Art et mathématiques

Claude Paul Bruter
Professeur émérite de l'Université de Créteil

Je voudrais tout d'abord adresser mes remerciements chaleureux à l'association des amis de l'IHES et à son président Valentin Poenaru pour cette invitation, cette invitation me permettant de venir avec vous découvrir des œuvres curieuses, voilà. Donc venir avec vous découvrir des œuvres curieuses et lumineuses qui seraient paraît-il exposées dans un bâtiment original, un musée original consacré aux mathématiques. La visite sera précédée d'une petite introduction sur des considérations très générales sur l'origine des mathématiques.

Ensuite seront présentées un certain nombre d'œuvres, choisies parmi 130, les 130 que possède le fond de l'ESMA, qui sont les fruits du labeur d'une quarantaine de mathématiciens, informaticiens et artistes. Leurs auteurs furent réunis au sein d'une association, l'ESMA, dont voici le site http://www.math-art.eu/. Ce site très riche qui contient de nombreux catalogues, par exemple celui-ci, et en vous rendant sur ce site et en consultant les catalogues, évidemment vous découvrirez beaucoup d'œuvres que je n'ai pas la possibilité de montrer aujourd'hui et vous ferez connaissance avec leurs auteurs. Je les salue ici, leur fais part de mon amitié de mon regret de ne pas pouvoir présenter leurs œuvres et je leur fais part aussi de mon admiration pour le travail remarquable, tant mathématique qu'informatique et artistique qu'ils ont accomplis.

Mon exposé est divisé en quatre parties ; la première partie donc est consacrée à des considérations d'ordre général, et ce sont peut-être pour moi les plus importantes, mais enfin...

L'exposé en effet s'articule autour de deux notions centrales : la première est celle de représentation, qui se rapporte à la fabrication locale des mathématiques, et la seconde à celle d'évolution, dont j'indiquerai en fin d'exposé deux caractéristiques qui me paraissent importantes.

Alors donc, premier grand sujet, premier mot-clé, second mot-clé et disons, je m'intéresse donc au premier sujet, celui de la représentation, parce que véritablement une des premières activités de l'être vivant, c'est bien de fabriquer des représentations de son environnement, pour assurer, pour préserver sa stabilité spatio-temporelle. Et c'est de là que tout découle. Alors naturellement pour un mathématicien, est important non seulement la donnée d'un objet mathématique mais également, l'ensemble des représentations qu'il peut en effectuer. Ces représentations, ce sont donc des images symboliques ou matérielles faites à partir d'une panoplie d'appareils photographiques et d'outils divers. Ce couple l'objet et sa représentation, le mathématicien l'appelle une catégorie, bon. Et alors, nous allons nous intéresser ici à une catégorie particulière, que je dénote ainsi $\mathcal{C}(\mathfrak{M})$: $(\mathfrak{M}, \mathcal{R}_{AV}(\mathfrak{M}))$ désigne l'ensemble des objets mathématiques qui sont des objets abstraits et $\mathcal{R}_{AV}(\mathfrak{M})$ désigne l'ensemble de leurs représentations incarnées dans le domaine des Arts visuels. Donc voilà. Alors $\mathfrak{M}$, je l'appellerai aussi à l'occasion et par commodité, un immeuble : c'est un immeuble dans lequel on trouve beaucoup d'objets, le terme immeuble ici n'a pas du tout le sens mathématique que lui donnerait par exemple Tits. Et donc $\mathcal{R}_{AV}(\mathfrak{M})$, c'est l'ensemble de ses représentations incarnées, ce qui est le point important, dans le domaine des Arts visuels. Voici cette belle image que nous a prêtée l'IHES que je remercie. Une autre image rapide est celle-ci,

Vidéo visionnable à l'adresse https://www.yout-ube.com/watch?v=VrH0AAd1RN8.
Fichier support téléchargeable à l'adresse Diaporama Œuvres, Bruter, IHES, février 2022.
Transcription des sous-titres obtenus par downsub : Denise Vella-Chemla, février 2022.

cette image humoristique des mathématiques. Un mot sur justement cet ensemble $\mathfrak{M}$, c'est un objet qui est en évolution de sorte qu'il convient d'écrire non point $\mathfrak{M}$ mais $\mathfrak{M}_t$ et $\mathfrak{M}_t$ désigne la section de l'immeuble à la date t. Nous en verrons un exemple tout à l'heure.

Alors cette évolution est très complexe et elle est sous la coupe de quatre facteurs principaux : voici le premier, simplement l'observation et la reconnaissance des propriétés et des faits, dans notre environnement, donc une activité qui à travers nos capacités naturelles de sensation, relève de la physique expérimentale au général.

Alors je vais passer assez rapidement : leurs premières présentations, qu' on appelle parfois des modèles, qui sont faites à partir d'un jeu de symbole, ce sont ces représentations qui constitue véritablement la base effective des mathématiques.

