir que certaines sont "plus riches" que d'autres. Ainsi les structures appelées groupes finis abéliens ou corps, sont plus riches que toute structure qui serait seulement une structure de groupe.

Certaines structures sont plus complexes parce qu'elles présentent plusieurs structures mères liées ensemble par des conditions de compatibilité. On les appelle structures multiples. Par exemple, un groupe topologique est un ensemble qui présente simultanément une structure de groupe et une structure topologique rendue compatible en stipulant que les opérations $(x, y) \longrightarrow x.y$ and $x \longrightarrow x^{-1}$ doivent être continues.

L'algèbre topologique et la topologie algébrique traitent des structures multiples ; la géométrie différentielle et l'algèbre différentielle considèrent des structures qui sont encore plus riches. Au sommet de l'édifice, on trouve les "structures carrefours" qui contiennent de très nombreuses structures. La théorie du potentiel est un exemple particulièrement représentatif d'une telle structure. C'est la multiplicité des structures mères trouvées dans de telles théories qui expliquent pourquoi des mathématiciens si différents les uns des autres leur trouvent autant d'intérêt : chaque pas en avant dans l'étude des structures constituantes a des répercussions sur la théorie dans son ensemble. Il est facile d'établir que le progrès dans la théorie du potentiel correspond aux progrès dans les autres théories comme l'intégration de Lebesgue, les espaces topologiques, les espaces vectoriels topologiques, la mesure de Radon, les groupes abéliens localement compacts, les distributions, etc., etc.

De telles structures sont le champ d'étude véritable de l'analyse et nous allons définir l'analyse comme l'ensemble complet des structures carrefours. Mais comme celles-ci n'ont pas été définies de façon rigide, notre définition de l'analyse ne fait qu'établir une hiérarchie.

Une théorie A sera classée comme appartenant davantage à l'analyse qu'une théorie B si les structures étudiées dans A sont plus riches que celles étudiées dans B.

L'analyse apparaît comme un univers dont la complexité rappelle celle de la vie elle-même. Alors que l'algèbre est un monde de minéraux dont les beautés sont celles de cristaux avec leurs formes pures, l'analyse est habitée d'êtres dont les formes sont aussi incertaines que celles des algues, des hydres ou des éponges ; c'est un monde exubérant plein d'opportunités où les explorations peuvent suivre l'un quelconque de multiples cours et où chacun peut laisser l'empreinte de sa personnalité dans la partie qu'il explore.

1.2 Caractéristiques de la méthode axiomatique

(a) *Economie de la pensée*

Les développements récents dans les mathématiques ou l'industrie montrent des analogies intéressantes ; la méthode axiomatique est analogue à une chaîne de production automatique ; les structures mères correspondent aux machines-outils.

La méthode axiomatique permet une économie de la pensée et de la notation, car les théorèmes importants nécessités sous différentes formes, dans différents contextes, sont établis une fois pour toutes dans un système d'axiomes suffisamment général de manière à leur faire inclure toutes les applications utiles. Dans ce système général de référence, la terminologie et la notation sont choisies pour s'adapter aux cas particuliers variés, et la préférence est toujours donnée aux mots les plus suggestifs qui provoquent des résonances et stimulent l'intuition. Ce soin dans le choix des termes va de pair avec un souci de clarté dans la présentation ; les mathématiciens modernes ont développé un style précis et austère, et ne sont satisfaits que lorsque leurs articles consistent en un ensemble d'os nus de définitions, lemmes, théorèmes, corollaires et signes pour attirer l'attention (☡).

(b) *La multivalence* : une garantie d'unité et d'universalité

Les premiers systèmes axiomatiques étaient catégoriques ou *univalents*, comme l'axiomatisation de la géométrie élémentaire par Euclide et par Hilbert, ou la définition des entiers par Peano. En contraste avec cela, les structures sont *multivalentes*, c'est-à-dire que les axiomes qui les définissent peuvent être appliqués à de vastes classes d'ensembles portant des structures non isomorphes.

C'est la multivalence qui est une garantie de l'adaptabilité aux situations les plus variées. Il s'ensuit de cela qu'il est parfois difficile de dire si une assertion appartient plutôt au domaine de l'algèbre, de la géométrie ou de l'analyse.

Ainsi, nous pouvons dire que la géométrie élémentaire de l'espace n'est rien d'autre que l'algèbre linéaire dans un espace vectoriel de dimension 3 sur lequel un produit scalaire est défini, et que l'étude des formes quadratiques dans cet espace est équivalent à l'étude des coniques du plan.

De façon similaire, étudier l'espace de Hilbert est, bien sûr, faire de la géométrie (puisqu'on parle là de sphères, d'angles, de perpendiculaires) mais il est égal de faire cela en algèbre ou en analyse.

Par exemple pour Henri Cartan, balayer en théorie du potentiel, c'est la même chose que projeter orthogonalement sur un cône convexe de l'espace de Hilbert. Plus généralement, bien que les ensembles convexes appartiennent à la géométrie, ils deviennent un des outils de base de l'analyse pour celui qui étudie les espaces.

Cette multivalence des grandes structures est donc un facteur unifiant qui permet un élargissement mutuel des différentes théories mathématiques. Un tel phénomène n'est pas nouveau. Nous avions déjà des exemples dans la représentation géométrique des nombres complexes ; la synthèse de l'algèbre et de la géométrie effectuée par Descartes ; l'utilisation que Monge avait fait de la géométrie dans sa recherche en analyse. Mais il a été permis à l'algèbre des ensembles et à son langage universel d'amplifier ce phénomène. Voici quelques exemples :

- la topologie de Zariski en géométrie algébrique.
- l'interprétation topologique et les démonstrations de nombreux théorèmes importants en logique.
- la théorie de Leray des paquets de fibres d'abord étudiés en géométrie algébrique mais qui envahissent maintenant l'algèbre et l'analyse.

(c) *Illumination mutuelle des entités mathématiques : dynamisme*

Il s'ensuit de cette multivalence que les entités isolées ne sont plus étudiées ; ce qui est étudié, ce sont les familles d'entités liées par des relations mutuelles. Non seulement les théorèmes acquièrent une plus grande généralité ce faisant, mais en même temps, chaque entité est individuellement mieux connue, puisque ces relations avec les autres entités font ressortir ses propres aspects variés. Ici aussi, ce qui est nouveau ce n'est pas l'utilisation d'un "contexte" mais la conscience du phénomène et de sa généralité.

