ANALYSE MATHÉMATIQUE. *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$*

Note de M. **J.-E. LITTLEWOOD**, présentée par M. Émile Picard.

Le théorème suivant a été trouvé d'une façon indépendante par plusieurs auteurs :

La série

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n \tag{1}$$

étant convergente pour $|s - s_0| \leq r_3$, on a, pour

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3,$$

l'inégalité

$$[M(r_2)]^{\log \frac{r_3}{r_1}} \leq [M(r_1)]^{\log \frac{r_3}{r_2}} \leq [M(r_3)]^{\log \frac{r_2}{r_1}},$$

$M(r)$ désignant le maximum de $|f(s)|$ sur la circonférence $|s - s_0| = r$.

À l'aide de ce théorème, je déduis de l'hypothèse de Riemann : $\zeta(\mathrm{s}) \neq 0$ pour $\mathfrak{R}(s) > \frac{1}{2}$ la conséquence suivante :

$$\log \zeta(\sigma + it) = \mathrm{O}[(\log\ t)^{2(1-\sigma)+\varepsilon}] \tag{2}$$

et même uniformément pour

$$\frac{1}{2} + \delta \leq \sigma \leq 1,$$

δ et ε désignant des quantités positives, arbitrairement petites et indépendantes l'une de l'autre.

Posons en fait

$$s_0 = \sigma_0 + it, \qquad r_1 = \sigma_0 - \left(1 + \frac{1}{2}\delta\right), \qquad r_2 = \sigma_0 - \sigma, \qquad r_3 = \sigma_0 - \frac{1}{2}(1 + \delta).$$

Alors on a, d'après des théorèmes connus concernant $\zeta(s)$, les relations

$$M(r_2) = \mathrm{O}(\log\ t), \qquad M(r_1) = \mathrm{O}(1),$$

et en appliquant (1) avec un choix convenable de σ_0, on obtient un résultat équivalent à (2).

Écrivons maintenant dans (2) $\varepsilon = \delta$: il en résulte

$$|\log\ \zeta(s)| < K(\log\ t)^{1-\delta}$$

et ainsi

$$|\zeta(s)| < \mathrm{e}^{\log\ tK(\log\ t)^{-\delta}} = t^{K(\log\ t)^{-\delta}} = \mathrm{O}(t^{\varepsilon}) \tag{3}$$

C.R.A.S. 1912, 1er semestre, T. 154, n°5, $transcription : DeniseVella - Chemla, février 2025.$

ε étant arbitrairement petit. D'une façon analogue

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \mathrm{O}(t^{\varepsilon}) \qquad \text{pour} \quad \sigma > \frac{1}{2}+\delta \tag{3'}$$

On en conclut, d'après un théorème connu, le résultat suivant :

Les séries de Dirichlet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(n) n^{-s} = \frac{1}{\zeta(s)} \tag{4}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) n^{-s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \tag{4'}$$

convergent dans le demi-plan $\Re(\delta) > \dfrac{1}{2}$.

On a des résultats analogues pour des séries de Dirichlet de caractère plus général. Par exemple :

(5) *La droite* $\sigma = \alpha$ *étant la droite de convergence de la série* $f(s) = \sum a_n n^{-s}$*, alors, ou la fonction* $f(s)$ *a des singularités en tout domaine* $\sigma > \alpha - \delta$*, ou elle prend chaque valeur assignée une infinité de fois en tous ces domaines, ou enfin on a, en tous ces domaines et pour chaque valeur de* k*,*

$$\text{lim. sup.} |f(s) s^{-k}| = \infty.$$

Il reste encore à décider si cette dernière alternative n'est pas superflue et en quelle mesure l'exposant de la série de Dirichlet pourrait être généralisé.

Des raisonnements plus subtils m'ont conduit aux théorèmes suivants, dont le premier nous donne une forme plus précise de (2).

On a uniformément, pour

$$\frac{1}{2} + \frac{\delta}{\log_2\, t} \leq \sigma \leq 1,$$

la relation

$$\log\, \zeta(s) = \log\, \zeta(\sigma+it) = \mathrm{O}\left[\left(\frac{\log\, t \log_2\, t}{\log_3\, t}\right)^{2(1-\sigma)} \log_3\, t\right], \tag{2'}$$

où

$$\log_2\, t = \log\log r, \ldots.$$

De plus (toujours basé sur l'hypothèse de Riemann)

$$\log\, \zeta(1+it) = \log[\mathrm{O}(\log_2\, t \log_3\, t)], \tag{5}$$

de sorte que $\zeta(1+it)$ *et* $\dfrac{1}{\zeta(1+it)}$ *sont de la forme*

$$\mathrm{O}(\log_2 t\ \log_3 t).$$

Si, au lieu de l'hypothèse de Riemann, nous supposons seulement que les abscisses des zéros de $\zeta(s)$ sont toutes $< \Theta < 1$, les théorèmes (2'), (3) et (3') seront à remplacer par des théorèmes analogues, tandis que (6) reste inaltéré.

En me servant enfin d'un théorème de MM. Bohr et Landau, d'après lequel $|\zeta(1+\iota i)| > K^{-1}\log_2 \iota$ pour *certaines* grandes valeurs de ι, je déduis (l'hypothèse de Riemann étant vraie ou non) le théorème suivant :

(7) *Ou la fonction* $\zeta(s)$, *ou bien la fonction* $\zeta'(s)$ *a une infinité de zéros dans le demi-plan* $\sigma > 1-\delta$, δ *étant une quantité positive arbitrairement petite.*