Alors point 4, ce serait un point qui est ignoré pratiquement pour les historiens : les progrès accomplis dans leur représentation des objets mathématiques à travers la création de nouveaux outils de représentation intellectuelle, mais aussi physique, ces progrès-là, disons, ne sont pas bien mis en évidence par les historiens et là il y a un travail à faire.

Bien, alors, je passe ensuite au point essentiel : le point 1, c'était donc l'importance de la représentation de ce qu'on voit. Et donc le contenu fondateur provient de l'observation du monde physique, et donc on va voir apparaître les trois éléments essentiels, à savoir la forme, la diversité, et le mouvement. Il est probable que la diversité vient en premier parce qu'elle demande beaucoup moins d'attention et de travail cérébral que l'élaboration de la forme. Mais c'est néanmoins sur la forme que je commencerai, disons, véritablement, à entrer dans le vif du sujet.

Mais auparavant, je vais signaler, souligner l'importance de la lumière, du fait lumineux, dans toutes nos constructions. Sans lumière, il n'y aurait pas les mathématiques.

Alors voici la première image, qui symbolise la forme. cette image n'est pas du tout une photographie, c'est un fractal non déterministe au sens de Colonna ici présent. Colonna dont voici le site http://www.lactamme.polytechnique.fr et j'aurais voulu très rapidement montrer ce site. Le site de Jean-François Colonna est très imposant, il couvre une grande étendue d'objets mathématiques et d'objets physiques et je vous suggère d'aller le visiter, on y apprend énormément de choses.

Bien alors, l'image que nous verrons ensuite, voilà, est de Patrice Jeener. Patrice Jeener est un graveur, ancien élève de Flocon à l'école des Beaux-Arts, et il a été séduit par la beauté des objets mathématiques qu'il rencontrait en visitant le Palais de la Découverte et il a décidé de devenir un graveur spécialisé dans les mathématiques. D'ailleurs, probablement, il est le seul de son art, à faire ce genre de travaux tout à fait remarquables. Alors l'œuvre que nous voyons ici est une œuvre assez poétique, assez inspirée par la topologie parce que nous voyons quelques formes, ici, également ici la géométrie, avec un certain nombre de surfaces que nous rencontrerons tout à l'heure. Patrice Jeener donc a produit plusieurs centaines d'œuvres, spécialement en topologie et en géométrie, la géométrie des formes rigides. Et on pourra tout à l'heure découvrir quelques surfaces et quelques images florales, fabriquées par Patrice Jeener.

J'en viens maintenant au mouvement. Voici cette œuvre donc de Jos Leys. Cette œuvre est inspirée par une étude de mouvements physiques, les mouvements de convection d'une masse d'air dans notre atmosphère. Ce mouvement de convection a été formalisé, a été modélisé par Edward

Lorenz en 1863. Cela a donné lieu à quelques équations, et ces équations ont été en somme visualisées par des trajectoires que l'on voit ici, trajectoires qui paraissent au départ, qui ont paru au départ assez chaotiques. Et l'analyse fine de ces cet ensemble de trajectoires, à travers tout un ensemble de... une cascade de nouvelles représentations, a conduit donc à l'image que nous voyons ici.

Ce que nous voyons, c'est, en rouge, ce qu'on appelle un nœud de trèfle. Alors un nœud pour un mathématicien, c'est tout simplement une ficelle sans épaisseur dont on a joint les extrémités. Voilà. Et cette ficelle sans épaisseur ici possède 3 lobes, ce nœud possède trois lobes et on l'appelle pour ça nœud de trèfle.

Alors ce que l'on voit ici, c'est tout un ensemble de trajectoires qui viennent s'immobiliser, rejoindre le nœud de trèfle, qu'on appelle un attracteur. Les trajectoires vertes semblent converger vers l'attracteur alors qu'à partir de cet attracteur, les trajectoires en or ont tendance à s'en évader.

Alors parmi les nœuds justement, il est intéressant de montrer quelques objets que l'on peut fabriquer avec des nœuds. Je prends par exemple cette apparence de sphère, je la modifie, là, j'ai une apparence de tore, comme cela ; et si je continue, j'ai une apparence de ce qu'on appelle un hyperboloïde de révolution. D'une manière générale, toute surface fermée peut-être correctement représentée par un tel nœud, dont les croisements dessus-dessous alternent.

Alors, tout à l'heure j'ai évoqué donc l'immeuble des mathématiques ; je montre ici le contenu géométrique de cet immeuble, ce que l'on connaissait jusqu'au XVII^e siècle environ. Ce sont essentiellement des polyèdres, et également, voilà les coniques et les quadriques. Voilà le corpus principal géométrique qui était connu jusqu'à la fin du XVII^e siècle.