Il est bien connu que la tangente d'une courbe en un point a été définie par une famille de sécantes ; que les fonctions analytiques d'une variable réelle deviennent mieux connues quand on les étudie dans le plan complexe, et que parfois les "familles normales" des fonctions analytiques ont été un outil puissant. Les mathématiques modernes sont "relationnelles " et cela leur donne leur dynamisme interne, celui-ci se réfléchissant dans un vocabulaire spécial et dans des signes typographiques spéciaux : fonctions, injections, jets, flèches, et schémas fléchés.

Une notation pratique et très suggestive a été produite pour indiquer les relations et les transformations.

$$x \longrightarrow f(x); A \longrightarrow \bar{A}; x \sim y; x < y; A \times B; \prod A_i; E/R; \text{ etc.}$$

Entre les mains des mathématiciens, les entités sont façonnées comme les pierres précieuses entre les mains du joaillier et chacune des transformations qui est amenée révèle une nouvelle facette, un aspect inattendu.

Cet aspect relationnel des mathématiques est en accord avec le principe bien connu qui est que pour bien connaître une notion, on doit étudier ses formes et ses contraires. Il y a aussi accord sur le principe qui semble dominer toutes les investigations scientifiques modernes, i.e. que nous ne pouvons pas atteindre à l'"essence" des entités étudiées, mais seulement aux relations qu'elles entretiennent entre elles. Une expérience en physique ne révèle seulement que la relation entre l'univers et le système expérimental. Ce qui est essentiel dans un réseau téléphonique, ce n'est pas la nature des fils ou leur forme mais l'ensemble de ses connexions. Pour le mathématicien, deux ensembles structurés isomorphiquement sont équivalents.

La virtuosité avec laquelle les jeunes générations de mathématiciens se sont nourries aux nouvelles méthodes, utilisent le dynamisme des relations, et le plaisir qu'ils tirent de cela, semble prouver que ce dynamisme est bien adapté à la structure du cerveau humain.

(d) *Adaptabilité à l'univers physique*

Cette multivalence des théories est une garantie qu'elles aient de grandes possibilités d'être utilisées en physique. Ainsi, l'espace de Hilbert a servi à mieux interpréter les théories de champ quantique ; la géométrie des espaces de Riemann et le calcul différentiel extérieur ont formé le cadre de la relativité générale. La physique théorique moderne elle-même développe maintenant ses propres structures : des faits fondamentaux sont pris comme postulats et de ces postulats sont déduites des conséquences dont on cherche alors les vérifications expérimentales. Naturellement, on comprend que les axiomes choisis correspondent à un seul aspect de l'univers physique.

(e) *Validation des notions qui sont devenues métaphysiques*

Un bon système axiomatique est assez souvent le seul moyen de se sortir de difficultés métaphysiques. Ainsi les nombres complexes ont perdu leur mystère et leur "absurdité" quand leur ensemble a été identifié à $\mathbb{R}^2$ auquel deux opérations adéquatement définies étaient associées. Plus récemment, les fondations de la théorie des probabilités étaient très brumeuses quand cette théorie était basée sur la théorie des jeux, la théorie des erreurs et la théorie stochastique. La théorie des probabilités a seulement ancré son unité et ses fondations fermes quand Kolmogorov lui a donné une présentation axiomatique. De ces axiomes, la théorie des probabilités apparaît comme une branche de la théorie de la mesure, mais une branche spéciale qui montre une grande vigueur, a son langage et ses problèmes propres et pourrait s'enrichir de nouveaux résultats de la théorie de la mesure tout en fertilisant l'analyse classique. Une brillante illustration de ce dernier fait peut être trouvée dans la relation étroite démontrée récemment qui existe entre les processus de Markov et la théorie du potentiel.

1.3 Dangers de la méthode axiomatique

Bien que les systèmes axiomatiques soient les machines-outils des mathématiques, on comprendra facilement qu'ils ne présentent un intérêt que si leur résultat est correct. Il est assez facile de construire des systèmes axiomatiques, en modifiant légèrement des systèmes connus ; on constatera malheureusement qu'on en produit trop dans des thèses ou des articles. Leurs auteurs peuvent se régaler à les formuler et cela les amène à exagérer leur importance. Un grand nombre de ces vastes théories ont peu d'applications voire pas du tout. Une question urgente se pose alors : quels sont les systèmes axiomatiques utiles ?

Il n'y a probablement pas de critère absolu qui permettrait à quelqu'un de prendre une décision à ce sujet. Cependant, on sera d'accord sur le fait qu'on n'a pas besoin d'un tank pour tuer une mouche. Une théorie générale sera justifiée si elle révèle des liens insoupçonnés et fructueux entre des théories jusque-là considérées comme éloignées, ou si elle résoud un défi qui restait ouvert. Ce fait qu'une théorie soit générale n'entraîne pas forcément qu'elle sera utile, particulièrement si la lumière qu'elle projette est trop faible. Nous verrons plus loin avec quelles restrictions Bourbaki permettait à des théories d'avoir le droit d'exister. Mais il est intéressant de regarder les garde-fous qui auront protégé Bourbaki de succomber à la tentation de développer des systèmes axiomatiques comme des fins en soi.

Pour André Weil, “si la logique représente les règles d’hygiène pour un mathématicien, le pain quotidien qui assure sa subsistance est constitué par les grands problèmes”. C’est une autre façon de dire ce qu’Hilbert avait l’habitude de dire, “Une branche de la science est pleine de vie tant qu’elle a des problèmes en abondance ; l’absence ou le manque de problèmes est un signe de mort.”.

Hilbert est pour Bourbaki un modèle et presque une figure du père. Le fils recherche le père pour la simplicité élégante de ses articles “due au fait qu’il a tiré de rien, alors que personne n’avait été capable de le faire jusque-là, les principes fondamentaux qui ont rendu possible le fait de tracer la voie royale qui avait été jusqu’alors été cherchée en vain”. Il est le Maître de la méthode axiomatique, que l’on considère les structures univalentes (comme en géométrie élémentaire) ou les théories multivalentes, et il a appris aux mathématiciens à penser axiomatiquement. “Il ne tombe jamais dans le piège de certains de ses disciples de créer et élaborer une théorie pour quelques maigres résultats et il ne généralise jamais pour le plaisir de généraliser.” (Dieudonné). Il aime le problème particulier, précis et concret. C’est dans le but de résoudre de tels problèmes qu’il a créé des outils dont l’importance n’a pas diminué : la méthode directe dans le calcul des variations basée sur la semi-continuité pour résoudre le problème de Dirichlet ; la définition et l’utilisation des “espaces de Hilbert” pour résoudre les équations intégrales, etc., etc.