Alors quelle est l'origine, disons, de ce corpus ? Eh bien, en premier lieu évidemment, il faut revenir à la formation des mathématiques, qui provient essentiellement donc de la forme et de la diversité. Alors pour ce qui est de la forme, il faut distinguer, d'une part, ce qu'on appelle les formes rigides ou la géométrie. Géométrie est un terme ancien dont l'origine est une origine socio-économique. Elle décrit simplement cette activité de mesure de l'étendue d'une parcelle cultivée. Et c'est cette activité-là qui a donné le sens véritable du terme géométrie. Alors cette théorie est une théorie des formes que j'appelle rigides parce que les données métriques, longueurs, angles, sont des données tout à fait indispensables pour bien définir les objets de la géométrie de cette théorie des formes.

À l'opposé de la rigidité se trouve au contraire une théorie des formes souples, ou topologie, dans lesquelles on ne tient absolument pas compte des données métriques. Ce sont d'autres considérations, plus fondamentales, les conditions de connexité, les moyens de se déplacer à l'intérieur des formes qui sont les plus importantes.

Alors, la représentation de la forme, en définitive, elle est physique et elle est surtout locale au départ. D'abord, il s'agit du point. Le point, le point noir, qui est la singularité, qu'on appelle aussi à tort de dimension 0, qui représente en somme la personne qui se trouve tout d'un coup en face de nous, et qui est peut-être inquiétante, dont les potentialités sont infinies, qui peut faire peur, et qui est représentée par ce point, qui se trouve en avant-plan au contraire sur un fond qui est éclatant et qui est blanc et qu'on voit ici sur cette pierre sculptée il y a quelques milliers d'années.

Le deuxième élément fondamental de la géométrie, c'est le trait : le trait qui est en fait une ombre simplement créée par la lumière ; j'ai tout à l'heure évoqué le rôle de la lumière dans la construction des mathématiques, vous voyez ici ce que représente le trait *(projetant l'ombre d'une feuille de papier sur le mur)...* Ce qu'on voit, c'est un trait et c'est l'ombre d'un objet qui se trouve dans un espace de dimension supérieure, qui présente des propriétés inconnues, mais l'ombre fait voir au moins une propriété importante de cet objet. L'ombre, c'est le dessin fait par les rayons lumineux, du bord des objets. Il y a une projection qui est faite sur le sol, qui permet disons d'obtenir cette ombre.

Alors, la forme et la diversité donc sont à l'origine essentiellement de cette théorie des formes rigides. Et donc on a cette ligne, cette ombre qui est la projection sur le sol, du bord. Alors le théorème de Thalès est en fait une observation physique sur les ombres. Et de là viennent ces affirmations de Einstein et du grand mathématicien Hilbert, à savoir que la géométrie est une théorie physique.

Et plus généralement, la théorie expérimentale qui rassemble les observations, bon, elle se déploie en une physique théorique explicative. Et cette théorie se déploie elle-même en une théorie à la fois plus synthétique et plus analytique, et donc aux potentialités prédictives plus fines que sont les mathématiques.

La projection donc elle engendre le spectre des objets, elle permet donc de voir sur un espace connu des propriétés importantes des objets situés dans d'autres espaces moins connus et évidemment, elle est très utilisée par les physiciens qui utilisent beaucoup le terme de projection.

La projection, en bref, engendre la rencontre, la connaissance et la création. On peut considérer la projection comme la reine-mère de la famille des représentations. Bien des applications au sens mathématique sont tout simplement des déformations de projections.

Alors du côté du mouvement, on a d'abord les nombres entiers : 1, 2, beaucoup. Que sont-ils ? Eh bien primitivement, ce sont des représentations abstraites, puis ensuite concrètes bien sûr, d'existence, de présence, par des dessins, appelés chiffres (dans notre civilisation, chiffres arabes). Quand vous dites 2, vous ne savez pas a priori la forme, la personnalité, les propriétés de l'objet qui se trouve en face de vous : il y a deux personnes, c'est tout. Donc c'est avant tout une représentation de la présence de l'existence d'objets.

Alors qu'est ce qui se passe aujourd'hui ? Eh bien les nombres doivent être compris comme des représentations, en général non pas avec une ligne de chiffres, mais avec des tableaux de chiffres, d'une part de lieu, de position, et d'autre part et dualement, surtout, d'opérateurs qui induisent des mouvements.

Quand vous dites "1,2,3,4,5", 1... 2... 3... 4... 5..., je me déplace en translation. Mais il y a aussi les rotations. Alors, il y a différents types de nombres : des nombres qui se contentent de décrire les translations et puis les noms qui décrivent à la fois des rotations et des translations, et encore des rotations, et encore des translations.

Et ce qu'on appelle les nombres complexes mais ce terme, Gauss le rejetait, ce sont en fait des nombres, pour la première fois, qui ont été créés par un mathématicien, également médecin architecte qui s'appelait Nicolas Chuquet, en 1484, et c'est pour ça que je les appelle nombres de Chuquet. Ce sont des nombres, en fait, qui représentent à la fois des translations et des rotations.

Alors ici je vais, on est ici dans le cadre de la théorie des nombres, bien sûr.