Les grands problèmes sur lesquels il a attiré l'attention des mathématiciens au congrès de 1900 ont continué à stimuler la recherche de façon très fertile. Aujourd'hui, par exemple, le problème de Riemann des zéros de la fonction ζ continue de provoquer un nombre très grand de tentatives d'en trouver une démonstration, même si la nature véritable du problème semble échapper à tout le monde.

Chapitre 2

Quelques outils de l'axiomatique

Un mathématicien moderne étudiant une structure est contraint d'utiliser des structures auxiliaires. Pour les construire, il a besoin d'un guide qui l'amène aux bonnes définitions. Nous allons maintenant examiner quelques-unes des procédures qui se sont montrées particulièrement efficaces et se sont avérées être de bons guides.

2.1 Morphismes

Une structure sur un ensemble S est définie par plusieurs axiomes exprimés en fonction des éléments de S et potentiellement des ensembles auxiliaires. La forme de ces axiomes définit ce qu'on appelle une *catégorie de structure* dont nous allons donner quelques exemples.

Les postulats pour la notion de groupe définissent une *catégorie*, les groupes commutatifs en forment une sous-espèce. Autres exemples : la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, celle des espaces topologiques compacts et celle des variétés différentielles.

Soient deux ensembles S et S' doté de structures de la même catégorie, alors une *bijection* (c'est-à-dire une correspondance un-pour-un) f de S dans S' est appelée un *isomorphisme* s'il échange les structures de S et S' d'une manière simple à établir dans chaque cas.

De façon plus générale, un morphisme de A dans B est une application de A dans B qui a des propriétés qui sont reliées à la structure. La définition des morphismes est telle que le produit de deux morphismes est aussi un morphisme et que si une bijection f de A dans B est un morphisme, ainsi que f^{-1}, alors f est un isomorphisme. Par exemple, pour les catégories de structures formées des espaces topologiques, la classe des applications continues forme une classe de morphismes ; les applications ouvertes (i.e. qui changent tout ensemble ouvert en un ensemble ouvert) forment aussi une autre classe de morphismes qui est non moins utile que celle des morphismes du premier type.

Soit A un ensemble, (B_i) une famille d'ensembles dotés d'une structure d'une catégorie donnée, et pour chaque i appelons f_i une application de A dans B_i. Une question qui se pose est : pouvons-nous doter A d'une structure de la même catégorie de telle manière que f_i soit un morphisme ? Sous certaines conditions, c'est possible et parmi toutes les solutions possibles, il y en a une qui est privilégiée et qui est appelée la *structure ini-*

tiale associée à (B_i, f_i). C'est la manière dont cela est utilisé, par exemple, pour la catégorie des espaces topologiques pour définir l'image réciproque d'une topologie, la topologie induite, sur un sous-ensemble d'un espace donné ; le produit d'une famille d'espaces topologiques.

Quand f_i est une application de B_i dans A, la solution du problème, si elle existe, est appelée la *structure finale* associée au (B_i, f_i) ; ceci est la manière dont on définit une topologie sur l'ensemble-quotient A d'un espace topologique B par une relation d'équivalence R.

2.2 Ensembles et applications universelles

Soit S et T deux catégories de structures, soit A un ensemble de catégories S ; donnons-nous une famille d'applications appelées (ST)-applications de A dans les ensembles de catégories T et une famille d'applications appelées T-applications des ensembles de catégories T dans les ensembles de mêmes catégories ; supposons aussi que ces familles sont transitives au sens où le produit d'une (ST)-application par une T-application est encore une (ST)-application et que le produit de deux T-applications est encore une T-application. La question alors est de trouver s'il existe un ensemble $\mathscr{B}$ de catégories T et une (ST)-application Φ de A dans B telle que toute (ST)-application (de A dans un B) peut être écrite comme $\psi = f \circ \Phi$ où f est une T-application de $\mathscr{B}$ dans B. Sous des conditions suffisantes très générales, ce problème a une solution et même une infinité de solutions non isomorphes.

Pour déterminer une solution unique, la condition suivante doit être ajoutée : l'image $\Phi(A)$ de A dans $\mathscr{B}$ est telle que deux T-applications de B dans un B qui coïncident dans $\Phi(A)$ coïncident aussi dans $\mathscr{B}$. L'espace B ainsi obtenu est appelé l'*espace universel* associé à A et Φ est appelé l'*application universelle* associée à A.

Exemples.

a) *Groupes compacts associés à un groupe topologique.*
A est un groupe topologique, T est la catégorie des groupes topologiques, les (ST)-applications et les T-applications sont formées par les homomorphismes arbitraires continus. On peut montrer qu'il y a identité entre les fonctions presque-périodiques définies sur A et les fonctions $\psi \circ \Phi$ où g est n'importe quelle fonction continue sur $\mathscr{B}$.
Cet exemple montre quel intérêt peuvent présenter les ensembles universaux pour l'analyse.

b) *Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.*
A ici est le produit (cartésien) de deux espaces vectoriels S_1 et S_2 (sur le corps $\mathbb{R}_1$), T est la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; les (ST)-applications sont les applications bilinéaires définies dans $S_1 \times S_2$; les T-applications sont les applications linéaires. L'espace vectoriel universel $\mathscr{B}$ est appelé le produit tensoriel des espaces S_1, S_2 ; à travers lui, l'étude des applications bilinéaires définies dans $S_1 \times S_2$ est réduit aux applications linéaires définies dans $\mathscr{B}$.

Voici quelques autres ensembles universaux ;

- les structures algébriques libres,
- les anneaux et les corps de fractions,
- la complétion d'un espace uniforme,
- la compactification de Stone-Cech,
- les groupes topologiques libres,
- les variétés d'Albanese (en géométrie algébrique).

2.3 Catégories et foncteurs

Des vastes outils des mathématiques, la théorie des "catégories" est la plus récemment développée. C'est une plongée de plus dans l'abstraction, car les relations qu'elle considère ne sont plus des relations entre éléments d'un ensemble, mais des relations entre des entités d'une "catégorie" ou même de différentes catégories.

C'est presque miraculeux qu'une telle généralité ne soit pas synonyme de vide et de facilité. Mais en fait, la théorie est devenue un guide indispensable pour les jeunes générations de mathématiciens dans différents domaines.

Dans ce texte, nous nous contenterons de quelques exemples et de quelques définitions pour donner une idée de ce dont il est question.

Tous les groupes forment une catégorie.
Il en est de même de tous les espaces vectoriels,
tous les espaces topologiques,

tous les espaces ordonnés,
et plus généralement il y a la catégorie de tous les ensembles dotés d'une catégorie de structure sur lesquels existent des morphismes.

Ainsi une catégorie n'est pas un ensemble ; il est pratique de penser à elle comme à une classe d'objets qui est plus grande qu'un ensemble. Maintenant, appelons $\mathscr{C}$ une classe d'objets. A chaque $X, Y \in \mathscr{C}$, nous associons un *ensemble* dénoté $Hom(X, Y)$ dont les éléments sont appelés *homomorphismes* ou morphismes de X dans Y, et pour tout $X, Y, Z \in \mathscr{C}$, nous supposons l'existence d'une application $(f, g) \longrightarrow g \circ f$ (appelée la composition) de $Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z)$ dans $Hom(X, Z)$. Nous dirons que $\mathscr{C}$ équipé de ses homomorphismes est une catégorie si les axiomes suivants sont remplis :

- K_1 : la composition est associative : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- K_2 : pour chaque $X \in \mathscr{C}$, il existe un élément e_x de $Hom(X, X)$ appelé l'unité de X et tel que $e_x \circ f = f$ et $f \circ e_x = f$ pour tous les homomorphismes f (quand ces expressions ont un sens).

Nous appellerons isomorphismes de X dans $Y (X, Y \in \mathscr{C})$ tout $u \in Hom(X, Y)$ tel qu'il existe $v \in Hom(Y, X)$ pour lequel $u \circ v = e_x$ and $v \circ u = e_y$.

Les relations entre les différentes catégories sont établies via les *foncteurs*. Soit $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ deux catégories et soit F une loi qui associe à tout $X \in \mathscr{C}$ un élément $X' \in \mathscr{C}'$, dénotée par $F(X)$ et supposons que, à tout $X, Y \in \mathscr{C}$ et à tout $u \in Hom(X, Y)$, F

associe $u' \in Hom(X', Y')$ (u' est dénoté $F(u)$).

F est un foncteur si

a) quand u est une unité alors $F(u)$ est une unité également,
b) pour tout u, v tel que $u \circ v$ a un sens $F(u \circ v) = F(u) \circ F(v)$.

De ces deux notions de catégories et foncteurs, il est possible de construire une algèbre qui devient plus riche lorsque les catégories sont spécialisées.

Montrons sur un exemple simple comment les catégories servent de guide.

De l'étude des catégories classiques "concrètes" dans lesquelles la notion de produit existe (ensembles ordonnés, groupes, espaces topologiques), on abstrait un schéma exprimable en terme de catégories générales, et ainsi la notion d'une *catégorie avec produit*. Si nous rencontrons une nouvelle catégorie concrète non encore dotée d'un produit, le schéma général indique non seulement si l'on peut définir ce produit mais également, il formule sa définition.

Pour résumer : nous avons juste considéré quelques outils de caractère très général ; d'autres existent tels que, par exemple, les séquences exactes et les diagrammes, qui sont constamment utilisés en algèbre et en topologie algébrique. L'utilisation de ces outils est inséparable d'un ensemble très précis de notations dont le champ d'application est en constant élargissement. C'est un nouveau langage, proche du profane, mais clair et évocatif à l'initié. Bien sûr, ces outils ne sont pas des baguettes magiques et ne valent que ce que leur utilisateur vaut.

Chapitre 3

Les méthodes de découverte liées à la méthode axiomatique

Bien qu'aucun outil ne puisse engendrer des cadeaux s'il n'y en a pas, les outils peuvent considérablement augmenter l'efficacité quand ils existent. Nous avons étudié quelques-uns des outils de la méthode axiomatique, nous allons maintenant considérer quelques-unes des méthodes de découverte qui ne prennent leur plein sens que dans l'étude des structures multivalentes. Tout chercheur sérieux les découvre de lui-même mais il n'est pas sans intérêt de les rendre explicite.

3.1 Le relâchement des axiomes

Un certain analyste croit qu'une assertion s concernant une structure carrefour S définie par un certain nombre d'axiomes est correcte. L'assertion s a été formulée en termes simples qui continueront d'avoir un sens dans un autre système axiomatique S' moins riche en axiomes que S (cela ne signifie pas que l'assertion sera forcément vraie dans S'). L'analyste peut alors utiliser la méthode suivante qui se réduit au “relâchement” de certains axiomes. Il essaiera de prouver s dans S' ; il y a très peu de combinaisons d'axiomes dans S' et cela peut aider à trouver la démonstration ; s'il a de la chance, soit il aura prouvé s dans S', et également dans S par conséquent, ou bien il aura trouvé dans S' un contre-exemple C réfutant s. Une étude attentive de C peut l'amener à formuler une propriété supplémentaire P qui ajoutée aux axiomes de S' lui permettra de prouver s. La seule chose qui restera à faire sera de revenir à S' pour voir si P pourrait être démontrée à partir de là. La preuve de s en découlera.

3.2 La contraction des axiomes

La méthode 1, a consisté à supprimer quelques axiomes du système S ; une autre méthode de recherche consiste à en ajouter de nouveaux, i.e. à étudier les cas particuliers.

Les axiomes supplémentaires permettront d'utiliser des outils qui n'étaient pas présents dans S ; de cette façon, nous obtenons des assertions inattendues et des preuves ; en retournant dans S, on essaie d'adapter les résultats obtenus à S.

Un cas particulier bien connu de cette méthode consiste à utiliser des modèles discrets ou finis. En théorie des probabilités par exemple, les processus de Markov doivent beaucoup à l'étude des processus sur les ensembles discrets ou finis. Dans la théorie du potentiel, l'étude des noyaux sur un ensemble fini révèle des phénomènes inexpliqués dans le cas général.

3.3 Etude de structures qui ne sont pas très différentes

Si l'on ne sait pas comment prouver un théorème T concernant une structure carrefour S, mais qu'il est possible de le prouver pour une structure S' avec des axiomes différant très peu de ceux de S, une grande partie des lemmes, grâce auxquels la preuve de T dans S' peut être établie, peuvent être également valides dans S. L'examen des autres peut amener à leur reformulation de façon à obtenir des assertions également valides dans S.

Ainsi, par exemple, puisqu'il n'est pas encore possible de prouver l'hypothèse de Riemann, on étudie les problèmes liées aux corps finis, en espérant être capable de transposer les résultats ainsi obtenus à la question classique, ou même de faire apparaître de tels cas comme des cas particuliers de l'un d'eux et du même problème arithmético-algébrique. Ainsi, un problème plus général peut être plus facilement démontré. L'histoire des mathématiques regorge d'exemples montrant qu'en se déplaçant au niveau de généralité adéquat, on gagne souvent en flexibilité et qu'ainsi, les sources secrètes des preuves sont rendues plus évidentes.