Alors, permettez-moi une petite incursion pédagogique. Voilà, j'ai lu dans dans *Le Monde* il y a quelques jours, il y a quelques semaines, une déclaration de physiciens disant que i était un nombre imaginaire. Alors quelle est la signification de i. i, ici, je l'appelle *iota* voilà. Alors en dimension, eh bien je considère l'opérateur de rotation de 90 degrés, un quart de tour, les enfants comprennent parfaitement ce qu'est un quart de tour, donc je prends le point noir, et je lui fais faire un quart de tour et j'obtiens le point bleu, je lui fais faire à nouveau un quart de tour et j'obtiens le point rouge. Voilà, alors, en raccourci, on écrit $i(1)$, $i^2(1)$ et on écrit égal $i(i(1)) = -1$, c'est tout un jeu de notation, qui a une signification précise derrière, mais disons, on mélange dans l'esprit très rapidement, à la fois les connotations et les différentes connotations qu'on peut associer aux différents caractères. Donc en définitive la racine carrée de i^2 soit i et aussi la racine carrée de -1. et i n'est nullement un nombre imaginaire mais c'est tout simplement qu'il représente une rotation. Donc il y a tout un travail pédagogique à faire autour de ces notions.

Bien alors maintenant, j'en viens à des choses un peu plus plaisantes et accessibles presque. Ce sont les exemples de visualisation. Alors, d'abord, évidemment, ce qui parle de diversité il s'agit en fait du nombre, de la pluralité.

Alors voici cette œuvre d'Anatoly Fomenko. Alors Anatoly Fomenko est un excellent mathématicien. Élève très brillant, étudiant très brillant dans toutes les disciplines : à 13 ans, déjà, il obtient une médaille de bronze à Moscou pour ses sculptures et ses dessins. Et puis plus tard, il obtient trois prix de l'Académie des sciences de l'Urss. L'œuvre de Fomenko est caractérisée par la présence constante, l'obsession chez lui, de l'infini et la présence donc de ce monde fractal. Également comme c'est un mathématicien qui connaît bien la topologie, on retrouve souvent chez lui également la notion de déformation qui est associée au monde topologique. Alors Fomenko, disons, est un artiste extrêmement doué. Il travaillait, disons, sans, absolument sans rature, sans gomme, il fait des œuvres donc de première main parfaites.

Dans ce livre, on trouve deux œuvres faites par Fomenko, avec certaines de ses explications auxquelles je ne crois pas toujours. Également, le livre dont je parle est postfacé par un mathématicien bien connu, qui s'appelle Yuri Manin, et que nous retrouverons peut-être un peu tout à l'heure.

Il y a l'exposition aussi mais disons que je voudrais dire un mot sur chacune de ces œuvres. Ce que nous voyons ici, à gauche, c'est une tour. La partie gauche représente l'écriture du nombre π à l'aide de dominos. Sur chacun des dominos sont inscrits en noir des points qui représentent des nombres. Donc on est dans le stade primitif qu'on a vu tout à l'heure. Et pourquoi des dominos ? Peut-être un souvenir d'enfance.

À droite, ce n'est pas le nombre π mais le nombre e, qui est la base de l'exponentielle qui est représenté sur le pan droit de la tour. Alors cette tour va, disons, en s'amenuisant vers le bas. C'est un effet de perspective, pas seulement. Tout simplement, il s'agit, disons, d'une sorte de vision fractale à nouveau, on a une échelle interminable, et entre les barreaux d'une échelle, il y a une certaine hauteur, et au fur et à mesure qu'on descend dans l'échelle, la hauteur entre les barreaux diminue également. On a un phénomène très régulier, et c'est cela qui caractérise le monde fractal. Alors on voit sur la gauche un certain nombre de dominos qui se sont échappés et qui tombent et qui représentent donc une sorte de vision destructrice. À la fin de cette chute, il y a une cassure qui est déjà présente. Et la fin peut-être probablement disons de cette chute est une destruction inexorable.

J'en viens à ce second tableau. Tout à l'heure, on aurait pu s'attarder sur l'œuvre de Dürer, et comparer ces deux œuvres. Voyez, à gauche, le personnage est un personnage aérien, c'est un ange, et à droite, au contraire, la situation est beaucoup plus triste. Là encore, on retrouve l'infini avec la présentation du nombre e, il faut le lire partir du centre, voilà le 2, et pour le lire, mais il faut tourner en sens inverse des aiguilles d'une montre ; autrement dit, on remonte le temps. Et donc, ces personnages voilés, à quoi pensent-ils ? Quels souvenirs ont-ils ? Il y a plusieurs possibilités qu'on peut imaginer. J'en reviens... Je regarde ici ce fragment du tableau. Fomenko dans son enfance a vécu avec ses parents à Magadan. Magadan, c'était la capitale de la Kolyma, où, disons, Staline a envoyé un certain nombre d'ouvriers, qui y ont probablement laissé leur vie. De sorte que la première strate là-haut est une strate de symboles. Fomenko dit que ce sont des représentations des nombres, peut-être des matricules, et donc j'imagine que ce fractal-là, puisqu'on a ici des strates de plus en plus fines, et on a une infinité de strates, représente en somme les générations de travailleurs qui auraient laissé leur vie dans les mines de la Kolyma. Et ce tore, ici, ce tore peut représenter le cadavre figé qu'on aurait placé en défi, face au mur, mais aussi peut-être la bouche, la bouche d'une de ces personnes, son cri étouffé dans la nuit sibérienne.

Bon, il y a énormément, disons, de choses qu'on peut raconter et voir, en regardant de manière très très intense ce tableau, mais il faut avancer.

Là encore, on retrouve donc, ici, le monde fractal avec cette infinité de joueurs de trompette ; ces trompettes, en fait, on peut les voir comme des objets mathématiques, des demi-sphères de dimension -1 et, là aussi, on voit cette infinité, à nouveau, d'objets de plus en plus petits. Alors, quand il était assez jeune, étudiant, Fomenko, qui se représente ici, a fait partie d'un club musical, et on voit ici tout cet ensemble musical qui se trouve là ; on notera la présence... À quoi rêve-t-il ? Ici se trouve une équation, une équation qui symbolise, tout simplement, la conjecture de Fermat (à l'époque, elle n'était pas démontrée). Une autre, ici, formule, si on voit bien on voit $\pi_1(M^3)$ égal 0, la conjecture de Poincaré. Et puis alors, ici, encore moins lisible, la conjecture de Riemann. Voilà à quoi rêvait mathématiquement peut-être Fomenko, mais aussi à tout cet ensemble assez terrible ! On remarquera ici les noms, je ne sais pas si vous arrivez à les voir : il y a les noms de Brueghel, le nom de Bosch et le nom de Dali. Autrement dit, ce sont trois personnages, trois personnes avec lesquelles il se sent en harmonie, et je reviendrai là-dessus tout à l'heure. Ce qu'on voit ici, par contre, et de ce côté-là également, c'est cette espèce, disons, de tyran qui a une sorte de casquette stalinienne sur la tête. Et cette image-là, où celle-ci, fait pendant à ce qu'on voit ici, Don Quichotte, son cheval, sa lance, et ici en fait, il s'agit de quatre disques lumineux qui représentent la tête de Don Quichotte, autrement dit l'innocence joyeuse, la beauté de l'innocence, face à la malignité du monde.

Je poursuis. Voici à nouveau Don Quichotte. Don Quichotte, ici, donc, est représenté sous la forme d'un fractal. Les dominos que nous avons vu tout à l'heure chez Fomenko, sont remplacés par des plaquettes lumineuses. Et donc, on a une correspondance d'esprit, avec Dali qui a donné un très grand nombre de représentations de Don Quichotte. Je vous suggère d'aller voir le musée Dali, rue Poulbot à Montmartre. Donc on a une connivence entre ces trois auteurs, donc une même sensibilité partagée.

Alors, je reviens à Luc Bénard.

Luc Bénard a travaillé beaucoup avec le mathématicien Richard Palais (si on a le temps, j'en parlerai tout à l'heure). Et il a donc travaillé beaucoup sur les fractales entre autres. C'est lui qui a fabriqué cette œuvre. Cette œuvre est intitulée un mathématicien à Murano. On ne se rend pas compte, ici, à quel point elle est lumineuse et c'est vraiment du verre qui a été travaillé. Ce que l'on voit ici, c'est une représentation de la bouteille de Klein ; ici une représentation de la surface de Boy qu'on a déjà vue. Et en haut et ici, là, en bas, ce sont deux surfaces minimales et là, c'est ce qu'on appelle un presseur. Ce sont des choses que, si on a le temps, on retrouvera tout à l'heure.

Bon, alors je suis obligé d'accélérer. Ce tableau qui est admirable, c'est un fractal, qui visualise un problème posé par le mathématicien Wada. Fabriquer un ensemble de trois fractals dont les bassins s'interpénètrent de manière infime, petite bien sûr, mais de manière infinie si on peut dire. Et alors, on a là une illustration parfaite, disons, de ce phénomène d'imbrication de trois bassins de fractals. Un autre fractal...

Bon, alors, je suis encore dans la théorie... un petit peu... des nombres, de la diversité, et je montre cette œuvre de Jean-François Colonna. Tout à l'heure, on a vu des représentations des nombres assez standards. Ici, on a des représentations des nombres, qu'on appelle des octonions. Alors, les octonions s'obtiennent à partir des quaternions, de la même façon que les nombres dits complexes, les nombres de Chuquet, s'obtiennent formellement à partir des nombres standards, disons décimaux, réels.