Il est cependant important quand nous ne pouvons pas résoudre un problème, de ne pas tomber dans le piège d'en résoudre des plus faciles et de croire qu'un progrès sur la question originale a été fait. De telles tentatives peuvent être d'excellents moyens de s'approcher du but, mais il est souvent préférable de ne pas les publier.

3.4 Génération de structures respectant certaines contraintes

La technologie de nos jours peut produire à la demande des machines-outils répondant à des exigences complexes. Nous ne sommes pas si loin de jours futurs où les chimistes seront capable de produire synthétiquement des fibres qui satisferont toutes les exigences du public. En mathématiques, la théorie des catégories nous montre comment il est maintenant possible de produire des structures qui auront toutes les propriétés requises pour telle ou telle question.

L'état d'esprit d'un jeune mathématicien n'est plus celui d'un constructeur en contact avec la matière ; il ne construit plus étape après étape, et brique après brique, les entités complexes dont il a besoin ; il demande seulement que ces entités entretiennent entre elles des relations mutuelles (et non contradictoires) ; elles forment ainsi une catégorie que l'on peut étudier par les méthodes ordinaires. La concrétisation des éléments d'une catégorie comme celle des ensembles dotée d'une certaine structure est l'une des dernières étapes d'une recherche.

Chapitre 4

Quelques caractéristiques de la contribution de Bourbaki à l'analyse

Nous avons examiné ci-dessus les outils et les principes ; considérons maintenant comment le groupe Bourbaki, ainsi que ses membres chacun individuellement, les ont utilisés pour effectuer leur travail.

4.1 Axiomatique et multivalence

En accord avec ses principes, Bourbaki montre une prédilection pour les structures multivalentes. Bourbaki aime les assertions générales. Il dit “quand ça ne coûte pas davantage, toute théorie produira le cadre le plus général possible”. Ceci, même si cela permet de préserver de nombreuses idées, nécessite un gros effort de la part du lecteur.

Ainsi, non seulement les espaces vectoriels sont étudiés en relation à un corps arbitraire, mais à chaque fois que c'est possible, leur étude est remplacée par celle des modules sur un anneau doté d'une unité (cela, bien sûr, force à adopter des définitions qui sont valides dans le cas général, par exemple, celle de produit tensoriel). De la même manière, des équations comme $x' = f(x, t)$ sont étudiées non pas dans les espaces de dimension finie mais dans des espaces normés et $f(x, t)$ est supposé être seulement Lipschitzien en x et réglé en t.[1]

4.2 Bourbaki est essentiellement un algébriste

Les initiateurs de Bourbaki avaient découvert l'algèbre en travaillant avec les grands algébristes allemands à une époque où l'algèbre moderne n'était pas connue en France. De ce fait, leur analyse est imprégnée d'algèbre et de notations algébriques : algèbres d'ensembles, bien sûr, mais également groupes, algèbres linéaires et multi-linéaires, dualité. Ils aiment les transformations et les propriétés qui sont décrites comme des relations algébriques. Quand une théorie considérée de façon classique comme appartenant à l'analyse peut être transformée en théorie algébrique en partie ou en totalité, Bourbaki n'oublie pas le plaisir de le faire.

Dans le passé, l'analyse était essentiellement l'étude des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs appartenaient à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ ainsi que l'étude des opérateurs de différentiation et d'intégration. A présent, pour les Bourbakistes, $\mathbb{R}$ est principalement un corps commutatif de caractéristique zéro et cela semble assez souvent suffire. Quand Bourbaki travaille dans le corps des réels, il sait

1. Une fonction est dite réglée en t si elle est la limite uniforme de fonctions étagées.

que la seule chose à ajouter est qu'il est ordonné et localement compact.

Dans les mains de Claude Chevalley, l'étude des groupes de Lie ou des algèbres de Lie est libérée de tout élément extérieur : l'analyse joue là un rôle très restreint ; elle ne sert qu'à prouver l'existence d'entités dotées de telle ou telle propriété ou dans la définition de telle ou telle opération. Par exemple, pour la différentiation, on retient seulement le fait qu'elle soit une application d'une algèbre dans elle-même, satisfaisant identiquement la relation $D(x, y) = xD(y) + D(x)y$.

Dans les mains d'Henri Cartan, la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes est purifiée : l'intégration reste l'outil fondamental mais Bourbaki l'étudie localement, dessinant à partir de lui les propriétés algébriques qui dorénavant sont les seules qui doivent être utilisées. Dans son excellente "*Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*", il préfère le point de vue de Weierstrass à celui de Cauchy et dans son chapitre I, il extrait de l'étude algébrique des séries formelles le maximum d'information à partir de leur composition, de leur inversion et de leur différentiabilité. Quand il étudie la théorie du potentiel, il préfère les outils algébriques : la formule de composition des noyaux ; l'interprétation de l'"opération de balayage" comme une projection orthogonale dans un espace de Hilbert.

4.3 Le renouvellement constant de l'Œuvre

Le monument de Bourbaki n'est pas un bilan du passé mais une construction vivante en constante évolution et tournée vers le futur. Bourbaki intègre dans son travail les développements récents qui se sont avérés démontrés, et à cause des nouvelles tendances, il est prêt à refondre complètement des branches même si elles sont d'une importance majeure (souvent découvrant, ce faisant, de nouveaux résultats inattendus et fascinants). Par exemple, les vieux livres du traité vont être refondus en utilisant les catégories, implicitement ou explicitement : des champs non séparés ont acquis droit de cité depuis que leur importance dans différentes théories (et en particulier en géométrie algébrique) a été découverte ; les équations différentielles partielles linéaires sont traitées en termes de distributions, convolutions et de transformations de Fourier et de Laplace.

D'un autre côté, Bourbaki montre sur certaines questions des phobies irrationnelles. Par exemple, il a une conception intéressante de la théorie de la mesure mais il est trop rigide en termes d'espaces localement compacts de convergence vague ; il relègue les mesures abstraites à la Chambre des horreurs, fermant par là la porte pour que ses disciples puissent aller du côté de la théorie des probabilités qui, même si elle n'a pas encore trouvé ses outils optimaux, fait vraiment la preuve d'une vitalité étonnante.