Ce que représente cette image, c'est un domaine de l'espace à 8 dimensions, puisque les octonions se trouvent dans des espaces à 8 dimensions. Les points, ces nombres donc sont représentés par des points, on joint les différents points par des droites, et on transforme de manière continue, en respectant, en conservant les angles entre les droites, on déforme ce domaine et on fait une section de ce domaine par un plan à trois dimensions, et on projette tout cela sur une feuille de papier, sur un écran d'ordinateur.

Visualisation de la forme, donc je vais passer assez rapidement sur ce thème. Oui, ce que je voulais dire, c'est que dans l'étude de la représentation de la forme, elle provient essentiellement, au départ, de l'observation de la nature, c'est-à-dire de l'observation des cristaux, des cristaux de neige, des quartz, de tous les cristaux de roche. Et la cristallographie a joué un rôle essentiel dans le développement des mathématiques, notamment dans l'introduction de la notion de symétrie. Il n'y aurait pas eu Curie, le cristallographe, sans doute la notion de symétrie aurait été instaurée, en mathématiques, le terme aurait été utilisé beaucoup plus tard... mais bon.

Alors, comme problème, se trouve le suivant : vous avez une plage très vaste remplie de sable très fin, ou bien un champ de neige empli de flocons miroitant. Voilà ce que vous observez, et vous vous demandez, de manière tout à fait inconsciente, “mais si je prends un domaine de l'espace, dans quelle mesure puis-je le remplir avec des motifs identiques ?”. Le remplir, c'est-à-dire sans laisser de vide, et sans que ses motifs empiètent les uns sur les autres : c'est ce qu'on appelle le problème des pavages. Alors dans l'espace ordinaire, il y a une multitude de pavages possibles mais nous n'avons qu'une seule toile, celle de Milen Poenaru, qui représente donc... qui est censée représenter un pavage de l'espace ordinaire par des octaèdres qui doivent être tronqués parce que sinon, le pavage serait impossible. Et le bleu et or ici m'a fait penser au bleu et or de Giotto, que l'on trouve sur la voûte de la Chapelle Scrovegni à Padoue, disons à une œuvre absolument magnifique.

Dans le plan, on a pléthore de pavages. Et alors voici donc un problème posé par Felix Klein il y a plus d'un siècle : on se donne un disque plat, c'est à dire une grande pièce de monnaie infiniment plate, et on veut la remplir, sans laisser de vide, par d'autres pièces de monnaie, évidemment plus petites, par d'autres disques plus petits. Ce problème a été résolu au début de ce siècle, par trois mathématiciens américains, qui ont fabriqué, qui ont posé un algorithme, donc, proposé l'algorithme. Et voici, disons, le résultat de cet algorithme. Alors cet algorithme, disons, est basé sur une transformation particulièrement fondamentale, je dirais, en géométrie au moins plane.

Cette transformation fait appel à trois autres types de mouvements : la translation, la rotation, et ce qu'on appelle l'inversion. L'inversion était autrefois enseignée dans les lycées, et j'avoue que, disons, elle m'a causé de grandes joies. Mais elle n'existe plus, et alors cette transformation est appelée en vieux français l'homographie, par les américains, la transformation de Möbius et en fait elle a été introduite bien avant Möbius par Euler en 1777 ; et donc là, il y a un petit point d'Histoire que les mathématiciens qui utilisent le terme transformation de Möbius ignorent.

Alors dommage que je ne puisse pas montrer, donc, tout ce qu'on peut obtenir, tout ce que Jos a pu faire comme illustrations à partir de l'usage de l'algorithme trouvé par les trois mathématiciens américains.

Voici un autre problème de pavage, qui a été résolu assez récemment finalement. Il est tout à fait possible, c'est très facile, de fabriquer un pavage du plan avec des pentagones, mais des pentagones non convexes, des pentagones réguliers, en ce sens que les longueurs des côtés sont toutes égales. Mais, il faut que, pour que le pavage soit possible, il faut que le pentagone utilisé ne soit pas convexe, il est impossible de faire un pavage du plan avec des pentagones habituels convexes. La raison, c'est que, tout simplement, l'angle au sommet d'un pentagone n'est pas égal à 360° divisé par un entier. Alors, on s'est préoccupé quand même de la question "est-ce qu'on peut arriver à faire apparaître des pavages, où apparaîtraient des pentagones convexes et c'est le cas, disons, c'est ce qu'a réussi à faire le mathématicien Penrose qui d'ailleurs, disons, s'intéresse beaucoup beaucoup à la physique également. Et il a proposé trois solutions, dont la solution la plus élégante consiste à découper un pentagone, à faire apparaître des triangles particuliers de ces pentagones, et de les assembler, soit en fléchettes, soit, disons, en cerfs-volants.

Alors, ce sont des triangles très particuliers parce que leur longueur est soit égale à 1, soit égale au nombre d'or.

Donc je poursuis très rapidement. Alors des exemples de visualisation de la forme, bon, je crois que je vais passer très rapidement. Voilà, ça, c'est ce qu'on appelle une surface minimale. J'aurais voulu parler des surfaces minimales. Alors, qu'est ce qu'une surface ? Une surface est une peau infiniment mince. Et alors, vous avez des surfaces fermées comme les bulles de savon, qui sont d'autant plus fascinantes qu'on ne peut pas les coincer. Mais entre l'intérieur et l'extérieur d'une bulle de savon, vous avez une différence de pression et justement, en épaississant cette surface, vous arrivez à vaincre cette différence de pression. Et ce qui caractérise ces bulles de savon, c'est que leur courbure moyenne est constante. Alors les surfaces minimales sont au contraire des surfaces ouvertes, elles s'appuient sur une courbe, et puis on obtient donc des surfaces comme celles-ci.

Et la propriété essentielle de ces surfaces minimales, c'est que la courbure moyenne est nulle.

Alors Patrice Jeener donc a tracé beaucoup de surfaces minimales, il en a fabriqué une trentaine. Mais également, il s'est intéressé beaucoup à la représentation des fleurs et des coquillages, et il a utilisé, donc, des représentations beaucoup plus algébriques dont voici, ici, certaines des traductions. Alors je voulais dire que ces surfaces minimales, également, sont très présentes dans toutes les

morphologies biologiques et physiques. Voici un exemple de coquillage, un triton, qui est tout simplement une courbe logarithmique tracée sur un cône.
Alors autre problème posé par les mathématiciens au siècle dernier c'est un problème alors cette fois-ci vraiment de topologie : vous prenez une sphère, une sphère élastique, et vous vous demandez dans quelle mesure vous pouvez retourner la sphère de sorte que la partie intérieure, ce qu'on voit à l'intérieur de la sphère qui est bleue, paraisse maintenant à l'extérieur.

Plusieurs algorithmes ont été fabriqués qui permettent (il y a cinq techniques à l'heure actuelle) de retourner la sphère.

Et ce que je montre ici, c'est un retournement, ce sont les étapes du retournement de la sphère fait par Fomenko, à partir de ce qu'on appelle la surface de Morin, qui est une surface que l'on voit à gauche, qui a une symétrie d'ordre 4.

Donc on part de la sphère qui est ici, et on suit donc les étapes du retournement petit à petit, qui sont marquées ici, jusqu'à arriver à ce point-là, et on repart en sens inverse pour terminer le retournement de la sphère. Alors il y a un autre procédé pour retourner la sphère, qui part cette fois-ci d'une surface de Boy. Alors j'ai évoqué tout à l'heure, au début de l'exposé, ce qu'est une surface de Boy, j'en ai montré une. Une surface de Boy, c'est tout simplement la représentation des rayons lumineux qui sont issus d'un seul point. Alors pour la fabriquer eh bien, on prend une demi-sphère, on prend un petit ruban de Möbius qu'on tortille, suffisamment et de manière à ce qu'on voit apparaître finalement le bord de cette surface, ce ruban de Möbius, c'est un nœud de trèfle ; on accole, par les bords, la demi-sphère et le ruban, et on obtient la fameuse surface de Boy. Et c'est en partant d'une surface de Boy que d'autres mathématiciens, une équipe américaine avec John Sullivan, a fabriqué cette représentation. On peut suivre à nouveau la manière dont la sphère est transformée, pour qu'elle apparaisse retournée in fine.

Alors ce retournement se fait évidemment sans déchirure de la sphère, mais la sphère peut se traverser elle-même.

Bon, alors j'en viens finalement encore à une dernière partie qui est la représentation du mouvement. On a vu déjà au début de l'exposé les mouvements de convection d'une masse d'air qui donne finalement naissance à cette représentation. Mais il est divertissant et finalement très instructif de montrer cette image-là, faite par Colonna.

Colonna introduit dans notre système solaire quelque part une nouvelle planète et il place un observateur. Et ce que montre ces colliers de Colonna, ce sont en fait les trajectoires de nos planètes habituelles que verrait l'observateur. Et ces trajectoires sont très chaotiques. Et alors Colonna se pose la question "mais est-ce que cet observateur aurait été capable de fonder une théorie de la gravitation à la Newton ?". Alors de telles trajectoires peuvent localement éventuellement présenter des périodicités et auquel cas, on pourrait décomposer ces trajectoires, partiellement, en nœuds.

Alors la présence de périodicités est une manifestation constante dans les phénomènes physiques qui ont très souvent des apparences ondulatoires.

C'est un universel de la nature que cette périodicité, que ces présences de périodicité, et cette présence de phénomènes ondulatoires.

Alors il existe des situations très particulières. Il y a des cas où on considère une certaine vague, qui part de A et qui va vers B. D'autres vagues vont de B vers A. Et il se trouve que ces vagues ne changent absolument pas de forme au cours de leur déplacement et quand elles se rencontrent, pratiquement, leur rencontre ne les affectent en rien.