4.4 Choix des définitions

Une partie essentielle des efforts de Bourbaki consiste à trouver de bonnes définitions. Voici ce que les gens objectent au caractère excessivement déductif et formel de ce travail : Bourbaki établit les postulats et dessine les conséquences mais n'explique ni ses choix des axiomes, ni les théorèmes qu'il prouve. La raison est que l'histoire de ces choix serait trop longue. Quiconque a essayé de fournir l'axiomatique d'une théorie jusqu'ici confuse sait que les bonnes définitions sont seulement trouvées après un certain nombre de tentatives infructueuses et que ces tentatives devraient être jetées à la poubelle, de peur que l'on affaiblisse son esprit en retenant un certain nombre de théories axiomatiques similaires. La justification réelle pour une bonne théorie axiomatique est son succès.

Observons Bourbaki au travail sur un choix de définitions. Tandis que l'analyste classique commencerait à partir de définitions "naturelles" dans un certain contexte historique et déduirait des théories clefs de ces définitions, en les gardant comme elles étaient à l'origine et en allant de l'avant dans la théorie, Bourbaki changerait les définitions sous l'influence des théorèmes clefs. Il utiliserait les théorèmes clefs comme définitions si je peux utiliser une phrase imprécise mais expressive. Ceci est un des plus importants aspects de la *Bourbakization* des théories.

De façon plus précise, quand un théorème établit que les entités E définies par une définition D ont une propriété P qui se révèle au cours du développement comme plus adaptable que D, ou qui reste valide sur un domaine plus grand que D et permet ainsi une plus large généralisation, Bourbaki donne à P le rôle dévolu précédemment à D en obtenant ainsi une définition de E équivalente à la première, mais plus gérable, ou un élargissement de la classe de E à laquelle la théorie est applicable.

Voici quelques illustrations de cette méthode fructueuse.

a) *Mesures de Radon.*

Un théorème dû à F. Riesz a prouvé que, sur $\mathbb{R}$, il y a identité entre les intégrales de Stieltjes (définies pour une fonction de variation localement limitée) et les formes linéaires continues de l'espace $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ des fonctions numériques continues s'évanouissant à l'extérieur d'un compact.

Pris comme définition, cela fournit quelques avantages de la mesure de Radon sur la mesure ordinaire : l'extension immédiate non seulement à $\mathbb{R}$ mais également à tout espace localement compact ; une plus grande flexibilité dans l'étude des opérations sur les mesures (produit de mesures, images de mesures, etc.) ; les adaptations parfaites à la définition de la topologie faible de l'espace de mesures, qui s'est avérée être la plus adaptée de toutes les topologies de cet espace.

Il s'ensuit que la définition des mesures de Radon est maintenant bien connue.

Les définitions qui précèdent ont montré que cette définition n'était pas adaptée au seul cas de l'intégration. Une mesure de Radon n'est rien d'autre qu'une forme linéaire continue sur un certain espace vectoriel topologique ; les nouvelles entités peuvent maintenant aisément être définies par le processus suivant. Soit V un espace topologique ; les formes linéaires continues sur V sont de nouvelles entités qui forment un espace vectoriel V' dual de V ; la théorie de la dualité, maintenant bien établie, fournira des topologies variées sur V' qui rendront plus facile l'étude de V. Cela donne un monde de possibilités. Mentionnons, comme exemples, les distributions de L. Schwartz, les courants de de Rham, les surfaces généralisées de L. C. Young.

b) *Mesures invariantes sur un groupe*

L'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ peut être définie par tout processus de continuation de l'intégrale de fonctions continues avec support compact ; sur l'espace $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ de ces fonctions, c'est une forme linéaire J qui est positive au sens où $I(f) > 0$ pour tout $f > 0$ et est invariante par translation, au sens où $I(f) = I(g)$ quand g est obtenue de f par translation.

On peut montrer que toute fonction qui a ces propriétés ne diffère de l'intégrale de Lebesgue que par un coefficient constant. Par conséquent, la définition axiomatique de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (à facteur constant près) est : c'est une forme linéaire positive sur $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ qui est invariante par rapport aux translations sur $\mathbb{R}$. Cette nouvelle définition est non seulement plus gérable parce qu'elle amène les propriétés de l'intégrale qui sont directement utilisables mais également parce qu'elle peut être immédiatement adaptée au cas des groupes arbitraires localement compacts.

c) *Fonctions mesurables*

En analyse classique, les applications mesurables de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ sont définies comme suit :

f est dite mesurable si pour tout nombre λ, l'ensemble des x tels que $f(x) < \lambda$ est mesurable (selon la mesure de Lebesgue).

Le théorème de Lusin démontre l'équivalence de cette définition avec la suivante : f est mesurable si, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, et pour tout nombre $\epsilon > 0$, il existe un sous-compact K' de K tel que

(1) la mesure de $(K - K')$ est plus petit qu'ϵ ;

(2) la restriction de f à K' est continue.

La propriété impliquée dans cette seconde définition est à la fois suggestive et plus pratique dans un certain nombre d'applications. D'un autre côté, elle continue à avoir une signification intéressante quand on substitue pour la mesure une fonction sur l'ensemble plus générale, comme par exemple la capacité en théorie du potentiel. Finalement, elle est immédiatement utilisable dans la définition des applications mesurables d'un espace localement compact (doté d'une mesure de Radon positive) dans un espace topologique arbitraire.

Cette seconde définition est donc préférable à la définition classique et devrait être adoptée.

4.5 Choix des contenus et théorèmes

Dans l'écriture de son traité, Bourbaki est forcé de faire des choix à tout moment. Nous avons juste vu comment il choisit ses définitions. Il est également très attentif quand il choisit le contenu de ses chapitres.

Son intérêt principal est dans les outils et seulement dans ceux qui ont particulièrement montré leur utilité. Les résultats élégants ou même les résultats profonds ne retiennent pas son attention s'ils sont des fins de théories ou s'ils conduisent à des impasses. Il abandonne, non concerné par des soucis de complétude, les notions qui sont proches de celles qu'il a jugées comme étant les plus fondamentales. S'il pense qu'une théorie n'est pas suffisamment mûre pour qu'un choix soit fait parmi ses différentes possibilités de fondations axiomatiques, il préfère attendre pour l'inclure que la théorie ait suffisamment mûri. Il n'a que peu de goût pour les hors-d'œuvres, pour l'embellissement ou pour les développements accidentels sans grande connexion avec le reste des mathématiques.

Il construit comme les Romains, solidement. Si la construction est par chance, élégante, c'est dû à la beauté de sa propre structure ; par-dessus tout, il cherche la simplicité, la force, l'utilité, l'efficacité.

En topologie générale, suivant Haussdorf, il a fait un choix sobre parmi un labyrinthe de notions. Choix de postulats pratiques pour les espaces topologiques compacts ; choix d'une bonne notation pour la compacité ; l'introduction des filtres (H. Cartan) a simplifié la notion de convergence ; celle des espaces uniformes (A. Weil) a amené un certain nombre de notions qui jusque-là étaient considérées comme non reliées. Cette introduction des espaces uniformes a été plus tard justifiée quand les relations entre les espaces compacts et les espaces uniformes ont été découvertes.

En analyse fonctionnelle, il a été capable de mettre dans la bonne perspective les notions et les techniques consacrées par la dualité ; le théorème du graphe fermé ; le théorème de la séparation d'ensembles convexes ; les théorèmes de Krein et Milman et de Stone-Weierstrass.

Nous avons déjà mentionné son choix exclusif, dans la théorie de l'intégration, des mesures de Radon sur les espaces localement compacts, qui entre ses mains, sont devenus un outil remarquable. Dans les "volumes élémentaires", les questions classiques sont traitées avec un économie de moyens inhabituelle et une grande généralité. Le théorème des accroissements finis est donné pour les fonctions dont les valeurs appartiennent à un espace normé ; les fonctions convexes sont traitées de façon élémentaire mais dans un style suffisamment complet pour satisfaire la plupart des besoins de l'analyse ; les primitives sont définies en référence aux fonctions réglées ; pour finir, nous avons déjà noté la généralité de son étude "élémentaire" des équations différentielles.

Chapitre 5

L'analyse moderne dans le monde d'aujourd'hui

J'ai exprimé au début de ce texte que l'étude des travaux de Bourbaki et des travaux de ses disciples donnerait une idée bonne et fidèle des tendances modernes en analyse.

Après un examen bref des caractères saillants de ces travaux, nous pouvons essayer de vérifier cette assertion en regardant ce qui est fait en analyse dans le monde entier. Dans ce but, ouvrons les "Mathematical Reviews". Environ deux tiers de ce qui est écrit pourrait encore l'être avec des outils qui existaient déjà il y a une trentaine d'années ; un bon nombre de ces articles ont de la valeur, certains contiennent des raisonnements profonds et ingénieux ;ils ont introduit des notions importantes et des outils ont été créés et testés dans un domaine spécialisé. Mais l'on peut se lamenter du fait que trop peu de rédacteurs ne semblent être au courant de l'existence d'outils basiques qui ont été complètement testés et qu'ils redécouvrent, avec ingénuité mais laborieusement, et dans un domaine restreint des cas particuliers de théorèmes déjà connus.

Dans le tiers restant, les rédacteurs utilisent les outils modernes. Là, à nouveau, on trouve le gaspillage inévitable qui va de pair avec toute production scientifique ; trop d'articles sont peu profonds ou creux et n'ajoutent rien à la construction du "temple mathématique". Mais dans les meilleurs articles, les théories modernes montrent un rendement extraordinaire. Chaque année amène la solution d'un ou de plusieurs problèmes considérés comme inatteignables et voit des ponts créés entre des théories qui semblaient n'avoir rien en commun.

Voici une liste des branches les plus florissantes de l'analyse :

- Groupes topologiques et Théorie de Lie.
- Algèbre topologique.
- Mesure et intégration.
- Fonctions de plusieurs variables complexes et variétés analytiques (qui contiennent beaucoup de techniques algébriques, faisceaux de fibres, espaces filtrés).
- Equations différentielles partielles (dans lesquelles on utilise des distributions et d'autres fonctions généralisées ; étude du cas non linéaire).
- Théorie du potentiel (noyaux généraux, étude des principes et des relations avec la théorie des probabilités).
- Analyse harmonique sur les groupes généraux, fonctions de type positif.
- Analyse fcnctionnelle (espaces vectoriels topologiques locale-

ment convexes ; convexité ; théorie spectrale des opérateurs.)
- Topologie générale.
- Géométrie différentielle.
- Topologie différentielle.
- Théorie des probabilités.

Ces branches ont développé leur pleine vigueur en suivant les mêmes principes que Bourbaki ; le langage utilisé est le même. Dans les colloques spécialisés qui leur sont consacrés, les meilleurs des spécialistes utilisent les mêmes méthodes, le même langage, ont les mêmes préoccupations. Dans ses parties les plus actives, l'analyse moderne manifeste donc une grande unité.

Chapitre 6

L'impact sur l'enseignement des mathématiques modernes

Depuis des temps immémoriaux, l'enseignement a été adapté à l'évolution des connaissances. Mais cette adaptation a parfois été à la traîne, au grand détriment et de la science et de l'enseignement. Durant les cinquante dernières années environ, le progrès a été si rapide qu'un délai pour l'adaptation est devenu inévitable. En mathématiques, le "nouveau visage" résultant de l'utilisation de la théorie des ensembles et de la méthode axiomatique a été une révolution qui rend urgente une rénovation de l'enseignement à tous les niveaux : primaire, secondaire et universitaire.

La rénovation est nécessaire.

D'abord pour la santé des mathématiques elle-même. En effet, ce ne sont pas les vieilles personnes ou même celles d'un âge moyen qui produisent le meilleur travail ; il est impératif que nous clarifiions le chemin pour la jeune génération. De façon à ce qu'ils assimilent les mathématiques plus facilement, nous devons leur montrer clairement les grandes idées simplificatrices, leur enseigner comment gérer les situations complexes en leur parlant des théories unificatrices, qui lancent des ponts entre différents domaines. Cela requerra un sacrifice et d'accepter d'abandonner cette théorie élégante ou cette autre, qui, polies par des siècles de travail, sont vues maintenant comme des branches isolées.

Secundo, pour les utilisateurs des mathématiques (qui sont chaque jour de plus en plus nombreux), d'un côté, un certain nombre de techniques mathématiques sont devenues indispensables ou utiles en physique et ingénierie : les matrices ; les transformées de Fourier et Laplace ; les équations différentielles partielles ; les distributions ; les espaces de Hilbert ; etc. D'un autre côté, les nouvelles mathématiques ont amené des simplifications et une économie de pensée à tous les domaines, dont le physicien et l'ingénieur peuvent bénéficier autant que le futur mathématicien.