Alors de telles ondes sont appelées des ondes solitaires ou des solitons. Alors bon, je passe très rapidement. Pour les décrire, il y a différentes familles d'équations, deux ou trois. En particulier, celles qui utilisent cette expression, qu'on appelle un d'Alembertien, qui relient de manière linéaire une accélération par rapport à l'espace à une accélération par rapport au temps.

Et alors, ça a donné naissance à une équation particulière qu'on appelle l'équation de sine-Gordon, et qui décrit, qui permet de représenter, de décrire très bien un certain nombre d'ondes solitaires, qui sont très très présentes dans tout le monde physique. Et alors là, je ne peux pas vous montrer ça http://virtualmathmuseum.org/Surface/gallery_o.html. Le mathématicien Richard Palais qui est un très grand mathématicien et un très grand humaniste, qui a créé un site virtuel de référence, un musée virtuel de référence, dans lequel on peut voir énormément d'objets mathématiques. Et alors il y a une page de ce site qui est consacrée aux surfaces et aux ondes solitaires et dans cette page, eh bien, on trouve cette image, qui représente une solution de l'équation de sine-Gordon, une solution un peu particulière, et évidemment, on voit ici tout le travail, je ne sais pas ce que vous voyez d'ici mais... tout le travail de Luc Bernard qui a illuminé vraiment cette solution, et c'est une œuvre, disons, en verre, en quelque sorte, de toute beauté. Alors dans le même genre *(projection d'une photo montrant les rayons de lumière se reflétant dans un verre d'eau)*, mais je pense que Luc Bénard aurait été heureux de fabriquer cette image *(rires)*. Cette image, disons, illustre la théorie des singularités des applications différenciables dans ses applications à l'optique.

Bon, alors, j'en viens maintenant aux mouvements, donc à une vidéo car qui pense, évidemment, mouvement, pense vidéo, je vous propose de terminer assez rapidement maintenant l'exposé sur la présentation d'une vidéo qui décrit, en somme, qui suit un processus d'évolution (il est tard, je ne vais pas vous la décrire). Disons, essentiellement, donc l'évolution telle que je puis vous la décrire : elle est caractérisée par cette manifestation constante, effectivement, d'un processus de déformation, on retrouve là la notion de déformation et la notion de bifurcation ; par moments, cette déformation est transformée en une bifurcation, dont, disons, une des caractéristiques les plus essentielles, c'est que, dans le cas où se trouve une singularité, qui va éclater, elle éclate en deux singularités jumelles mais qui s'évadent dans des directions opposées et probablement, ce phénomène de bifurcation, est parmi les plus archaïques qui doit être présent, certainement, en physique. Les physiciens pourraient peut-être mieux en parler. Et alors donc, la vidéo a également été choisie parce que dans l'espace à trois dimensions, il y a caractérisés par ce qu'on appelle leur courbure totale, donc qui peut être positive ou négative ou nulle, il n'y a donc que trois types de surfaces et donc trois types de géométrie correspondants. Et donc cette vidéo permet de montrer comment on peut passer de manière continue d'une géométrie à une autre. Bon alors, je vais arriver tout de suite, je vous montre tout de suite la vidéo, vous allez pouvoir la trouver ici http://arpam.free.fr/Tore%20SGH.mov. J'ai besoin du son, bon, on va refaire avec le son, et vous verrez pourquoi il faut le son. Du point de vue artistique et technique, cette vidéo a été réalisée par Jos Leys, la conception, c'est une autre personne, et l'accompagnement, il y a un accompagnement musical et l'accompagnement musical est fait par une violoniste, une violoniste que vous allez écouter tout à l'heure. Alors là, je montre ici, en somme une manière de construire un tore : on a un grand cercle qu'on appelle le cercle de base, un petit cercle qu'on appelle une fibre, et puis on déforme. Alors la déformation fait apparaître un point singulier, voilà. Ce point singulier va éclater en deux points singuliers symétriques.

On n'entend pas la musique, vous ne pouvez pas faire mieux...

Alors ça, c'est ce qu'on appelle une pseudo-sphère, une pseudo-sphère de courbure -1, on est arrivé là, on revient à la situation de départ. Alors, on revient donc au point de départ. Alors, voilà, je n'dis rien... *(une jolie bague montée d'une pierre apparaît à partir du tore.)* Ce bijou est offert à toutes les dames présentes dans la salle.

(Applaudissements)

(Une question : Pourquoi Don Quichotte ?)

Don Quichotte est un personnage qui a été représenté par de très très nombreux artistes et donc leur sensibilité fait qu' ils ont envie de montrer ce personnage. Ils expriment quelque chose à l'intérieur d'eux-mêmes, et ils utilisent évidemment les moyens techniques mathématiques dont ils peuvent disposer. C'est le cas de Bénard, disons, son Don Quichotte est très original, c'est uniquement avec des plaques lumineuses, dont on voit la taille décroissante au fur et à mesure que l'on descend vers les pattes, disons, de l'animal. Il me semble naturel qu'un artiste souvent veuille faire partager son émotion, dire quelque chose, par son œuvre, voilà.