Il est évident que les livres pour un tel renouvellement sont encore désirés. Complètement absorbés par leurs recherches, les mathématiciens professionnels ont laissé une faille profonde entre la recherche et l'enseignement. Mais dans les dix dernières années, effrayés par la vue du goufre grandissant, ils ont réagi. Ils ont commencé par changer leur manière d'enseigner, puis ils se sont tournés vers leurs collègues de l'enseignement secondaire et ils ont engagé des dialogues profitables avec eux. Ils ont encore besoin de rassembler leur courage pour une tâche urgente et essentielle. Le temps des simples critiques et des vagues indications est révolu. Ils doivent maintenant s'asseoir et écrire les livres nécessaires ou aider leurs collègues, les techniciens, ou les enseignants du secondaire à les écrire. Le but n'est pas de recopier la production de Bourbaki qui a été conçue pour des étudiants avancés, mais d'adapter à chaque niveau d'âge les méthodes et les techniques des mathématiques d'aujourd'hui.

Tertio, pour ceux qui ne deviendront ni mathématiciens, ni utilisateurs de mathématiques, il est universellement reconnu que de l'étude de cette discipline, ils peuvent tirer une flexibilité intellectuelle qui ne peut être acquise autrement. Les mathématiques modernes donneront peut-être davantage à ceux-là qu'aux autres. Parce qu'elles n'utilisent pas trop de technique, ils peuvent apprendre la théorie des ensembles comme reliée à la logique et trouver cela attractif et utile. La simplicité des systèmes axiomatiques multivalents les rend accessibles à tous et comme elles ont un certain nombre d'applications variées, elles n'apparaîtront pas comme un simple jeu.

Il est hors de question de tenter ici de décrire un programme. Tout ce qui peut être fait est d'indiquer quelques principes qui découlent de l'examen que nous avons mené dans ce texte.

Habituons nos élèves à penser dès que possible en termes d'ensembles et d'opérations. A un très jeune âge, on pourra leur apprendre à utiliser le langage et l'algèbre des ensembles, car son symbolisme est simple et précis. Des expériences d'enseignement ont montré que les élèves aiment l'utiliser.

Conjointement avec l'algèbre des ensembles, les éléments de logique peuvent leur être enseignés en connexion avec l'analyse grammaticale de leur propre langue naturelle. Il a été observé que des étudiants seniors de 19 ans sont incapables de raisonner, ne peuvent donner la négation d'une proposition, ni énoncer correctement une définition ou un théorème ; nous pensons que ceci est dû à un entraînement trop tardif à ce genre d'exercice.

Très tôt également, nos élèves doivent saisir la notion de fonction. Dans ce but, ils doivent avoir étudié et construit divers exemples provenant de la vie courante, de l'algèbre, de l'arithmétique, de la géométrie, de la physique, etc. Ils devraient savoir comment composer des fonctions, prendre la fonction réciproque d'une fonction mono-valuée, reconnaître une transformation ou un groupe de transformations. Progressivement, ils seront amenés aux structures plus vastes d'équivalence, d'ordre, et aux structures topologiques et algébriques. Ces structures peuvent être étudiées, à différents niveaux, dès le début de l'enseignement secondaire (à environ 12 ans).

Le but est de donner à nos élèves quelques outils et de leur apprendre à les utiliser. Nous devons éviter de nous perdre dans des généralités ; au contraire, nous devons nous diriger droit vers les théorèmes clefs qui incluent un grand nombre de théorèmes spécialisés avec des applications immédiates.

Par exemple, on trouvera très tôt en géométrie élémentaire la structure affine du plan ou de l'espace, et on utilisera l'algèbre des vecteurs. Après cela, d'une manière ou d'une autre, le produit scalaire peut être introduit et cela réduira les parties essentielles de la géométrie selon une mesure ordinaire à quelques calculs simples et peu nombreux.

De façon similaire, au niveau universitaire, les outils les plus puissants seront mis en lumière : les théorèmes sur les espaces compacts ; la mesure de convergence uniforme ; le théorème de Stone-Weierstrass ; la méthode des approximations successives, etc. : les étudiants devraient être entraînés à reconnaître quelles structures sont impliquées dans les assertions rencontrées ; cela présuppose que les définitions et les assertions utilisées mettent toujours l'accent sur les structures. Par exemple, l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ peut leur apparaître à une certaine étape comme une forme linéaire positive sur $\mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$, invariante par rapport aux translations ; le Laplacien doit apparaître comme le seul opérateur différentiel du second ordre invariant par rapport aux déplacements, etc.

Dans ce texte, beaucoup a été dit à propos des mathématiques en général, et peu à propos de l'analyse en particulier. La raison en est qu'il n'est plus possible de diviser l'enseignement des mathématiques en ses parties classiques que sont l'algèbre, la géométrie et l'analyse.

Les bases effectives pour l'enseignement de l'analyse même à un niveau scolaire sont l'algèbre (algèbres d'ensembles, étude du corps $\mathbb{R}$, algèbre linéaire, groupes) et la topologie. Les mêmes bases algébriques sont nécessaires à l'étude de la géométrie (qui signifie dans le secondaire aujourd'hui l'étude d'un espace vectoriel de dimension deux ou trois muni d'un produit scalaire).

Il devient donc essentiel de penser à un enseignement dont les éléments principaux seront les structures fondamentales. L'algèbre et la géométrie s'étaieront mutuellement, l'algèbre amenant son symbolisme et ses opérations, la géométrie amenant son langage chargé d'intuitions. La géométrie fournira à l'analyse son cadre topologique, l'outil de la convexité et une interprétation adéquate de l'intégration et de la différentiation ; l'analyse à son tour produira pour l'algèbre une collection riche de groupes et d'espaces vectoriels.

L'activité mathématique comme un tout

Peu a été dit ici à propos des méthodes de recherche et un peu plus a été dit à propos de la théorie mathématique déjà existante. Pour conclure cet examen des mathématiques entrepris dans le but d'aider à comprendre les problèmes rencontrés dans l'enseignement des mathématiques, ajoutons un mot supplémentaire à propos d'un aspect de l'activité mathématique dont on n'a pas parlé du tout.

Toute activité mathématique est formée de cycles, plus larges, dans lesquels on peut reconnaître essentiellement les quatre étapes suivantes : observation, mathématisation, déduction, applications.

Ces quatre étapes sont essentielles, en particulier un enseignement purement déductif serait traumatisant et stérile.

Chacune de ces larges étapes correspond à la conquête d'une nouvelle notion ; ces quatre étapes sont les étapes nécessaires qui permettent au cerveau de se restructurer et de s'élever d'un niveau de pensée à un autre. Ceci est aussi valable pour le chercheur que pour l'élève dont l'activité créatrice ne peut fonctionner à moins que nous ne le laissions suivre le chemin qui mène à la connaissance, et peut-être que nous l'aidions à suivre ce chemin.